15.8.367

150.8

Digitized by Google

ARITHMETICÆ, ALGEBRÆ ET GEOMETRIÆ PRINCIPIA

SIVE

MATHESEOS ELEMENTA

OMNIUM CAPTUI ACCOMMODATA.

Opus, cujus potiſſimam partem auctor ſuo marte elucubravit, exiguam ab auctoribus, qui facilius intelligerentur, excerpſit.

AUCTORE

ABBATE PARA DU PHANJAS.

E Gallico ſermone in Latinum vertit F. T.

VENETIIS.

APUD LAURENTIUM BASILIUM.

Superiorum Permiſſu, ac Privilegio.

MDCCLXXXII.

PRÆFATIO.

PRæcipuæ duæ humanæ animæ facultates, quæ ceteras omnes ad agendum excitant, ſunt *potentia intellectiva*, qua ad verum anhelat, & *potentia affectiva*, qua bonum appetit. Quum natura & ad verum cognoſcendum, & ad bonum proſequendum ſit inſtituta, ſenſu intimo percipit, a duobus hiſce objectis natura infinite variis ſe & majorem, & perfectiorem, & beatiorem fieri. Hinc in animis ſupra vulgus elatis propenſio illa exoritur, imo aliquando ſuavis ille ſimul, & vehemens animi motus, quo in omne cognitionum genus aſſequendum feruntur.

MATHESEOS UTILITAS.

Inter humanas cognitiones nulla eſt, quæ magis menti jucunda ſit, quam ſcientia Matheſeos, in qua pura veritas ſemper nullis tenebris ſeſe offert, præſertim quum ſynthetica methodo inquiritur. Quam beatus ſibi videbitur intellectus recte a natura inſtitutus, & cognitiones ſuas augendi cupidus, quum a nudis, ac fœcundis veritatibus nitidiſſimam evidentiam præſeferentibus illuſtretur, atque ditetur.

Matheſis omnibus ferme cognitionibus noſtris lucem affundit, iis quoque, quæ ad ipſam minime ſpectare videntur. Ipſa ad verum a falſo ſecernendum opportuna eſt; mentem de jam notis veritatibus certiorem facit; novas innumeras illi patefacit. *In phyſica* theoria motus, mechanica, meteorologia, hydroſtatica, optica, catoptrica, dioptrica, aſtronomia tum geo-

metrica, tum phyſica matheſi neceſſario connexæ ſunt; a qua quidquid perſpicui, ac certi habent ferme totum mutuantur. In *vita civili* ſcientia rationum, meditationes recte inſtitutæ, promptæ ſupputationes, rerum tum generatim, tum ſingillatim conſideratarum theoria ejus utilitatem ſæpiſſime comprobant. *In literis* amœnum ſolido commixtum, dives, ac perſpicua methodus, dictionis robur recto ratiocinio, ac perſpicuitati conjunctum quam apte in hæc influat ſatis oſtendunt.

Matheſis mentem dirigit, ac perficit, veritatis inquirendæ, & arripiendæ illi conſuetudinem parit, a noto principio ad remota conſequentia inde deducenda deſcendere docet; ſive a remotis conſectariis ad eorum principium regredi, in quod tandem recidunt; qui fructus uberrimi inde percepti pluris fortaſſe faciendi ſunt, quam cognitiones ipſæ, quibus a matheſi ditamur.

Si matheſis ſcientia digniſſima eſt, cui mens humana ſuam operam navet; hæc quoque profecto humanis mentibus laus eſt tribuenda; nullam ſcientiam aliam fuiſſe, cui majori ſucceſſu operam dederint. In ceteris omnibus hoc illis ingratum evenit, quod fere ſemper admodum arctis, ſępius etiam incertis cognitionibus coarctentur. In matheſi minus mirari deberent, ſe aliquibus cognitionibus carere, quam ſibi plaudere, cum ſe neceſſariis omnibus cognitionibus ditatas videant, imo & plerisque, quas utiles tantum, fortaſſe & ſuperfluas cenſere deberent,

PLERAQUE OPERA MATHEMATICA.

Plerique homines præclaro ingenio ab Euclide ad hos uſque dies egregia mathematica opera protulerunt, alii quidem matheſim univerſam tradentes, alii elementa; quæ quidem ope-

opera poſteritas, ut & ætas noſtra, plurimi faciet. At nobis hæc opera conſiderantibus, quibus quidquid hac in re ſcimus, debere fatemur, viſum eſt, nullum eſſe, ex iis ſaltem, quæ legimus, in quo matheſis ſit omnium captui accommodata, a quo parum utilia, ac nimis ardua reciſa ſint; ubi matheſis ita tradatur, ut ſimul jucunda ſtudenti ſit, & captu facilis, atque phyſicæ, ac vitæ civili utilis, & grata eveniat.

Nonnulla ex his operibus *prolixa nimis* longius a meta abducunt, mentem inde avertentes ad pleraque nullius momenti, ad problemata, aut corollaria inutilia, a quibus nulla jactura abſtinere poſſemus; quæque proponi non deberent, niſi quum neceſſaria illa pauca propoſita fuerint, quæ tironis mentem ſatis ſuperque occupare valent.

Alia *conciſa nimis* gravi incommodo, ac labore afficiunt, quum nervi perpetuo contendendi ſint, ut intelligantur. Me jam aut magis, quam par ſit, ingenio pollentem putant, aut pluribus, quam quas habere poſſim, cognitionibus jam ditatum. Quare ſcientiæ ſtudium moleſtum eſſe faciunt, quod jucundum eſſet, ſi illa apta, & dilucida methodo traderetur.

Alia *indigeſta* per varias veritates deducunt, nec quo eundum nec qua via procedendum ſit oſtendunt; labyrintho ſimilia, in quo ſinguli greſſus magna luce illuſtrantur, at viarum ambages, quo greſſus dirigendi ſint videre non ſinunt.

Alia *theorica magis*, *quam practica*, recta, ac aperta via ab infimis cognitionibus ad ſublimiſſimas cito deducunt; non tamen indicant, quid ex iis, quæ didicerim, utilitatis capere poſſim. Innumeris me quidem abſtractis cognitionibus ditant; at me ignorare ſinunt qua ratione me gerere debeam, ut horti aream dimetiar, ut muri reſtaurandi triplicem dimen-

ſionem capiam, ut loci a turris vertice diſtantiam dignoſcam. In opere noſtro vitia hæc evitare curavimus.

Ut homines ad matheſeos ſtudia incitentur, nihil magis aptum videtur, quam ejus cum phyſica, & cum utilibus cognitionibus a diverſis phyſicæ partibus profluentibus nexum oſtendere. Neceſſario vinculo matheſis, & phyſica conjunctæ ſunt: illa huic facem præferre debet: hæc illius uſum, & utilitatem patefacere. Opus, in quo matheſis pura pertractetur, *non admodum ad ſtudium invitat;* neque enim ſatis apparet quo tendant ſublimes cognitiones, quæ ab illo acquiri poſſunt. Opus phyſicum matheſeos luce deſtitutum *non ſatis erudit:* cognitiones enim tradit, quarum ſæpius fundamentum ſupponit; nec jam omnes hoc norunt, illudque huc illuc perquirendum eſſet. Exempli cauſa: in aliquo opere mathematico lego, me ex theoremate ibi demonſtrato poſſe telluris a ſole diſtantiam invenire quum in aſtronomia verſatus fuero; at quum in hac jejunus ſim, hoc cæcutiens, & nulla voluptate tantum credo. In aliquo opere phyſico lego, propoſitionem aliquam eſſe certiſſimam; quod deſcendat ex geometrica demonſtratione, quam ignoro, nec ubi inveniam ſcio. Alibi lego, dato triangulo parallactico, quod mihi præ oculis ponitur, & cujus cognoſcuntur tres anguli, & latus unum, facile eſſe aſtri diſtantiam, ad quod triangulum hoc pertingit, invenire; ex quadam enim geometrica demonſtratione, quam ignoro, latera hujus trianguli ſunt inter ſe ut ſinus, quos fortaſſe ignoro, & quos præ oculis non habeo.

OPERIS HUJUS NATURA.

Quæ quum ita ſint, opus adhuc deſiderari nobis viſum eſt, in quo phyſica, & matheſis

ſimul

ſimul in unum conjunctæ ſibi invicem opitularentur. Hic tantum de matheſi, quæ hoc volumine continetur nonnulla ſubiiciemus.

Opus mathematicum intellectu facile, quo tirones nullo magiſtro proprio marte erudiri poſſent, & in quo quidquid ad phyſicæ ſtudium, & ad civilis vitæ uſus neceſſarium eſt, invenirent; quod præterea non ita prolixum eſſet, ut nimio volumine eos deterreret, eaque methodo elaboratum, ut omnes cognitiones utiles perſpicue præberet, ſuperfluis, & nulla utilitate mentem defatigantibus rejectis, adhuc novitatis laudem mereretur. Porro hoc ipſum eſt, quod hoc opere facere ſtuduimus. Satis multi jam oſtenderunt, quo uſque in mathematicis humana mens progredi poſſit: nos oſtendere nitemur, quam pauca hac in re ſcitu neceſſaria ſint, ut quantum ſatis ſciamus. Si quæ in hac ſcientia abſtruſa, & profunda ſunt ad raras, & curioſitatem moventes cognitiones mentem evehere poſſunt; quod in illa ſimplicius eſt ſufficit, ut fere omnes utiles, & neceſſarias cognitiones aſſequamur.

Celebris ille Græcorum ſapiens Socrates nimiam in mathematicis myſteriis perſcrutandis curioſitatem improbare videtur. „ Quum in „ geometria, inquit, ita eruditus ſis, ut agrum „ tuum metiri poſſis, & ita in aſtronomia, ut „ horas, & tempora diſtinguere noveris, ut „ in peregrinationibus, & navigationibus iter „ dirigere aptus ſis, ne ultra ſcire quæras “. Quum ipſe præcipuum hominis ſtudium in morum philoſophia collocandum eſſe arbitraretur, ſapientem a mathematicis ſudiis *erudiri*, *non abſorberi* volebat; At Socrates fortaſſe nimia aſperitate nimiam ad hæc ſtudia propenſionem incuſans, in ſapiente tamen eorum quæ matheſeos elementa dicuntur, cognitionem non probabat modo, verum etiam exigebat: hæc enim ſaltem neceſſaria ſunt, ut agrum certa

cognitione metiaris, ut accurate tempus diſtinguas, ut nullo duce terra, & mari iter facias. Socrates magis ad mores, & ſocietatem animum advertens, quam ad geometriam, definire videtur quouſque mathematicis diſciplinis imbutus eſſe debeat civis, rebus publicis occupatus, literis deditus, miles, phyſicus, uno verbo homo eruditus, qui matheſi tradendæ non ſit addictus. Porro hæ ſunt matheſeos elementa, quæ hoc opere continentur.

Duobus modis mathematicæ propoſitiones demonſtrari poſſunt, ſyntheſi, & analyſi; Euclidis ſcilicet, aut Carteſii methodo. Quum *ſyntheſi* utimur, figuræ concipiuntur, earum formatio, & diſſolutio perpenditur, atque inde earum proprietates deducuntur. Quum *analyſi* utimur, quædam uſurpantur ſupputandi formulæ, quæ figuras jam efformatas ſupponunt, quæ algebræ ope earum formationem, aut reſolutionem exhibent, unde ea emergunt, a quibus earum proprietates exprimuntur. Prima methodus Euclidis eſt (*a*), & veterum geometrarum om-

(a) *Euclides Alexandriæ florebat regnante Ptolemæo primo, ante æram Chriſtianam annis ferme* 300. *Geometricas atque arithmeticas omnes veritates ante ſe inventas collegit, & in unum redegit; hoc præſertim opere Euclides ſibi famam comparavit. Hæc Euclidis elementa (in libros tredecim diſtributa, quibus Hypſicles Alexandrinus decimum quartum minimæ utilitatis adjecit) ſunt fortaſſe præcipua* veritatum ſeries, *quæ unquam ab humanis mentibus prolatæ fuerint. At quoque fatendum eſt, miram hanc veritatum congeriem, in qua ordo, & naturalis idearum progreſſus omnino perturbatus videtur, in qua a compoſito ad ſimplex deſcendimus, in qua ſuperficierum theoria ad linearum theoriam de-*

omnium ; imo ea quoque a Volfio , a Neutono , a pleriſque noſtræ ætatis geometris plurimum commendata ad veritatem lucente ſemita ſemper adducit: eaque ad mentem rite inſtituendam eſt maxime opportuna . Altera methodus , quam Carteſius , & plurimi recentiores geometræ amplexi ſunt , breviori ſane via ad metam adducit; at ea ſemper aliquantum tenebricoſa , nec ita ad mentem illuſtrandam opportuna . *Methodo ſynthetica* paſſim utemur , non ita tamen , ut *analyticam* negligamus, quam non ignorare opportunum, imo ſæpius utiliſſimum eſt. Summus in algebra vir celebris Neutonus ſæpius doluit, teſte Pembertono ejus interprete , ſe nimium cito ad Carteſii geometriam ,

deducit; ubi omnia per vim congeſta videntur, maximam humanis mentibus moleſtiam, ac intollerabile tædium creare. Hoc vitium, ſi quod eſt, Ptolemæus rex Euclidis patronus, & amicus plane ſenſit; ac Euclidem percontatus eſt, faciliori ne via ad matheſim aditus eſſet: Nulla, *inquit audacter Euclides*; Non eſt regia ad matheſim via.

Hæc Euclidis ſententia , cui nonnulli ſummi recentiores geometræ plaudentes ſubſcripſerunt , non vetuit , quominus plerique alii ſummi geometræ, æque profundi , ac celebres aliam viam ab Euclidæa diverſam inirent , atque eandem metam æquiori, ac minus arduo ſtudio aſſequerentur . Ceterum ex tredecim , aut quindecim veteris geometræ libris plures ſunt , qui per hos dies inutiles reputantur ; nempe qui aut in arithmetica verſantur , quæ poſt Euclidem omnino mutata eſt ; ſive in quibus agitur de theoria incommenſurabilium, & de corporibus regularibus; quæ nemo per hos dies curat . Libri inutiles reputati ſunt ſeptimus , octavus , nonus , decimus, decimus tertius.

triam, & ad analyticos recentiorum libros perlegendos tranſiiſſe, quumprimum matheſi operam daret. Noverat ille ſiquidem, methodum ſyntheticam ingenio perficiendo, ac perſuadendo multo analytica aptiorem eſſe; atque hac certe ratione, (Abbas Deidierius (*a*) inquit); etſi plura opera algebrica confecerit priuſquam ſuis *Philoſophia naturalis principiis mathematicis* operam daret; in hoc opere tantum veterum methodum uſurpavit.

Elementa matheſeos, quæ nunc in lucem edimus, tractatus novem continent; quorum quatuor arithmeticam numericam, & ſpecioſam complectuntur, quinque ceteri geometriam. In his ea omnia invenies, quæ matheſeos elementa utilia, ac jucunda exhibent, tum & modum, quo cognitionibus hinc acquiſitis utaris. Methodo, & claritate, qua opus omne pertractavimus, quilibet maturo, & acri ingenio donatus nullo magiſtro tribus ad ſummum menſibus moderato ſtudio ea omnia addiſcere poterit, quæ hoc opere continentur. Si quis qua ratione ſtudium hoc ipſe inire debeat a nobis peteret, ſuaderemus primum, ut arithmeticæ diligenter ſtuderet; ejus præcepta, demonſtrationes, operationes perdiſceret; exempla ſibi proponendo; nec calamo parceret; inde ut ad pro-

---

(a) *In præfatione operis, quod inſcribitur:* Elémens généraux des principales parties des Mathématiques néceſſaires à l'Artillerie, & au Génie. *Quod opus primum editum fuit erratis deformatum, nulloque delectu; at rebus ipſis maximi faciendum; & fortaſſe omnium optimum copioſiſſimum, nitidiſſimum, quæ hactenus in lucem venerint, ad adoleſcentes, ac illi præſertim militaris artis parti operam dantes, a qua obſidionum, pugnarum, imo & regnorum ſors plurimum pendet.*

proportionum tractatum procederet eum nitide percipiendo ad articulum uſque fractionum excluſive. Poſt hæc, ut longimetriam adiret, quæ arithmeticæ tantum, & regulæ aureæ cognitionem ſupponit. Quibus exactis, quum jam matheſeos utilitatem noſcere cœperit aut planimetriæ operam dare, aut regreſſus ceteras arithmeticæ ſpecioſæ partes perluſtrare, quæ impoſterum ſive in geometria, ſive in phyſica, ſine in civili vita uſuvenient.

Trigonometria, quæ in pleriſque auctoribus admodum complicata eſt, & captu difficillima, adeo in hoc opere ſimplex eſt, ut unicum theorema habeat aliquantum intellectu arduum: cetera omnia hujus theorematis conſectaria ſunt. In hoc tractatu *methodum* invenies *communes ſinuum tabulas in ſinuum ſecundorum tabulas transformandi*: quam methodum perutilem a nemine mutuati ſumus.

Ad trigonometriæ triangula reſolvenda ſemper *Tabulis ſinuum* indigemus; propterea illas ad voluminis calcem adjecimus. Quare in unico volumine ea omnia invenies, quæ ad phyſicæ, & matheſeos ſtudium neceſſaria ſint. Qui geometriam, & aſtronomiam profitentur, ut magnas ſupputationes, quibus paſſim indigent, efficiant, tabulis ſinuum logarithmorum tabulas adiectas habent, quibus ſupputationes facilius fiunt. At quibus non eſt ſupputandi frequens neceſſitas, placet tamen aliquando methodo trigonometrica triangulum reſolvere, opportuna eveniet tabula ſinuum, cujus ope facile triangulum reſolvent ſupputatione, in qua aliquanto diutius immorantes, quod intendunt ſine logarithmorum tabulis obtinebunt, & earum uſum addiſcendi moleſtia levabuntur. Ex his quoque tabulis ſinuum omnes habebunt tangentes, & ſecantes, quarum identidem indigebunt, ita accurate, ac in tabulis ſint, in quibus ſumma cura ſupputatæ fuerunt.

In matheſeos ſtudio notabis, totum hujus ſcientiæ artificium in eo ſitum eſſe, ut ignotæ magnitudines ex earum ad notas ratione detegantur: Quare ſcientia hæc eſt præcipue *Scientia rationum*. Notabis quoque, mathematicas demonſtrationes eſſe paſſim genericas: Aſſueſcat itaque mens oportet, quum figuram geometricam in charta deſcriptam intuetur, eam cogitatione aut in cælorum immenſitatem transfere, ubi quoque proprietates omnes in ea demonſtratas ſervabit. „ Conſilium mathematicæ ſtudioſis maxime neceſſarium, quod detur, eſt, inquit Lalandius in præfatione egregii ſui operis de aſtronomia, ut phantaſiam multo magis, quam memoriam exerceant; ut parum legant, multum meditentur; ut ipſi per ſe demonſtrationes inquirant, aut ſaltem quanto frequentius poſſunt ingenii ſui vires experiantur. Hac ratione mens ad matheſim inſtituitur, ac inquirendi voluptas, & inveniendi facilitas comparatur. Corollaria deducenda ſunt, eaque pluribus applicanda; nec in libro quidpiam, ſi fieri poteſt, quærendum, præter eorum, quæ tu ipſe inveneris, confirmationem “.

Id unice hoc opere aſſequi conati ſumus, ut mathematicas diſciplinas magis perſpicuas, atque jucundas, minuſque arduas redderemus. Ad hoc plurima hac de re opera perlegimus; quodque in iis ſimplicius, ac nitidius invenimus, excerpſimus, ut operi huic noſtro id inſereremus. Quare operis hujus methodus, ordo, delectus noſtra ſunt; cetera magna ex parte quoque noſtra ſunt; reliqua ex auctoribus deſumpta, qui in matheſi pertractanda nitidiores viſi ſunt. Nonnullas præcipuas propoſitiones ex his auctoribus aliquoties mutuati ſumus, quas quum opus fuit clarius expoſuimus; parum enim intereſt eas diverſo modo demonſtrare, quum nitide, & ſolide jam demonſtratæ ſunt.

Se-

Septem jam, aut octo ante annos hæc matheſeos elementa elucubrare ſtatueramus; tunc vero ex parte confecimus, & ſpecimen quoddam Veſuntione typis edidimus; unice, ut frequenti auditorum numero elementa hæc inſervirent, quos tunc inſtituti noſtri munere phyſicis, & mathematicis præceptis imbuere tenebamur. Quæ tunc primum mente concepimus ampliora, ac perfectiora reddidimus iis tribus, vel quatuor annis, quos in phyſica noſtra conficienda impendimus; atque illi mathematicum hoc volumen accommodavimus, quod ejus quaſi pars eſt, etſi ſeorſim edatur. Nunc vero ipſum in lucem proferimus, quum quantum licuit illud perficere conati ſimus.

Poteramus quidem nihil a quovis in mathematico hoc volumine mutuari; tunc vero magno incommodo, ac tædio, nulloque majori profectu primo noſtro labori renunciandum fuiſſet, quo quidquid illuſtrius, & magis perſpicuum in optimis auctoribus reperitur excerperamus, & operi, quod meditabamur, accommodaveramus. Maluimus itaque in opere hoc auctoris nomini, & gloriæ renunciare; & veteris laboris partem huic inferere; quod etſi non ſit opus ingenii omnino novum, multo tamen melius erit ſimplici quadam collectione, cui nequaquam ſimile eſt. Collector exſcribit tantum ſæpius nulla methodo, nullo delectu, nec de ſuo profert, nec rebus, quas ab aliis mutuatur, novam lucem, novum aſpectum, novam perfectionem addere nititur, qua aliquo pacto illa ſua fiant: ſi ita non agat, jam non amplius collector eſt.

Speramus fore, ut libri titulus, & præfatio plagiatus a nobis criminationem avertat; is enim plagiarius eſt, qui, non jam Euclidis exemplo alienis inventis utitur, ſed furtim ſibi illa adſcribit, nec unde ſumpſerit indicat. Hic itaque palam fatemur, nonnulla in hoc volumine

mine eſſe theoremata, ac problemata, quæ aut noſtra non ſunt: aut ex parte tantum ſunt. Crimini ne vertetur architecto, ſi quum novi ædificii civibus utilis orthographiam deſcripſerit, ac ædificium extulerit illi columnas, aut egregias ſtatuas aliquas inſerat, quæ antea præclaris aliis ædificiis inſervierant? Profecto nos huic architecto ſimiles eſſe vellemus.

Perfecta matheſeos elementa, qualia edere nobis propoſuimus, clara methodo pertractata, atque invicem colligata opus erunt, in quo perficiendo plurimum ſemper erit negotii. Si nos illud perfeciſſe ſperare non audemus; ſaltem confidenter dicere poſſumus, nihil nos omiſiſſe, quo ad perfectionem propius accedreremus. Hoc noſtro labore mens nobis fuit, primum matheſeos ſtudium facilius reddere; deinde phyſicæ ſtudioſis, quibus potiſſimum laboravimus, inſervire, iis ſimplici, contracta, ac clara methodo principia omnia mathematica exhibentes, quæ illi ſcientiæ affinitatem habent; ea clarius explicare conati, quæ in quibuſdam auctoribus ita abſtruſa ſunt, ut illi ſapientibus tantum ſibi ſimilibus ſcribere videantur.

Hoc volumine, quod veluti phyſicæ noſtræ pars eſt, ab ipſa tamen ſejunctum eſt, tantum immenſa matheſeos ſpatia oſtendimus, & patefacimus. Ingenium excitatum in ſe ipſo vires inveniet, quibus illa percurrat, fortaſſe etiam dilatet; nitro ſimile, quod inflammabile natura, aut ars effecerit: illud ſcintilla excitat, & ſubita accenſio intimam ejus vim expandit, quæ veluti iners, & ſepulta jacebat.

Proſpectus hiſtoricus, qui originem, & variarum matheſeos partium progreſſus ob oculos poneret præfationem hanc opportune concluderet; at tunc laude præcipua, brevitate ſcilicet, illa careret. Qui plura hac in re cupiat egregiam, atque eruditiſſimam adeat matheſeos hiſto-

ſtoriam, auctore Montucla; ibi ampliſſimas hac de re cognitiones aſſequetur; quum hiſtoria illa jucundior, atque utilior ſit, quam illæ ſint, in quibus ſanguinolenta bella, & diræ nationum viciſſitudines deſcribuntur; in his enim regum iræ, & populorum infortunia leguntur; in illa ingenii progreſſus, & inventa recenſentur.

NOTÆ.

Hoc *elementorum mathematicorum volumen* aut ſimul cum opere phyſico vendetur, aut ſeparatim; poteſt enim ſejungi; & ipſum per ſe integrum opus eſt.

In *theoria entium ſenſibilium* pars phyſica a parte mathematica pendet; at pars mathematica etſi parti phyſicæ accommodata, ab illa tamen re ipſa non pendet. Quare opus hoc mathematicum ipſum per ſe, & ſolitarium, opus eſt in ſuo genere completum; & a voluminibus phyſicis ſejungi poteſt.

Mirabitur fortaſſe quiſpiam primo intuitu, tria hæc opera, *Metaphyſicam*, *Phyſicam*, *Matheſim*, ſingula exiguis voluminibus contineri, quum immenſa ſit rerum copia, quam complectuntur. Verum admiratio ceſſabit, quum animadvertetur, quod alibi monuimus, in operibus ingenii prolixitatem plerumque aut a temporis anguſtia, aut ab ingenii tenuitate prodire; qua non licuit multa paucis complecti. Opera conciſa, & accurate elucubrata ſemper acuto ingenio præditis ſatis longa ſunt: iis vero, qui ingenio hebetes ſunt, illa prolixa reddere eſt oleum, & operam perdere. Tria hæc opera phi-

philoſophiam univerſam efficiunt, qua nulla magis completa, ac meliori methodo diſpoſita hactenus ulla lingua edita fuit.

Phyſica, & metaphyſicam noſtram, & matheſim ſibi affines, & alligatas agnoſcit. Nulla enim, ut quiſque novit, phyſica eſt, ſine aliqua metaphyſicæ, & matheſeos cognitione. In phyſicæ noſtræ tractatibus prioribus plura ſunt, quæ ad ſequentes tractatus referuntur. Non tamen propterea putes, priorum tractatuum ſtudium tunc intermittendum eſſe, ut numeros in ſequentibus citatos perlegas: tantum iis numeris indicare volumus ea, quæ in primis tractatibus leguntur alias phyſicę partes reſpicere, quarum demonſtrationes ſuo tempore invenientur. Idem quoque de matheſeos volumine dicendum.

In hoc volumine mathematico, ut & in phyſicis aliquando figuræ deſcriptæ, & inciſæ ſunt non juxta picturæ præcepta; ſed pro rerum demonſtrandarum, aut explicandarum natura, ut facilius tironis mens, & oculus rem arriperet & clarius quæ explicantur intelligeret.

ARITHMETICÆ, ALGEBRÆ, ET GEOMETRIÆ PRINCIPA SIVE MATHESEOS ELEMENTA

PROLEGOMENA.

QUANTITAS DISCRETA, ET CONTINUA.

1. DEFINITIO I. Matheſis ſcientia eſt quantitatem quatenus menſurabilem conſiderans.

I. *Quantitas*, ſeu *magnitudo* (ſynonima enim hæc ſunt) dicitur quidquid ut partibus conſtans concipi poteſt, quidquid augeri poteſt, aut minui; ut extenſio, motus, tempus, numeri. Quantitas diſcreta eſt, aut continua.

II. *Quantitas diſcreta* dicitur collectio partium inter ſe ſejunctarum, quæ potius totidem tota ſunt, quam unius totius partes; exempli cauſa, tritici, aut arenæ cumulus.

III. *Quantitas continua* dicitur, cujus partes invicem conjunctæ ſunt, & unum totum efficiunt, ut virga, marmor.

IV. Quantitas diſcreta ſeu partibus ſejunctis conſtans, *numeris* exprimitur: hæc arithmeticæ objectum eſt. Quantitas continua, ſeu partibus conjunctis conſtans, *extenſio* dicitur; hæc geo-

geometriæ objectum eſt. Quare arithmetica, ſeu ſcientia numerorum, & geometria, ſeu ſcientia extenſionis, univerſas mathematicas diſciplinas complectuntur.

2. NOTA I. Quantitates diſcretæ, quæ ad arithmeticam ſpectant, conſiderari poſſunt aut in ſe ipſis, aut in ſuis relationibus; ſicuti vero ſimul hæ quantitates conferri poſſunt, ita & earum relationes invicem conferri poſſunt. Quantitates hæ eſſe poſſunt aut determinatæ, aut indeterminatæ; earum relationes eſſe poſſunt omnes notæ, aut aliæ notæ, aliæ ignotæ. Hinc objectum quatuor partium arithmeticæ.

I. *Quantitates diſcretæ determinatæ* illæ ſunt quæ hanc potius, quam aliam quantitatem deſignant hujuſmodi eſt numerus 8, qui quantitatem ſignificat octo partibus conſtantem potius, quam tribus, ſeptem, aut novem. Has *arithmetica* conſiderat.

II. *Quantitates diſcretæ indeterminatæ* illæ ſunt quæ quantitatem exprimunt non potius hanc, quam illam. Hujuſmodi eſt litera, ſeu quantitas *a*, quæ nihil definitum ſignificat, non potius, quam menſuram, hexapedam, pollicem, numerum 10 potius, quam 1000. Has algebra conſiderat.

III. Quantitates diſcretæ determinatæ, aut indeterminatæ *relationes* inter ſe habere poſſunt notis terminis expreſſas; & tunc has relationes ſimul confert *analogia*, ſeu *theoria proportionum*.

IV. Quantitates diſcretæ determinatæ, aut indeterminatæ inter ſe *relationes* habere poſſunt, quarum aliæ notæ ſint, aliæ ignotæ, harum vero comparatio ad analyſim ſpectat.

Quæ quum ita ſint, Arithemetica, algebra, proportiones, & analyſis id omne complectuntur, quod ad ſcientiam numerorum ſpectat. Porro iſta in prima hujus operi parte pertractabuntur. Iis vero, qui numerorum ſcientiam appri-

prime cupiunt, conſilium do, ut calamo non parcant, ſed ſibi exempla proponant, quibus præcepta eorum, quæ tenaciter memoriæ mandare volunt, menti altius infigant.

3. NOTA II. *Quantitas continua*, ſive extenſio, quæ ad geometriam ſpectat, eſſe poteſt aut ſimplex linea latitudine, & profunditate carens; aut ſuperficies profunditate carens, aut ſolidum longum, latum, & profundum. Sunt hæc objecta *longimetriæ*, *planimetriæ*, *ſtereometriæ*, & tandem *trigonometriæ*; ut fuſius initio ſæcundæ partis explicabimus.

MATHESIS PURA, ET MIXTA.

4. DEFINITIO II. Matheſis in puram, & mixtam paſſim dividitur.

I. *Matheſis pura* quantitatem conſiderat tantum ut quantitas eſt, nulla ad ſenſiles, & phyſicas qualitates relatione.

II. *Matheſis mixta* quantitatem conſiderat ut ſenſilibus qualitatibus inſtructam; cujuſmodi eſt motus, firmitas, fluiditas, elaſticitas, gravitas, aliaque hujuſmodi.

Verum matheſis mixta re ipſa tantum eſt puræ matheſeos applicatio, ſive arithmeticæ, & geometriæ peculiaribus objectis; exempli gratia, accelerationi gravium, motui aſtrorum, legibus percuſſionis, & æquilibrii, ſoni, & lucis proprietatibus, aliiſque ſimilibus.

QUANTITATES COMMENSURABILES, ET INCOMMENSURABILES.

5. DEFINITIO III. Arithmeticæ, & geometriæ finis eſt dimetiri. Quærere quoties quantitas minor nota in majori contineatur id eſt, quod *metiri* dicitur.

Quare longitudinem metiri eſt minorem notam longitudinem, uti hexapedam, aut pedem illi

illi applicare, ut quoties hæc in illa contineatur innoteſcat; tunc vero dicitur hæc longitudo tot hexapedas, aut pedes longa eſſe. Quantitas hæc minor, quæ datis quibuſdam vicibus ſumitur, *menſura* dicitur; quantitas major, cui menſura adhibetur, dicitur *magnitudo*.

6. DEFINITIO IV. Quum nota eſt ratio menſuræ ad magnitudinem, magnitudo dicitur *commenſurabilis*; quum vero accurata inter utramque ratio inveniri nequit, magnitudo dicitur *incommenſurabilis*.

I. *Pleraque magnitudines ſunt inter ſe commenſurabiles.* Exempli gratia, 10, & 3 ſunt magnitudines commenſurabiles; minor enim ter ſumpta cum triente alteri æqualis eſt. Ita 99, & 10 ſunt magnitudines commenſurabiles; minori enim novies ſumpta, cum nona ejus parte, habebimus magnitudinem alteri æqualem; atque ita de ceteris.

II. *Dantur magnitudines inter ſe incommenſurabiles*, ita ut nulla minoris quantitatis pars aſſignari poſſit, quæ datis vicibus ſumpta quibuſcumque majorem accurate adæquet nullo exceſſu, aut defectu. Exempli gratia, magnitudo 2, & magnitudo, quæ in ſe ducta efficeret productum 2, ſunt quantitates incommenſurabiles. Hæc enim, quæ eſt radix 2, non eſt $1 \frac{5}{10}$; nimis enim magna hæc eſt: non $1 \frac{4}{10}$, quæ nimis parva eſt: ſed eſt *numerus ſurdus* inter hos duos, $1 \frac{5}{10}$, & $1 \frac{4}{10}$; qui numerus neque eſt dimidium, neque triens, neque quadrans, neque pars centeſima, aut milleſima, aut centies milleſima, aut pars quævis aſſignabilis magnitudinis dimetiendæ (216). Quare quum duæ magnitudines incommenſurabiles invicem conferuntur, ſemper *differentia ſurda* invenitur, & inexprimibilis inter menſu-

ſuram, & partem quamvis dimetiendæ magnitudinis.

TEMPORIS, EXTENSIONIS, PONDERUM MENSURÆ.

7. OBSERVATIO. Quum matheſeos finis ſit quantitates *metiri*; variæ menſuræ dignoſcendæ ſunt, ſive naturales, ſive ab hominibus inſtitutæ, quibus quantitates diſcretæ, & continuæ æſtimantur. Temporis menſuræ ſunt naturales a natura datæ, & omnibus notæ. Non ita obviæ ſunt ponderis, & extenſionis menſuræ; nullum enim corpus natura parit dati ponderis, aut voluminis, quod menſura diverſis nationibus communis eſſe poſſit. Exempli cauſa:

Facile poſſum Pariſiis Pekinum ſcribens Sinenſi homini ſignificare quid nomine *anni tropici aſtronomici* intelligam; addens eſſe hunc tempus integræ veræ, aut apparentis ſolis revolutionis in Zodiaco, numerare incipiendo ab inſtante, quo centrum ſolis eſt in interſectione eclipticæ, & æquatoris vere, donec centrum ſolis ſit iterum in eadem interſectione vere ſequenti. Facile quoque poſſum illi ſignificare quid intelligam nomine *diei naturalis*; ſcribens, eſſe tempus revolutionis veræ, aut apparentis ſolis circa tellurem, initium faciendo a tranſitu centri ſolis per meridianum cujuſque loci uſque ad reditum ejuſdem centri ad eundem meridianum. Facile quoque illi ſignificabo quid *hora* nomine intelligam; eſt enim hæc vigeſima quarta pars diei naturalis; quid nomine *minuti*, quod eſt ſexageſima horæ pars; quid nomine *ſecundi*, quod eſt ſexageſima minuti pars; quid nomine *tertii*, quod eſt ſexageſima ſecundi pars; atque ita de ceteris.

At ſi Sinenſi ſignificare velim quid intelligam

gam quum leucam dico, aut hexapedam; quum quintale dico, aut libram; qua via procedam neſcio, ut quæ mente concipio illi exponam; modo menſuram meam, aut certam ejus partem ipſe non habeat, nec ego ad illum mittam. Duas tantum in natura magnitudines agnoſco, quæ terminus comparationis mihi eſſe poſſint, quibus illi indicare poſſim quid *hexapeda* nomine intelligam; altera eſt extenſio gradus meridiani terreſtris; altera longitudo penduli quovis ſecundo oſcillantis. Non itaque abs re erit binas has magnitudines indicare, a quibus univerſalis extenſionis menſura obtineri poteſt.

MENSURA UNIVERSALIS EXTENSIONIS.

ARCUS GRADUS UNIUS IN TERRESTRI MERIDIANO.

I. *Arcus gradus unius* meridiani terreſtris Pariſios inter, & Ambianum ad latitudinem 49°, 23′ extenſionem obtinet hexapedarum 57072 (*Phyſ.* 1368.). Scribam igitur Sinenſi, hexapedam, de qua quæſtio, menſuram eſſe, ſive extenſionem longam, quarum arcus unius gradus meridiani terreſtris ad Pariſiorum latitudinem continet 57072; ſive *hexapedam* eſſe hujus arcus partem quinquageſimam ſeptimam milleſimam ſeptuageſimam ſecundam. Sinenſis hic accurate arcum unius gradus in meridiano terreſtri ad latitudinem 49°, 23′ dimetiatur; menſura, quam inveniet, Pariſienſi menſuræ æqualis erit, & hujus pars quinquageſima ſeptima milleſima ſeptuageſima ſecunda erit mea hexapeda.

PEN-

PENDULUM SINGULIS SECUNDIS OSCILLANS.

II. Facilius, ac tutius utar *pendulo ſingulis ſecundis oſcillante*, ut Sinenſi Gallicas menſuras indicem, exempli cauſa, pedis, qui hexapedæ ſextans eſt. (*Fig.* 119.)

Sit P globus plumbeus, aut cupreus, cujus diameter ovi diametro proxime æqualis ſit; ſi quid enim diameter excedat, aut deficiat, nihil obeſt. Globus hic per centrum ita pertuſus ſit, ut per foramen trajici poſſit filum ex aurichalcho rectiſſimum, ac tenuiſſimum AOQ indeterminatæ longitudinis. Superior fili extremitas annulo ſolido, & optime lævigato A alligetur, qui exiguo cylindro horizontali lævigatiſſimo, & plano verticali infixo inſeratur, puta parieti, aut tabulæ, ita tamen, ut ſatis extra planum emineat: annuli diameter aliquanto major eſſe debet diametro cylindri, cui inſeritur, ne ab affrictu annuli evolutiones retardentur. Inferior fili pars Q per globi diametrum tranſiens, & foramen, quo traiicitur, ferme replens, ſtatuetur in O, aut in P, aut in Q ad indeterminatam a puncto A diſtantiam claviculo in inferius foraminis orificium immiſſo. Inſtrumentum hoc AP ita diſpoſitum, & plano verticali ſuſpenſum, ita tamen, ut illud non tangat, erit *pendulum ſimplex*. Reliquum eſt, ut ad ſecunda indicanda componatur. Rotæ *RustuS* hic non attenduntur; ſpectant enim ad pendulum compoſitum, de quo infra.

Globus P filo AP ſuſpenſus, & ſuæ gravitati relictus ſeſe ſtatuit in directione perpendiculari AP, quæ in plano nigra linea notanda erit. At ſi globus P a perpendiculari abducatur, puta in B, & deinde ſibi relinquatur; deſcendet ex ſua gravitate a B in P; tum ex motu

motu ſuo accelerato a P in C aſcendet: arcus percurſus BC ejus *prima vibratio*, aut oſcillatio eſt. Deinde ex C deſcendet in P ex gravitate; & ex motu accelerato a P in *m* aſcendet: arcus percurſus C*m* eſt ejus *altera vibratio*. Iterum ab *m* in P deſcendet, & a P aſcendet in *n*: arcus percurſus *m n* eſt ejus *tertia vibratio*. Subinde ab *n* ad *r* tranſibit, & ab *r* ad *s*: eſt hæc ejus quarta, & quinta vibratio; atque ita porro uſque ad motus omnis extinctionem, qui durare poteſt 12, 15, 20, 24 horas, arcus ſemper minores deſcribendo.

Galilæus primus obſervavit, *vibrationes ejuſdem penduli, ſi parum extenſæ ſint, eſſe omnes iſochronas*; exempli cauſa, vibrationem minimam *r s* eodem ipſo tempore fieri, quo major *m n*, quo adhuc major BC; verum *vibrationes duorum pendulorum longitudine inæqualium non eſſe iſochronas*; & brevius pendulum A O breviori tempore ſingulas vibrationes ſuas iſochronas conficere, quam longius A Q ſuas conficiat; atque duo pendula eodem temporis inſtante ad motum excitata *intra tempus datum vibrationum numerum efficere, qui eſt in ratione ſubduplicata inverſa longitudinum pendulorum*: hoc eſt dato tempore, puta, hora, numerum vibrationum penduli A O 16 pollices longi eſſe ad numerum vibrationum penduli A Q 36 pollices longi; ut 6 radix quadrata 36 eſt ad 4 radicem quadratam 16; atque ita porro. Hæc Galilæi obſervatio theoriæ motus accelerati apprime conſentanea eſt, quam ipſe recens creaverat, & demonſtraverat (*Phyſ.*363.); novoque hoc ſuo invento templorum altitudinem metiebatur, numerum vibrationum lampadum e fornice ſuſpenſarum comparans numero vibrationum eodem tempore a pendulo notæ longitudinis effectarum.

Quum experientia conſtet numerum vibratio-

tionum penduli dato tempore, puta, uno minuto, aut hora una, eo majorem eſſe, quo pendulum brevius eſt; atque eo majorem, quo pendulum longius; jam ut pendulum A P accurate ſingulis ſecundis oſcillet, tantum elevandus, aut demittendus eſt globus P, donec, præciſe ſingulis minutis 60 vibrationes conficiat, ſive 3600 hora una. Experimentis ferme per ſæculum hac de re peractis conſtat, pendulum ſimplex AP ut exacte vibrationem efficiat uno ſecundo, Pariſiis longum eſſe debere pollices 36, lineas 8 $\frac{52}{100}$; ad æquatorem ad maris ſuperficiem pollices 36, lineas 7 $\frac{7}{100}$; Pelli in Laponia pollices 36, lineas 9 $\frac{17}{100}$; ad promontorium Bonæ Spei pollices 36, lineas 8 $\frac{7}{100}$. Longitudo hæc penduli pro latitudinum diverſitate varia eſt; at in eadem latitudine conſtans eſt; poteſt itaque eſſe menſura univerſalis, quæ ab omnibus populis intelligatur; tantum ad hoc penduli longitudo perpendenda eſt.

Hæc *penduli* A P *longitudo* eſt diſtantia intercepta inter punctum ſuſpenſionis annuli A cylindro, & centrum percuſſionis, ſeu oſcillationis in globo P ſumptum. Centrum hoc percuſſionis, aut oſcillationis non eſt ipſum centrum globi P, ſed punctum aliquanto inferius, quod hac analogia invenietur: longitudo fili a puncto ſuſpenſionis ad ſuperiorem diametri globi eſt ad globi radium; ut duæ quintæ partes radii globi ad quartum terminum, qui exprimet quantitatem, qua *centrum oſcillationis* centro globi P inferius eſt. Ponamus fili longitudinem inter punctum ſupenſionis, & ſuperiorem globi ſuperficiem eſſe linearum 435; radium globi eſſe linearum 5, quarum duæ quintæ partes ſunt lineæ duæ: præcedens pro-

portio erit: 435: 5 :: 2 : $x = \frac{10}{455}$ unius lineæ; hoc eſt; centrum oſcillationis erit infra globi centrum quantitate æquali partibus decem ex 435, in quas linea diviſa ſit.

Facile modo mihi erit Sinenſi, de quo agimus, ſignificare quid nomine unius pedis intelligam. Sinenſis iſte ad latitudinem graduum ferme 48, 50', & ad modicam a mari altitudinem pendulum conſtruat deſcripto ſimile, & quod Pariſiis accurate oſcillans ſuppono: ſi jam penduli Sinenſis longitudo dividatur in partes æquales 881, pars quælibet illud erit, quod ego dico lineam dimidiam; 288 ex his partibus id efficient, quod dico pedem, qui ſexta pars eſt Gallicæ hexapedæ.

Quum demum Sinenſis intellexerit quid ego longitudine unius pedis ſignificem, facile quoque illi quid *pondere unius libræ* intelligam ſignificabo. Scribam enim pondus unius libræ eſſe ſeptuageſimam partem ponderis pedis cubici aquæ pluviæ; milleſimam trecenteſimam ſeptuageſimam quintam partem ponderis pedis cubici auri puriſſimi, nullo alio metallo commixti. (*Phyſ.* 644.)

PENDULUM AD SECUNDA COMPOSITUM.

III. Pendulum ſimplex modo deſcriptum tempori accuratiſſime dimetiendo opportunum eſt in non diuturnis obſervationibus. At quum maxime incommodum eſſet vibrationes numerare, & ejus motum perſeverans efficere, parum utilitatis phyſica, & aſtronomia ab hoc inſtrumento cœperant; quum celebris Hugenius Belgii decus, & inter ſummos ſuperioris ſæculi viros recenſendus illud horologiorum motui dirigendo adhibere inſtituit. In geometria æque, ac in mechanicis eruditiſſimus horologium conſtruere molitus eſt, in quo pendu-

dulum rotarum motum moderaretur, & celeres excurſus vetans, illum efficeret maxime uniformem. Porro hujuſmodi machina ita conſtruitur. (*Fig.* 119.)

Sit A P lamina ferrea ſolida, ad cujus extremitatem ſuſpendatur pondus P. Eſt hoc gravis lens a duabus ſphæræ ſegmentis ex aurichalcho ſimul conjunctis effecta, & in medio perforata ad ferream laminam admittendam. Lamina hæc mobilis eſt ſupra fulcrum A in parte ſua ſuperiori, & in inferiori deſinit in cochleam ſua cochlea fœmina inſtructam, qua lens attolli, & demitti poſſit. Pendulum, quod hic eſt lamina ferrea, cui pondus in inferiori parte appenſum eſt, parte ſua ſuperiori *a* ſupra punctum A eminente motum alternum communicat axi duobus uncis inſtructo *t v*, *r s* ita diſpoſitis, ut ſingulis vibrationibus unicum abire ſinant dentem rotæ R, cui inſeruntur (*a*). Nequit ergo rota hæc motum habere, niſi æque uniformem, ac habeat pendulum ipſum. Quum vero ex ejus motu motus omnium

(*a*) *Non contendimus uncorum r s, t v poſitionem eam eſſe debere, quam in figura exhibemus; tantum phyſicum machinamentum indicare volumus hujus inſtrumenti, in quo unci ad artificum voluntatem aptius collocabuntur. Unci ſupponuntur mobiles circa punctum fixum S. Rota R ſupponitur duos habere dentium ordines, quorum alter inſeratur unco r, alter unco v ita, ut quum dens r elabitur, dens v in obſtaculum, a quo detinetur, incurrat; & vice verſa. Supponimus quoque, quum dens elabitur, rotam R elaſterio motum indere, a quo exiguus impulſus uniformis ingeratur parti ſalienti a A penduli, unde iſta in partem oppoſitam exacta oſcillationi impellatur.*

rotarum pendeat, quarum partes invicem, & rotæ huic inſeruntur, debent rotæ omnes ita, ut pendulum, uniformiter moveri. Præterea rota RS actione penduli, aut elaſterii, a quo movetur, aliquantum nititur in pendulum, & eandem ferme illi motus quantitatem communicat, quam in quavis vibratione ex reſiſtentia aeris, & ex affrictu amittit; quare non modo pendulum horis 24 movetur, ut ſine hoc impulſu moveretur, ſed ſiſti nequit, niſi quum machinæ pondus, aut elaſterium amplius non aget. Si huic machinamento addatur malleus craterem æneum quavis vibratione percutiens iſochrona, & uniformi BC, habebitur *pendulum ad ſecunda compoſitum*, quo paſſim aſtronomi utuntur. Hoc re ipſa eſt præclarum Hugenii inventum, quod ſubinde maximo ingenii acumine explicavit in ſuo opere, qui inſcribitur: *Horologium oſcillatorium*; & quod magna laude ab omnibus Europæ eruditis hominibus, ac artificibus exceptum fuit.

Reliquum modo eſt, ut menſuras diligenter indicemus, quarum tum in rebus phyſicis, tum in mercatura, ac vita civili frequens eſt uſus,

MENSURÆ TEMPORIS.

IV. *Annus ſolaris*, qui tempeſtates diſtinguit, conſtat diebus 365, horis 5, minutis 48, ſecundis ferme 44. (*Phyſ.* 1137.)

Dies medius (*Phyſ.* 1326) conſtat horis 24; hora minutis 60; minutum ſecundis 60; ſecundum tertiis 60; tertium quartis 60. Quare dies medius conſtat minutis 1440, ſecundis 86400, tertiis 5184000. Hora conſtat ſecundis 3600, tertiis 216000: minutum tertiis 3600.

In aſtronomicis, & chronologicis ſupputationibus ſæpius certa temporis menſura indigemus, ad quam diverſæ veterum, & recentiorum nationum epochæ referri poſſint; ceterum

tum in quavis chronologia ſolitaria ad quid hæ epochæ referantur ignoramus.

UNIVERSALIS MENSURA TEMPORIS.

Joſephus Scaliger propterea celebrem periodum Julianam excogitavit, quæ in chronologia (*a*) eſſet univerſalis menſura temporum, cui ceteræ compararentur. Eruditi hanc periodum magno ſtudio amplexi ſunt; & magnæ nationum epochæ ad primum hujus periodi annum a celeberrimis chronologis, & præſertim a docto Jeſuita Petavio referuntur.

Periodus Juliana eſt productum trium notiſſimorum cyclorum, ſolaris ſcilicet, lunaris, & indictionis; ſive numeri 28 in 19, & 15 ducti; decurſus nempe annorum 7980, in quo idem numerus ex tribus cyclis obtineri non poteſt; quo tamen exacto redeunt cycli eodem ordine. Initium periodi Julianæ eſt anno ipſo 4713 ante æram Chriſtianam calendis Januarii; ſive creatio hanc idealem epocham præceſſerit, ſive ſubſequuta fuerit. Quare annus 4713 ante æram Chriſtianam primus periodi Julianæ annus eſt. Ut ſcias cui anno periodi Julianæ reſpondeat *annus datus poſt Chriſtum natum*, ſatis eſt addere 4713 ſummæ anni dati, puta, 1772; & habebimus annum periodi Julianæ dato æræ Chriſtianæ anno reſpondentem. Ita quoque, ut invenias ad quem annum periodi Julianæ *datus ante Chriſtum annus* referatur; puta annus 747; a 4714 ſubduc datum annum 747: reſiduum 3967 annum periodi Julianæ indicabit, ad quem datus annus refertur.

(a) *ETYMOLOGIA. Periodus; revolutio, circuitus; a ὁδος, circum, & περὶ, via, quaſi via in circuitum, ſeu via in ſe rediens.*

In chronologia certitudo ferme cum æra Olympiadum incipit : quidquid præcedit ſive in hiſtoria ſacra, ſive in prophana incertum eſt. In adjecta tabulæ præcipuas epochas ad periodum Julianam relatas exhibebimus; hæc a currente ad primum Olympiadum annum ad Petavii, & Boſſueti chronologiam a docto Lalandio in ſua aſtronomia approbatam accurate exarata eſt. In ea prophanas epochas ante Olympiadas non recenſebimus, exempli gratia, Trojam captam, & Argonautarum expeditionem; neque enim certitudine gaudent. Boſſuetus Trojam captam ſtatuit ad annum 1184 ante æram Chriſtianam. Neutonus Argonautarum expeditionem Trojæ captæ anteriorem ſtatuit tantum annos ferme 900, aut 936 ante æram Chriſtianam. Sane Neutoni chronologia a VViſtono, Frereto, Maraldo, ac plerique aliis eruditis viris impugnata fuit; at enimvero quid hic ſententiarum conflictus, niſi rerum incertitudinem probat? Sinenſes, & Indi nullam certam epocham æræ Olympiadum ſynchronam, aut anteriorem habent; ante hæc tempora apud ipſos, ut & apud Græcos, Ægyptios, & Babylonios tenebræ tantum, & incertitudo. In hac tabula æra Nabonaſſaris, ad quam maximi antiquitatis aſtronomi Hyparchus, & Ptolemæus obſervationes, & ſupputationes ſuas retulerunt, peculiari animadverſione digna eſt.

Pro *ſacris epochis* æram Olympiadum præcedentibus nos in hac tabula ipſam ſacrorum librorum chronologiam ſequuti ſumus, quæ nec Boſſueti, nec Petavii chronologiæ ſemper conſona videtur. Horum primus creationem ſtatuit annis 4004, alter annis 3983 ante æram Chriſtianam. Hanc chronologiam, quam a dedicatione templi Salomonis ad creationem uſque deſcribimus, invenies in ſacris documentis, quæ in altera tabula indicamus; nempe

pe in variis polyglottis (*a*), in quibus habetur & verſio hebraica Judæorum literis Chaldaicis exarata, & verſio Græca ſeptuaginta interpretum, & verſio Hebraica Samaritanorum antiquis literis Hebraicis, cum earum reſpectiva latina verſione. In primis duabus epochis tabulæ ſecundæ ſatis eſt ſimplici additione in unum colligere annos Patriarcharum, quo tempore filios procrearunt ab Adamo ad Iſaaccum (*Phyſ.* 530): ſumma erit annorum numerus a creatione ad diluvium, & ab hoc ad Abrahami vocationem elapſorum; qua vocatione populus electus incipit, & quæ contigit anno hujus patriarchæ ſeptuageſimo quinto, annis vigintiquinque ante Iſaaccum natum. Tertia, & quarta epocha hujus tabulæ in allatis ſacris monumentis ſupputatæ inveniuntur; poſtremæ duæ, ſi quod chronologicum diſcrimen eſt inter Hebraicam, & Græcam verſionem, hoc chronologorum ferme omnium exemplo præterimus. In prima tabula varias epochas ſacras ad periodum Julianam referentes juxta vulgatæ, & ſeptuaginta interpretum chronologiam, non inficiabimur, ſi ex his chronologiis alterutra admittenda eſſet, nos ſeptuaginta interpretibus manus daturos.

In prima tabula nihil dicimus de chronologia Samaritanorum, quæ & a vulgatæ, & a ſeptuaginta interpretum chronologia diverſa eſt; minus his enim nobis certa videtur. In chronologia Samaritana, ſive in chronologia Pentateuchi deſcripta lingua, & literis Hebraicis a ſchiſmaticis Samaritanis Adamus

 (*Phyſ.*

(a) *ETYMOLOGIA. Polyglotta: opus pluribus linguis conſcriptum: a* πολὺς, multus, *&* γλῶττα, lingua. *Vox hæc unice ſacris Bibliis attribuitur.*

(*Phyſ*. 530.) genuit anno 130; Seth anno 105; Enos 90; Cainan 70; Malaleel 65; Jared 62; Henoc 65; Mathuſalem 67; Lamech 53 Noe 500; Sem 100; Arphaxad 135; Sale 130; Heber 134; Phaleg 130; Reu 132; Sarug 130, Nachor 79; Thare 70; Abraham 100; Iſaac 60. Si ſupponamus, primis temporibus Hebræos, & Samaritanos librarios patriarcharum ætatem deſcripſiſſe, qua patriarchæ filios procreabant, literis ſuis elementariis (14. III.); patet, literam alteri ſubſtitutam huic chronologico diſcrimini locum dare potuiſſe.

Æra dicitur annorum numerus incipiens a magno quodam eventu. Hujuſmodi eſt æra Chriſtiana, cujus epocha eſt Chriſti nativitas. Hic tamen cum pleriſque eruditis animadverte, veram Chriſti nativitatem uno aut altero anno ante chriſtianam æram videri collocandam.

T A-

TABULA PRIMA CHRONOLOGICA.

Epochę præcipuæ juxta vulgatam.		Anni periodi Julianæ.	Anni ante Chriſtum natum.		Epochæ primitivæ, juxta ſeptuaginta interpretes
		- - -	- - -		
		639	5353	*	Creatio *præcedens periodum Julianam annis 639.*
		- - -	- - -		
		2	4715		
Initium periodi Julianæ.		1	4714		
	*	- - 1	4713		
		2	4712		
		- - -	- - -		
Creatio.	*	718	3996		
		- - -	- - -		
		1148	3119	*	Diluvium.
Diluvium.	*	- - -	- - -		
		2374	2340		
Vocat. Abrah.	*	- - -	- - -		Vocatio Abrahami.
		2806	1914	*	
Exitus ab Ægypto.	*	- - -	- - -		
		3230	1480	*	*Tempora heroica.*
Dedic. Templi Salomon.		- - -	- - -	·	
	*	3710	1004	·	Græcorum.
		- - -	- - -	·	
		3937	777	*	*& Ægyptiorum.*
Æra Olympiadum.	*	3938	776		
		- - -	- - -		Petavius. *Doctrina temporum*
Roma condita	*	3961	753		Boſſuetus. *De hiſtor. univeſali.*
Æra Nabonaſſaris.		- - -	- - -		
	*	3967	747		Lalandius. *Aſtronom.* Tom. II. pag. 324, & 328, edita 1777.
Libertas Jud. a Cyro data.		- - -	- - -		
	*	4178	539		
Alexandri obitus.		- - -	- - -		
	*	4390	324		
Carthago capta a Scipione		- - -	- - -		
	*	4492	202		
		- - -	- - -		
		4711	3	·	Vera Nativitas Jeſu Chriſti.
		4712	2	·	
Æra Chriſtiana.		4713	1	·	
	*	4714	1	*	Anni a Chriſti nativitate.
Æra Mahumetana.		- - -	- - 1		
	*	5335	622		
		- - -	- - -		
		6485	1772	*	Annus præſens.

TABULA SECUNDA CHRONOLOGICA.

Epoche.	Chronologica Sacrorum bibliorum.	Verſionis Hebraicæ.	Septuaginta interpret.	Samaritanorum.	
I.	A creatione ad Diluvium.	1656	2234	1307	Gen. 5.
II.	A Diluvio ad vocationem Abrahami.	426 (*)	1245	1040	Gen. 5. 12.
III	A vocatione Abrami ad exitum ab Egypto.	430	430	430	Exod. 12.
IV.	Ab exitu ab Ægypto ad dedicationem Templi.	480	440	III. Reg. 6.	
V.	A dedicatione Templi uſque ad libertatem a Cyro reſtitutam.	468	468		
VI.	A libertate reſtituta ad Chriſtum natum.	536	536	Boſſuetus. *De hiſtoria univerſali.*	
	SUMMA.	3596	5353		

A Diluvio ad Chriſtum natum juxta Hebraicam, & vulgatam anni 2340; juxta ſeptuaginta, anni 3119; differentia a creatione ad Chriſtum natum, annorum 1357. a Diluvio ad Chriſtum natum, annorum 779, vel 830d

(*) NOTA. Genealogia patriarcharum a Diluvio ad vocationem Abrahami præbet tantum juxta Hebraicam, & vulgatam annos 365 (*Phyſ.* 530). Si addas annos ferme 60 pro ætate Cainam in Hebraica verſione omiſſi, & in Samaritana, & in ſeptuaginta interpretum verſione, & in Evangelio Lucæ reſtituti; ſive hanc epocham ſi protrahas uſque ad ingreſſum Abrahami in Ægyptum, ubi ſequens Epoolra incipit, cum Boſſueto numerabimus annos 426; ut hic magis receptæ Chronologiæ conſentiamus.

Tabula Chronologica ſecundo volumini phyſicæ noſtræ inſerta huic conformis eſſe debet; ſi vero (ex pagina omiſſa) ab hac differat, ad hujus exemplar reformanda eſt. (*a*) Reformata fuit. *Interpres.*

EX-

EXTENSIONIS, ET PONDERUM MENSURÆ.

V. Geometræ Galli univerſalis menſuræ conſenſum præſtolantes, omnes modo menſuras *ad hexapedam Regiæ ſcientiarum Accademiæ* referunt, quæ magnæ arcis Pariſienſis (*du grand Châtelet*) hexapeda eſt, & quæ ad tres primos meridiani gradus ſub æquatore dimetiendos uſurpata fuit. Regis juſſu anno 1766 hexapedæ ferme 80 conſtructæ fuerunt huic omnino ſimiles, & ad generales *Parlamentorum* procuratores miſſæ fuerunt, uti & ulna (*aune*) Pariſienſis, & pondus ſemilibrale (*poids de marc*); quare in præcipuis regni urbibus menſura hæc exactiſſime in uſu eſt.

Hexapeda regia (*toiſe royale*) continet pedes 6; pes pellices 12; pollex lineas 12; linea puncta 12. Punctum dimenſionem nullam habet, ſeu dimenſiones habet tantum veluti infinite minimas, quæ negliguntur.

Paſſus geometricus quinque pedibus conſtat. Auctores Galli hac menſura fere nunquam utuntur.

Leuca communis Gallica hexapedas continet 2287. Auctores nonnulli hexapedis quatuor illam minorem volunt.

Milliare Italicum conſtat mille paſſibus geometricis, ſeu pedibus 5000, ſeu hexapedis 833, cum triente. Auctores alii longius volunt milliare Italicum; nos menſuram modo allatam ſequemur.

Radius medius telluris hexapedis conſtat ferme 3269985, quæ ſunt pedes 19619910; ſunt hi autem leucæ Gallicæ ferme 1430. (*Phyſ.* 1377).

Circuli periferia dividitur in gradus 360 (309): gradus in minuta 60; minutum in ſecunda 60; ſecundum in tertia 60; tertium in

quarta 60. Quare circulus conſtat gradibus 360; minutis 21600; ſecundis 1296000; tertiis 77760000; gradus coſtat minutis 60, ſecundis 3600, tertiis 216000.

Pollex quadratus continet lineas quadratas 144; pes quadratus pollices quadratos 144, vel lineas quadratas 20736.

Hexapeda quadrata continet pedes quadratos 36, ſeu pollices quadratos 5184.

Hexapeda cubica pedes cubicos continet 216.

Jugerum (*arpent*) ſemper continet perticas quadratas centum; verum pertica diverſis in locis, imo ſæpius eodem in loco diverſa eſt. Maxima pedes continet viginti octo, minima duodeviginti. Pariſiis pertica pedes continet duodeviginti; jugerum hexapedas quadratas 900; quum pertica quadrata ſuperficiem habeat hexapedarum quadratarum novem. In Aquarum, & Sylvarum conſuetudine in univerſa Gallia pertica pedes habet viginti duos; jugerum hexapedas 1744 cum quatuor nonis partibus.

Modius tritici Pariſiis continet 12 *ſeptiers*: *ſeptier minas* duas, ſeu 12 *boiſſeaux*; *mina* duos *minots*; *minot* tres *boiſſeaux*; *boiſſeau* ſexdecim *litrons*. *Boiſſeau* tritici pendit libras 21, aut 22; modius vero continet *boiſſeaux* 144.

Modius vini Pariſiis continet ſeptem *ſeptiers*, & ſemis, ſeu *pintas* 300, fœce quoque computata; *ſeptier* octo *pintas*; *pinta chopinas* duas.

Milliare continet decem *quintalia*; *quintale* libras centum; libra *marcos* duos, ſive uncias 16; *marcus* uncias 8; unica drachmas (*gros*) 8; drachma grana 72; unica grana 576.

Tum ſcientiæ, tum mercatoribus, ac ſocietati maxime commodum eſſet, ſi ſub eodem rege unica eſſet legislatio, pondus unicum, menſura unica; hoc jamdiu docti homines, & boni cives fruſtra deſiderant.

Men-

Menſura extenſionis comparata.

VI. Quum ſæpius variarum nationum antiquas, ac recentiores menſuras invicem comparare neceſſe ſit; hic ex Lalandio harum menſurarum præcipuas Gallicis comparatas ſubiicio. Accuratam omnino hanc comparationem non aſſeremus; qui de aliqua dubitat, auctorem conſulat, a quo eas excerpimus, qui quoque auctores memorat, quibus innititur, Aſtronomiæ Tom. III. pag. 94. editionis noviſſimæ.

	Hexapedas Gallicas
Milliare Roman. Plinii continet	$757 + \frac{1}{10}$
Milliare Romanum Strabonis	766.
Milliare recens Romanum	764.
Milliare Anglicum	830.
Li Sinenſe	265.
Stadium veterum Romanorum	$94 + \frac{693}{1000}$
Stadium Ægyptiacum	$114 + \frac{1}{10}$

Pol-

	Pollices	lineas
Pes antiquus Roman. continet	10.	$10+\frac{90}{100}$
Pes Græcus	11.	$4+\frac{56}{100}$
Pes Arabicus	9.	$10+\frac{4}{10}$
Peſ Alexandrinus	13.	$2+\frac{9}{10}$
Cubitus Hebræorum	19.	$10+\frac{4}{10}$
Pes Anglicus	11.	$3+\frac{1146}{10000}$
Pes Rhinlandicus Daniæ	11.	$7+\frac{283}{1000}$
Pes Viennenſis in Auſtria	11.	$8+\frac{117}{1000}$
Vara Caſtellana.	30.	10
Palmus Romanus recens	8.	$3+\frac{33}{100}$
Palmus Neapolitanus	9.	$8+\frac{15}{100}$
Archina Ruſſica	26.	$6+\frac{3}{10}$
Pes regius Sinenſis	11.	$9+\frac{9}{10}$

Menſurarum ex calore dilatatio.

VII. Nemo ignorat, corpora calore dilatari, frigore condenſari (*Phyſ.* 216): variationes hæ igitur negligendæ non ſunt, quum ſumma accuratione menſuræ ſumendæ ſunt. Exempli cauſa, quum ſupra tellurem magna baſis, ſeu diſtantia inter objecta duo diſſita, & immobilia capitur, hexapeda adhibetur, quæ paſſim ferrea eſt; quum vero hæc calore dilatetur, frigore conſtipetur, in diſtantia hyberno tempore emenſa major invenitur hexapedarum aut pedum numerus, quam ſi æſtate metiremur. Quum igitur

tur hujuſmodi operatio narratur addendum eſt quo caloris gradu peracta fuerit, ut cognoſcatur quænam tunc hexapedæ, qua uſi ſumus, longitudo fuerit.

Condaminius invenit, hexapedam ferream dilatari ferme $\frac{1}{87}$ unius lineæ pro quovis gradu thermometri Reaumuriani, ſive exactius hexapedam unam, cum tertia parte in hexapedis 100000, thermometro exiſtente ed ſignum o. Quare ſi diſtantia fuerit hexapedarum 100000, poſito thermometro ad ſignum o (*Phyſ.* 211); hæc eadem diſtantia erit 100000 + 21 + 7; poſito thermometro ad gradus 21 ſupra gelu.

Ex Berthoudii experimentis in hypocauſto peractis ubi thermometrum Reaumurianum 27 gradus ſupra gelu indicabat, in virgis metallicis longis pedes 3, pollices 2, lineas 5, latis lineas 5, altis lineas 3

Aurichalchum dilatatum fuit	$\frac{121}{360}$ lineæ
Cuprum	$\frac{107}{360}$
Ferrum frigidum cuſum	$\frac{78}{360}$
Chalybs temperatus, & cæruleus effectus - - - - -	$\frac{77}{360}$
Ferrum frigidum cuſum, & recoctum	$\frac{77}{360}$
Chalybs temperatus, & deinde recoctus - - - - -	$\frac{69}{360}$

Methodus geometrica.

8. DEFINITIO I. *Methodus geometrica* dicitur modus, quo in demonſtranda, aut inquirenda aliqua veritate procedunt geometræ. In hac primum res, de quibus quæſtio, definiuntur; a qui-

a quibuſdam certis axiomatibus initium faciunt, a quibus veritas ſtatuenda, aut invenienda deduci debet; quædam poſtulata, ſive hypotheſes quaſdam proponunt, quæ evidenter admittendæ ſunt, quibus utuntur ad rem demonſtrandam. Qui ita in opere procedit, methodum ſequitur, quæ geometrica nuncupatur.

I. *Definitiones* voces explicant, quæ adhibentur, ut quid illis intelligatur plane conſtet, ambiguitate omni, ac controverſia rejecta.

II. *Axiomata* propoſitiones ſunt certiſſimæ, atque ita per ſe evidentes, ut probatione non indigeant: & quibus aliæ plures propoſitiones ipſis connexæ demonſtrari poſſunt.

III. *Poſtulata* ſunt hypotheſes ita planæ, aut rerum ita factu facilium, ut nemo eas inficietur; veluti ſi ſupponas a puncto ad punctum rectam lineam ductam eſſe; aut ſi petas, numerum numero addi, quantitatem datam duplicari, aut triplicari, aliaque hujuſmodi.

9. DEFINITIO II. Definitionibus, axiomatibus, poſtulatis mathematici omnes ſuas propoſitiones demonſtrant, quæ quadruplices ſunt; theoremata, problemata, corollaria, & lemmata. Hinc in eorum operibus perſpicua ſeries invenitur propoſitionum ita invicem connexarum, ut veritates in his demonſtratæ aliæ ab aliis deſcendant, & mirabili nexu conjungantur.

I. *Theorema* eſt propoſitio, cujus veritas tantum oſtendenda eſt (*a*).

II.

(a) *ETYMOLOGIA*. Theorema θεώρημα; *propoſitio, cujus veritas apparet, aut demonſtratur; a* θεωρία, *rerum contemplatio, viſio intuitiva; ſive a* θεάομαι, *video*. Problema πρόβλημα, *propoſitio reſolvenda; a* προβάλλω

pro-

II. *Problema* eſt propoſitio, in qua aliquid faciendi modus traditur; & demonſtratur, modum ad hoc aſſumptum certum eſſe.

III. *Corollarium* eſt propoſitio a veritate antea demonſtrata deſcendens.

IV. *Lemma* eſt propoſitio, quæ non demonſtratur niſi, ut ad ſequentes propoſitiones demonſtrandas inſerviat.

Præter quatuor hæc propoſitionum genera utuntur quoque geometræ *notis*, aut *ſcholiis*, ad propoſitiones clarius explicandas, aut ad earum uſum indicandum.

10. DEFINITIO III. Geometræ quoque alio demonſtrationis genere aliquando utuntur, quod vocant *probationem ſuperpoſitionis*.

Efficitur hæc duas figuras planas alteram alteri non mechanice, ſed mente ſuperponendo, puta, duo triangula; & ſi evidenter concipiamus figuras ſuperpoſitas invicem congruere in punctis omnibus ſuorum laterum, quibus terminantur, figurarum æqualitas demonſtrata eſt; & ſæpius ex hac aliæ propoſitiones demonſtrantur.

Probatio hæc ſuperpoſitionis hoc axiomate metaphyſico innititur: *id de rebus eſſe affirmandum, quod in illis evidenter concipitur.* In duobus triangulis, de quibus agimus, invicem cogitatione ſuperpoſitis evidenter concipimus, ſi partes ſingulæ unius ſingulis alterius partibus con-

---

propono, projecto. Lemma λυμμα: *quod ſtatuitur ad aliud ſtatuendum*. Axioma ἀξίωμα: *propoſitio ab omnibus admiſſa; ab* ἀξιόω, *cenſeo approbandum; cenſeo admiſſum*. Corollarium, *veritas utilis a propoſitione demonſtrata deſcendens, a* ρὸω, *extraho, &* κορωνη, *ſeu* corolla: *quaſi veritas ab alia fluens, inſtar corollæ ingenii vi obtenta.*

congruant, nullo exceſſu, nulloque defectu, illa eſſe omnino æqualia; ergo hæc æqualitas eſt affirmanda.

AXIOMATA MATHEMATICA.

11. OBSERVATIO. Quum matheſeos partes duæ, arithmetica, & geometria quibuſdam axiomatibus per ſe evidentibus innitantur, ex his præcipua hic proponere opportunum erit. Axiomata omnia mathematica ab hoc præcipuo humanarum cognitionum axiomate primitus deſcendunt: *id de rebus affirmandum, quod in illis evidenter concipitur*; ut in metaphyſica monuimus (*Meta.* 154). Porro axiomata, quibus mathematicæ omnes demonſtrationes innituntur, iſta ſunt.

I. *Totum majus eſt ſua parte, & æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis*. Pars totius intelligitur portio ejus quævis, quæ totum ipſum non ſit. Exempli gratia, in quantitate 100, pars eſſe poteſt 99; tunc altera erit 1; atque ita de ceteris.

II. *Quantitas quævis ſibi ipſi æqualis eſt.* Nequit igitur major eſſe, aut minor omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

III. *Quum duæ magnitudines ſunt æquales, altera pro altera ſumi poteſt, & una alteri ſubſtitui*. Exempli cauſa, ſi numerus 10 æqualis eſt decem unitatibus, poſſum in additione æque ponere aut 10, aut unitates decem; multiplicando per 4, aut 6, aut alium datum numerum, hunc æque ducere poſſum in 10, aut in ſingulas decem unitates; atque ita de reliquis.

Pari modo, ſi linea data AB ſex hexapedas longa æqualis ſit alteri lineæ datæ *a b*, eandem hexapedarum duodecim ſummam habebo bis alterutram ſumendo, idem productum habebo alterutram per datum numerum 4,

aut

aut per eandem lineam MN multiplicando.

IV. *Duæ quantitates diſcretæ, aut continuæ, quæ ſingulæ uni tertiæ æquales ſunt, inter ſe æquales ſunt*. Exempli cauſa; ſi M eſt æquale 10, ſi N eſt æquale 10; M, & N æqualia ſunt.

V. *Si æqualibus æqualia addas, vel ab iis demas, quæ fiunt, aut remanent ſunt æqualia*. Exempli gratia, ſi M, & N ſingula ſunt æqualia 10; ſi ab utraque demas 3, duo reſidua erunt æqualia 7; ſi utrique addas 100, fient duo tota æqualia 110.

VI. *Si ab æqualibus inæqualia demas, vel iis addas; quæ remanent, aut fiunt erunt inæqualia*. Exempli gratia, duabus æqualibus quantitatibus 10, & 10 adde huic 2, illi 4; novæ quantitates 12, & 14 erunt inæquales. Ab ambabus hiſce æqualibus quantitatibus deme ab una 5, ab altera 3, duo reſidua 5, & 7 erunt inæqualia.

VII. *Si ab inæqualibus æqualia demas, vel iis addas, facta, & reſidua adhuc erunt inæqualia*. Fxempli gratia; a duabus inæqualibus quantitatibus 10, & 15 deme, vel iis adde eandem quantitatem 4; reſidua 6, & 11, ſeu facta 14, & 19 adhuc erunt inæqualia.

VIII. *Quantitas quævis in ſe ipſa ſemel tantum continetur*: Quare quantitas per ſe ipſam diviſa unitati æqualis eſt; at quantitas *a* ſe ipſa ablata nihilo, ſeu 0 æqualis ſit. Quantitas *a* diviſa per *a* eſt $=$ 1. Quantitas $a - a = 0$.

Antequam rem aggrediamur lectori ſigna nonnulla explicanda ſunt, quorum in operibus mathematicis frequentiſſimus eſt uſus. Signum $=$ ſignificat *eſt æquale*; ſignum $+$ ſignificat *plus*; ſignum $-$ ſignificat *minus*; ſignum $\times$ ſignificat *ductum in*. Quare $5 \times 2 = 7$; ita $5 - 2 = 3$. Literæ Q. E. D. quibus paſſim demonſtrationes mathematicæ concluduntur, ſignificant, *quod erat demonſtrandum*.

ARI-

ARITHMETICÆ, ALGEBRÆ, ET GEOMETRIÆ PRINCIPIA.

PARS PRIMA.

ARITHMETICA, ET ALGEBRA.

ARITHMETICA. ENumeratio, additio, ſubductio, multiplicatio incomplexa, diviſio incomplexa; multiplicatio complexa; diviſio complexa; multiplicatio, & diviſio per fractiones unitatis.

ALGEBRA. Ejus principia, & præcepta; formatio quadrati, & cubi; extractio radicum quadratæ, & cubicæ; elevatio, & extractio quantitatum algebricarum.

ANALOGIA, ſeu theoria rationum, proportionum, progreſſionum geometricæ, & arithmeticæ. Supputatio rationum ſimplicium, fractionum, rationum compoſitarum, progreſſionum finitarum, & infinitarum.

ANALYSIS, ſeu theoria æquationum; earum formatio, reſolutio, ad pleraque præcipua problemata applicatio. Regula trium, quinque, ſocietatis, mixtionis. Summa infinita partium proportionaliter decreſcentium.

ARITHMETICÆ, ALGEBRÆ, ET GEOMETRIÆ PRINCIPIA, SIVE MATHESEOS ELEMENTA.

TRACTATUS PRIMUS.

ARITHMETICA.

12. DEFINITIO. A*Rithmetica* eſt ſcientia numerorum, in quibus diverſas operationes facere docet, quarum præcepta tradit, & demonſtrat. Sunt hæ autem numerum numero, aut pluribus addere, ut eorum ſumma habeatur; numerum a numero ſubducere, ut eorum differentia inveniatur; numerum in numerum ducere, ut eorum productum habeatur; numerum per numerum dividere, ut quotiens habeatur, ſive ut innoteſcat quoties minor numerus in majori contineatur. Arithmeticæ itaque objectum ſunt, ut innuimus, quantitates diſcretæ, quarum valor determinatus eſt (2). Arithmetica, ſcientia cujus objectum eſt numerus, ab Ἀριθμὸς, *numerus*.

13. DEFINITIO II. *Numerus* eſt plurium unitatum, ſeu plurium partium unitatis collectio. Quare unica unitas, aut unica unitatis pars, ſeu 1 non eſt numerus; verum 2 ſunt numerus; 10 ſunt numerus. Duæ tertiæ partes unitatis ſunt numerus, tres decimæ unitatis partes ſunt numerus; tres nempe partes unitatis in decem æquales portiones diviſæ. In-

Inter numeros, quos arithmetica pertractat, alii abſtracti ſunt, alii concreti; alii complexi, alii incomplexi; alii integri, alii fractionarii, quorum prodromas definitiones tradere operæ pretium eſt.

I. *Numeri abſtracti* ſunt, qui unitates in genere indicant eas peculiaribus quantitatibus non applicando; exempli gratia, 1000. *Numeri concreti* ſunt, qui peculiares, & determinatas quantitates exprimunt; exempli cauſa, 1000 hexapedas, 1000 leucas, 100 homines, 4550 libras.

II. *Numeri complexi* ſunt, qui plures quantitatum ſpecies continent, puta libras, & ſolidos, hexapedas, & pedes. *Numeri incomplexi* ſunt qui unam tantum quantitatis ſpeciem continent, puta, hexapedas.

III. *Numerus integer* eſt, qui unitatem ſæpius exacte continet; exempli cauſa, 5, 9, 1. *Numerus fractionarius*, ſeu fractio, eſt numerus, qui unam, aut plures æquales unitatis partes continet. Exempli cauſa, ſi unitas in duodecim æquales partes diviſa concipiatur, ex quibus quinque ſumas, hæ quinque partes duodecimæ fractionem efficient, quæ ita ſcribitur $\frac{5}{12}$.

Duo itaque numeri requiruntur ad fractionem efficiendam, puta, fractionem quinque duodecimarum partium; alter 5 ſupra poſitus exprimit quot partes æquales totius ſumantur, quod totum hic eſt unitas in duodecim partes diviſa: numerus hic dicitur *numerator*; alter 12 infra poſitus indicat in quot partes totum diviſum ſit, hic vero dicitur *denominator*.

NOTÆ NUMERICÆ.

14. OBSERVATIO. Quum *ſcientia numerorum* ſit in omnibus maxime neceſſaria, nulla

la eſt natio, quæ ſigna, aut notas non inſtituerit, quibus numeros indicaret, & facile ſupputaret. At inter has notas Arabicæ aptiſſimæ ſunt; atque has excultæ nationes omnes in Europa ſaltem, admiſerunt non in commercio tantum, verum & in optimis diſciplinis, atque artibus. Notæ hæ decem ſunt, videlicet: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; hæ vero ſignificant zero, unum, duo, tria, quatuor, quinque, ſex, ſeptem, octo, novem. Prima nota ſolitaria nihil ſignificat, at aliis adjecta præcedentium omnium valorem auget, ut quamprimum explicabimus. Notæ omnes a zero diverſæ dicuntur *poſitivæ*.

I. Omnes homines in infantia per digitos numerare incipiunt; hinc veroſimiliter ortum habuit omnium populorum conſenſus, demptis antiquis Sinenſibus, & parva Thracum natione, in eodem enumerationis ſyſtemate *per progreſſionem decuplam* admittendo; nempe ad decem uſque numerando, ut decas habeatur; deinde iterum incipiendo, & id dicendo, quod æquivalet decem, plus uni, ſive undecim; decem, plus duobus, ſeu duodecim; decem, plus tribus, ſive tredecim; atque ita porro uſque ad viginti, ut habeantur duæ decades: atque ita procedendo per tres, quatuor, quinque decades uſque ad decem decades, ſeu *centum*; deinde numeros centenarios decies ſumendo, qui efficient *mille*; atque ita porro.

II. Populus, qui ſex digitis inſtructus eſſet, veroſimiliter non decuplam, ſed *duodecuplam progreſſionem* arripuiſſet; nec male egiſſet; enumeraſſet nempe primum uſque ad duodecim, ut duodenarium haberet numerum, ſeu *primam* numerorum *claſſem* A; ſubinde dixiſſet: duodecim plus unum, duodecim plus duo, atque ita porro uſque ad vigintiquatuor, ut duos duodenarios numeros haberet; iterum deinde ſumpſiſſet duos duodenarios numeros plus unum,

tres

tres duodenarios plus unum, undecim duodenarios plus duodecim, ſeu duodecim duodenarios, quos nota, & voce opportuna expreſſiſſet ad ſignificandam *alteram claſſem* B numerorum, qui fuiſſent unitates centum quadraginta quatuor. Poſt hæc alteram hanc claſſem ſumpſiſſet ſemel, bis, duodecies ad *tertiam claſſem* C efficiendam, quæ duodecies præcedentem claſſem, ſeu 1728 unitates valuiſſet.

Populus hic duobus aliis præterea notis tantum indiguiſſet; & facta hypotheſi, noſtrum zero unitati poſtpoſitum valere duodecim, ſeu primam ejus claſſem, aut ſeriem A, ejus numerandi ſyſtema nihil noſtro conceſſiſſet; imo hoc commodi ſupra noſtrum habuiſſet, quod maximum diviſorum numerum admitteret inter unum, & duodecim, inter duodecim, & ſexaginta; quod ſæpius utiliſſimum eſſet; exempli gratia, in horarum ſupputatione, quæ conſtant minutis ſexaginta; in pedibus ſupputandis, qui in duodecim pollices diviſi ſunt; in pollicibus, qui duodecim lineas habent; in gradibus circuli, qui in ſexaginta minuta dividuntur; in minutis quæ ſexaginta ſecunda continent. Si quando rex optimas diſciplinas, atque artes fovens univerſale harum dominium aſſequetur, aut enumerationem per duodecuplam progreſſionem inſtituet; aut præcipiet, præcipuas temporis, ſpatii, ponderum dimenſiones per duodecuplam progreſſionem fieri: lex iſta omnium ſimpliciſſima eſſet, atque utiliſſima.

III. In numeris deſcribendis veteres nationes fere omnes ſuas elementarias literas uſurparunt.

Apud Hebræos primæ novem literæ novem primos numeros ſignificant, ſive unitates, novem ſequentes exprimunt decades, reliquæ literæ addito aliquo peculiari ſigno numeros centenarios exprimunt. Quare habebant: aleph 1, beth 2, ghimel 3, dalet 4, he 5, vau 6, zain

7,

7, het 8, teth 9, jod 10, Kaph 20, Kaph-aleph 21, lamed 30, mem 40, nun 50, nun-ghimel 53, ſamech 60, phe 70, ſade 80, coph 100, reſch 200, ſin 300, thau 400.

Apud Græcos eadem fuit methodus, quæ Hebræorum. Novem primos numeros novem primis alphabeti ſui literis expreſſerunt, quæ alphabeti Hebraici literis analogæ inventæ ſunt (*a*); quum vero literas Hebraicis conſonas non haberent, non ſequentes literas, ſed alia ſigna uſurparunt. Quum itaque literam *vau* non haberent, illius loco *ſigma-tau* nexum uſurparunt; ita ϛ, quod επιςημον υαυ vocarunt; hoc eſt, ſignum literæ *vau* ſubſtitutum. Quare novem primis literis utentes ad novem primos numeros exprimendos, hos ita ſignificabant: alpha 1, beta 2, gamma 3, delta 4, epſilon 5, ſigma-tau 6, zeta 7, eta 8, theta 9; ut cum Hebræis decades per ſequentes literas indicarent, jota 10, Kappa 20, lambda 30, mi 40, ni 50, quæ hebraicis literis reſpondent, jod, kaph, lamed, mem, nun. Quum reliquæ græcæ literæ ab hebraicis admodum differant, Græci ad ambiguitates vitandas propriis literis uti maluerunt inter decimam ſextam, & decimam ſeptimam literam duplicis normæ ſignum collocando ad numerum 90 exprimendum. Quare habuerunt μ' = 40, ν' = 50 =, ξ' = 60, ο' = 70, π' = 80, μ' = 90, ρ' = 100, σ' = 200, τ' = 300, υ' = 400, φ' = 500, χ' = 600, ψ' = 700, ω' = 800. Signum compoſitum ex pi in ſiginate inverſo ſignificavit 900. Ubi nota, ad numeros uſque ad mil-

(a) *ETYMOLOGIA. Alphabetum, ab* αλφα *&* βητα, *quibus vocibus prima duæ Græcorum literæ exprimuntur; atque hæ primis duabus Hebræorum Aleph, & Beth conſonæ ſunt.*

le excluſive exprimendos, *accentum acutum literis præfixum fuiſſe*; & ad mille exprimenda accentum acutum iiſdem literis ſubſcriptum fuiſſe hoc pacto: $\alpha' = 1$, $\beta' = 2$, $\vartheta' = 9$; $\rho = 12$; $\iota\alpha' = 11$: $\kappa' = 20$; $\kappa\gamma' = 23$; $\rho' = 100$; $\rho\lambda' = 130$. Deinde $\alpha = 1000$; $\beta_{,} = 2000$, $\iota_{,} = 10000$; $= \kappa_{,} = 20000$; atque ita porro.

Aliquando quoque Græci ſex literas majuſculas ad exprimendos numeros uſurparunt, quas ſingulas quater quoque, quum opus erat, iterabant; ſunt hæ autem Ι = 1, Π = 5, Δ = 10, Η = 100, Χ = 1000, Μ = 10000. Quare habebant ΙΙΙ = 3, ΠΙΙΙΙ = 9, ΔΔ = 20 ΔΔΔΠΙΙΙ = 38 ΗΗ = 200, ΗΗΗΔΙΙ = 312, ΧΧΗ = 2100, ΜΜ = 20000; atque ita porro. A Græcis æque, atque ab Hebræis aliquando literæ uſurpantur ad exprimendum naturali earum ſerie librorum, capitum, aut verſuum ordinem, & numerum in aliquo opere.

Romani quoque literis alphabeti numeros deſignarunt, at non attento literarum ordine, ac ſerie. Litera I ſignificat unum; litera V quinque; X decem; L quinquaginta; C centum; D quingenta; M mille; atque ita porro. In ſupputationibus tres hi numeros exprimendi modi erant admodum incommodi.

Arabes omnes omnino numeros decem peculiaribus notis exprimebant, quæ nihil cum alphabeti literis commune habent; ſunt hæ decem illæ notæ, de quibus ſupra. Arabica hæc enumeratio præclariſſimum humani ingenii opus cenſenda eſt; verum hanc ab Indis Arabes mutuati ſunt, ut ab Arabibus Europæi,

ARABICÆ ENUMERATIONIS SYSTEMA.

15. AXIOMA. (a) *In notarum ſerie valor unius notæ creſcit in ratione decupla, a dextera in ſiniſtram procedendo.*

EXPLICATIO. Statutum eſt communi conſenſu, (atque hoc eſt totius arithmeticæ fundamentum), quamlibet notam duplicem valorem habere alterum abſolutum, alterum relativum. *Valor abſolutus* notæ cujuſque, puta, 2, ille eſt, quem habet ſolitaria. *Valor relativus* ejuſdem notæ eſt, quem obtinet ratione loci, quo in aliqua notarum ſerie collocatur.

Exempli cauſa, valor notæ 2 poſtremò loco A poſitæ eſt duarum *unitatum*. Ejuſdem notæ 2 valor altero loco B poſitæ eſt duarum decadum; tertio loco C eſt *ducentarum*; quarto loco D eſt duorum millium; quinto loco E eſt viginti millium; atque ita in infinitum. Hinc apparet, ex conſenſu, de quo ſermo, quodque tantùm *poſtulatum mathematicum* eſt evidenter non repugnans (8), eandem notam decuplum valorem obtinere, ſeu creſcere *in decupla proportione* quotieſcumque a dextera in ſiniſtram uno paſſu retrocedit. In allato enim exemplo duæ decades valent decies duas unitates; duo centenaria valent decies duas decades: duo millia valent decies duo centenaria; duæ millium deca-

A.	2
B.	20
C.	200
D.	2000
E.	20000

(a) *Non eſt hæc* axioma, *ſed hypotheſis, ſeu poſtulatum; neque enim illud eſt veritas per ſe nota; ſed inſtitutio ex hominum voluntate, ut talis valor notis arithmeticis pro diverſa earum poſitione tribueretur.* Interpres.

decades, ſeu viginti millia valent decies duo millia; atque ita porro in infinitum; idem dicas de alia quavis nota, 5, 6, 8, & reliquis.

16. COROLLARIUM I. *Unitas cujuſque notæ poſitivæ omnes ſubſequentes valore ſuperat.*

EXPLICATIO. Juxta axioma præcedens nota 1 decadem valet in A, centum in B, mille in C, decem millia in D; atque ita porro. Atqui valor notæ 1 eſt ubique major valore notarum omnium ſubſequentium; quæ tamen maximæ omnium ſunt, quæ haberi poſſint; ut apparet.

A	19
B	199
C	1999
D	19999
a	69
b	699
c	6999
d	69999

Pari modo unica notæ 6 unitas, quæ ſex unitates continet, valet decadem in *a*, centum in *b*, mille in *c*, decem millia in *d*. Una ergo notæ 6 unitas valore præſtat omnibus ſubſequentibus, quæ adhuc omnium maximæ ſunt, quæ haberi poſſint.

17. COROLLARIUM II. *Qualibet cujuſque notæ unitas valet decem unitates ſubſequentis.*

EXPLICATIO. Sit numerus A æqualis 4524. Per præcedens axioma ſi numerum hunc A decem unitatibus B augere velim, ſatis eſt ſi in numero A 2 in 3 permutetur. Si numerum A 300 unitatibus C augere velim, ſatis eſt, ſi in numero A 5 in 8 convertam. Si numerum hunc A adhuc unitatibus 2000 D augere velim, ſatis eſt ſi 4 in 6 convertam. Numerus M, ſeu 6834, æquivalebit numeris omnibus inferioribus A B C D.

M	6834
A	4524
B	10
C	300
D	2000

Pari modo juxta præcedens axioma, in numero 37259 quælibet unitas numeri 3 valet unitates decem numeri 7; quælibet unitas numeri

meri 7 valet decem unitates numeri 2; quælibet ex his valet decem unitates numeri 5; & ex his quælibet valet decem unitates numeri 9. Unitates numeri 3 ſunt decades millium; numeri 7 ſunt millia; numeri 2 ſunt centenaria; numeri 5 ſunt decades; numeri 9 ſimplices unitates.

18. COROLLARIUM III. *Zero numero poſtpoſitum illum decuplo auget;* notas enim omnes hunc numerum componentes in ſiniſtrum locum rejicit, ubi valor earum relativus decuplus eſt.

I. Zero numero quovis 4624 poſtpoſito, unitates 4 fiunt decades; hæ 2 fiunt centenaria; hæc 6 fiunt millia; hæc 4 fiunt decades millium. Numerus hic erit 46240.

II. Eadem ratione, *ſi numero duo zero poſtponantur, numerus fit centuplus.* Si tria zero poſtponantur, numerus fit millecuplus; atque ita porro ſemper decupla proportione.

III. Si nota numero poſtpoſita eſt poſitiva, numerum auget ut zero, & præterea toto valore ſuo abſoluto. Exempli gratia, ſi numero 6 addam zero, habebo 60; ſi loco hujus zero ponam 9, habebo 60 + 9, ſeu 69.

IV. Ex oppoſita ratione, *zero a poſteriori numero ablatum, illum efficit decuplo minorem:* zero duo ablata illum efficiunt centuplo minorem; tria millecuplo minorem; atque ita porro ſemper decupla progreſſione. Deme zero a numero 1000; reſiduum valet tantum 100; aliud zero deme, reſiduum valet tantum 10; aliud adhuc zero deme, reſiduum eſt 1.

Diviſiones, & expreſſiones notarum.

19. OBSERVATIO. *Quum numerus pluribus notis exprimitur, notæ in partes dividuntur, quarum ſingulæ tres notas continent*, dempta prima, quæ duas, aut unam tantum continere poteſt. Numeri ita dividuntur a dexte-

ra in ſiniſtram procedendo. Diviſiones hæ exprimunt unitates, millia, miliones (*a*), biliones, triliones, quadriliones, quintiliones, ſextiliones, atque ita porro. En tibi exemplum numerorum ita diviſorum.

Triliones, Biliones, Miliones, Millia, Unitates.

2	9	6	7	0	3	8	4	6	3	2	3	9	4
decades.	unitates.	centenaria.	decades.	unitates.	centenaria.	decades.	unitates.	centenaria.	decades.	unitates.	centenaria.	decades.	unitates.

I. Facile ex dictis intelligas, etſi quævis diviſio centenaria, decades, & unitates complectatur, tamen diviſionem quamvis numeros admodum diverſos ſignificare. Diviſio milionum centenaria, decades, & unitates milionum exprimit. Diviſio millium centenaria, decades, & unitates millium exprimit; atque ita de reliquis.

II. Denominatio cujuſvis diviſionis propria numerum ſignificat, qui millies valet expreſſum in diviſione præcedente. Bilio mille miliones valet. Milio valet millies mille. Millia valent mille unitates.

Nota Interpretis. Ad tollendam æquivocationem

(a) *Vocibus hiſce barbaris uſi ſumus ne verborum circumlocutione ambiguitati, & obſcuritati locum daremus; quod enim milionem dicimus, dici deberet decies centena millia. Bilio, millies millies millia ſeu milionem milionum continet, non mille miliones, ut ait auctor noſter.* Interpres.

nem omnem, ſupraſcriptum numerum ita lege;
29, 670, 384, 632, 304.

Viginti biliones, ſexcentum ſeptuaginta mille, tercentum octoginta quatuor miliones, ſexcentum triginta duo mille, tercentum quatuor. Quare ſupraſcriptam Tabellam ita exponam.

2	9,	6	7	0,	3	8	4,	6	3	2,	3	0	4
Decades bilionum.	Biliones.	Centena millium milionum.	Decades millium milionum.	Millia milionum.	Centena milionum.	Decades milionum.	Miliones.	Centena millium.	Decades millium.	Milia unitatum.	Centenaria unitatum.	Decades unitatum.	Unitates.

Hac ratione omnis æquivocatio tyronibus ablata erit.

---

20. PROBLEMA I. *Notis numerum datum deſcribere.*

SOLUTIO. Sit numerus datus, quingenti quadraginta ſeptem miliones, ſexcenta tria millia, quadringenta ſexaginta novem. Numerus hic æquivalet quingentis milionibus, quadraginta milionibus, ſeptem milionibus, ſexcentis millibus, viginti millibus, tribus millibus,

quadringentis, ſexaginta, & novem. Quum autem zero tantum ad locum *notis poſitivis* deſignandum inſerviant, ut ſuum valorem obtineant, jam ſuppreſſis zero, & notis omnibus poſitivis in eadem linea deſcriptis, habebis arithmeticam expreſſionem numeri dati, 547623469.

```
500, 000, 000
 40, 000, 000
  7, 000, 000
     600, 000
      20, 000
       3, 000
          400
           60
            9
-------------
547, 623, 469
```

Si in dato numero aliqui in quadam diviſione intermedii ſuppreſſi ſint, eorum locó zero ponendum eſt, ut præcedentibus notis earum valor perſeveret. Exempli gratia ſit numerus datus: quatuor miliones, quadraginta millia, & tria; in quo millium decades & unitates, nec centenariorum, & decadum unitates recenſentur. Poſitis ſuo loco notis omnibus, & poſito zero ubi numerus quivis in diviſionibus omiſſus fuit, dati numeri expreſſionem habebis, uti in adjecto exemplo.

```
400, 000, 000
 00, 000, 000
  0, 000, 000
     000, 000
      40, 000
       0, 000
          000
           00
            3
-------------
400, 040, 003
```

21. PROBLEMA II. *Numerum notis deſcriptum enunciare.*

SOLUTIO. Numerum datum per trinas notas divide, hinc facile notarum enunciandarum valorem dignoſces.

Diviſio nulla enuncianda eſt niſi ad ejus finem; & loca, in quibus zero invenies, omittenda ſunt. Exempli gratia, datus ſit numerus 908, 047, 024. Dices: nongenti, & octo miliones, quadraginta ſeptem millia, viginti quatuor. Ita quoque datum numerum 70, 080, 000, 900 ſic enunciabis: ſeptuaginta mille, & octoginta miliones, nongenta. Nulla millia hic numerantur; in loco millium ſiquidem nulla eſt nota poſitiva.

QUATUOR REGULÆ ARITHMETICÆ.

22. OBSERVATIO. Quatuor ſunt generales arithmeticę operationes: *Additio*, *ſubductio*, *multiplicatio*, *diviſio*. Hæ aliarum omnium fundamenta ſunt; omnis tandem ſupputatio in has reſolvi debet.

Hæ operationes aut numeros homogeneos, & ejuſdem naturæ pertractare poſſunt; & tunc *incomplexæ* ſunt; aut numeros heterogeneos & diverſæ naturæ, puta, libras, & ſolidos, hexapedas, & pedes, horas, & minuta, & tunc *complexæ* ſunt.

Ut omnia facilius intelligantur operationes incomplexas a complexis ubique diſtinguemus; a primis ſequentes percipientur

PARAGRAPHUS PRIMUS.

ADDITIO.

23. DEFINITIO. A*Dditio* operatio eſt, qua datis numeris omnibus partialibus invenitur numerus totalis: ſeu, qua datis pluribus numeris eorum *ſumma* invenitur. Hac, datis partibus, totum invenitur.

Additio incomplexa ſummam dat plurium numerorum homogeneorum. Complexa plurium numerorum ſummam exhibet, in quibus ſunt quantitates heterogeneæ.

ADDITIO INCOMPLEXA.

24. REGULA. Ad additionem faciendam datos numeros ita diſpone alios infra alios, ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenaria centenariis, millia millibus ſubſint, atque ita reliquos; his lineam ſubſcribe, & ad ſequentia animum adverte,

4029
49
3026
7104

I. A columna unitatum incipe, eaſque in ſummam collige. Si hæc una nota deſignari poteſt, hanc columnæ unitatum ſubſcribe; ſi tantum duabus notis exprimi poteſt, harum poſtremam tantum unitatibus ſubſcribe; alteram ſerva ut decadum columnæ adjicias. Exempli cauſa, ſi unitatum columna dat 24, ſcribe 4 ſub columna unitatum, 2 deca des ſerva decadum columnæ addendas.

II. Procede ad columnam decadum, & ſummam cape, huic addendo quod a columna unitatum reſervaſti. Si ſumma hæc unica nota exprimi poteſt, hanc huic columnæ ſubſcribe: ſecus, huic columnæ poſtremam tantum notam ſubſcribe; alteram ſerva centenariorum columnæ addendam.

III. Eodem modo in columna centenariorum, millium, decadum millium, aliiſque operaberis ſemper poſtremam notam columnæ, cujus ſummam capis, ſubſcribendo, primam vero ſervando, ut alteri columnæ ad ſiniſtram poſitæ adjicias, in qua decuplum valorem obtinebit (17).

IV. Quum in aliqua columna, puta, centenariorum, nulla eſt nota poſitiva; tunc ſubſcribe zero, ſi nihil a præcedenti columna reſervaſti; at ſi quid ex illa habes, ſervatam notam huic columnæ ſubſcribe.

V. Si numeri addendi nimias notas continerent ita, ut ſumma unius columnæ tribus notis indigeret; additio in duas dividitur, quarum ſumma ſeorſim capitur. Si tamen unicam additionem facere velis, poſtremam notam ſuæ columnæ ſubſcribes, reliquas ſubſequenti adiicies. Exempli cauſa, ſi unitatum ſumma eſſet 124, ſub unitatum columna ſcribes 4, & 12 decades decadum columnæ adjicies.

DEMONSTRATIO Hæc axiomate innititur: *Totum eſt æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.* Numeri addendi, quorum ſumma

ma inveſtigatur, partes ſunt; eorum ſumma Totum. In quovis exemplo, ut in adjecto, demonſtro, ſummam ex additione provenientem eſſe omnibus numeris datis æqualem.

I. Numeri dati continent tantum unitates, decades, centenaria, millia, millium decades, centena millia, miliones. Quare ex præcedenti regula omnium unitatum, decadum, centenariorum, millium, decadum millium, centum millium, milionum ſummam cœpi; ergo datorum omnium numerorum partes cœpi. Partes omnes ſimul ſumptæ ſunt ipſum Totum; ergo Totum cœpi, quod eſt 9362294.

Numeri dati	8, 240, 364
	460, 723
	70
	40, 234
	620, 903
Summa.	9, 362, 294
Profatio	1, 102, 110

II. Præceptum addendi columnæ præcedenti primam ex duabus notis columnæ ſummam exprimentibus, rectum apparet ex alibi dictis; valorem ſcilicet notarum creſcere proportione decupla a dextera ad ſiniſtram (15, & 17).

In propoſita additione in poſteriori dextera columna inveni unitates 14: ex his 4 huic ſubſcribo, decem columnæ decadum reſervo, ubi eas unitate exprimo; in hac enim unitas valet decem columnæ dexteræ unitates. Pari ratione in columna decadum 19 unitates habeo; ex his 9 huic ſubſcribo, reliquas decem columnæ centenariorum addo per 1; in hac enim columna unitas valet decem præcedentis decadicæ unitates. Ita quoque in columna centenaria unitates habeo 22, quæ ſingulæ valent 100; ex his 2 huic columnæ ſubſcribo, 20 reliquas columnæ millenariæ ſerbo, ubi 2 valent 2000; atque ita de ceteris. Ergo præcedentem regulam ſequens omnes datorum numerorum partes cœpi, & omnes has partes

expoſui notis earum ſummam exhibentibus nullo exceſſu, aut defectu. Q. E. D.

25. NOTA. Si forte quæras cur ad dexteram potius, quam ad ſiniſtram opus aggrediamur; adverte, notas creſcere proportione decupla a dextera, ad ſiniſtram; quare a poſtrema columna dextera opus incipiendum eſt, ut ſummæ partiales, quæ ſæpius unica nota exprimi nequeunt, poſſint ſucceſſive primam notam in præcedentem columnam rejicere. Eadem ratione ſubductio quoque, & multiplicatio ad dexteram exordiuntur.

Oppoſita ratione diviſio ad ſiniſtram incipit; ut nimis parvæ numeri partes, quæ diviſorem in primis columnis non continent, illum in ſequentibus contineant, in quibus earum valor numeris decuplo majoribus exprimetur; ut infra patebit.

ADDITIONIS PROBATIO.

26. DEFINITIO. *Additionis probatio* dicitur operatio, qua certiores ſimus, præceptum datum impleviſſe, nec in enumeratione nos erraſſe.

Quum noſcere volumus num in additione erraverimus, *a ſumma totali omnia membra addita ſubducenda ſunt*; tunc ſi nihil ſupereſt, indicium hoc eſt, recte additionem factam fuiſſe, ex axiomate: *Si a toto omnes ejus partes demas, nihil ſupereſt*. Totum eſt ſumma ex additione exurgens; hujus totius partes ſunt numeri, qui reſpectivas columnas efficiunt.

Additionis probatio hoc pacto fit. A prima columna ſiniſtra exordire, cujus ſumma a prima nota, vel a primis notis huic columnæ ſubjectis ſubducenda eſt: reſiduum, ſi ſupereſt, ſubſcribitur, ut mente notæ ſequenti totius ſummæ addatur. Idem facies in ſequentibus omni-

omnibus columnis: *re exacta nihil remanere debet*. In hac operatione initium fit a notis ſiniſtris, ut notarum reſidua, quæ magis valent, in ſequentes notas minus valentes reiici poſſint.

Quare ut præcedentis additionis probationem inſtituam, a 9 demo 8; remanet 1, quod additum 3 valet 13. A 13 demo 2 + 4 + 6, quæ ſunt 12; remanet 1, quod additum 6 valet 16. A 16 ſubduco reſpondentem columnam, 4 + 6 + 4 + 2 = 16; remanet 0. A 2 nihil ſubduco: remanent 2, quæ addita 2 efficiunt 22. A 22 ſubduco reſpondentem columnam 21; remanet 1, quod additum 9 valet 19. A 19 ſubduco reſpondentem columnam 18: remanet 1, quod additum 4 valet 14. A 14 ſubduco reſpondentem columnam 14; remanet 0; & operatio accurata eſt.

Additionis demonſtratio cum ejus probatione non eſt confundenda. Demonſtratio oſtendit, regulam certam eſſe; probatio indicat, nos huic regulæ ſtetiſſe. Probatio eſt veluti *experimentum* operationis, ut detegamus num ad regulæ methodum effecta fuerit.

27. NOTA. Subductio, multiplicatio, diviſio *probatione* ſingulæ expenduntur, num exactæ ſint. Additionis probatio ſubductio eſt, ſubductionis additio; multiplicationis diviſio, diviſionis multiplicatio; ut infra videbimus. Quare hæ regulæ ſeſe invicem probant.

At in his operationibus a probatione per contrariam operationem plerumque ſuperſedemus, quum apte arithmeticam callemus: tunc tantum alio modo operatio inſtituitur. Exempli cauſa in additione; ipſa repetitur columnas ab infima nota ad ſummam addendo, ſi prius a ſumma ad infimam additæ fuerint.

AD-

ADDITIO COMPLEXA.

28. REGULA. *Eadem in additione numerorum complexorum ſervatur regula, qua in additione incomplexorum;* & a minoribus ſpeciebus initium fit ad majores progrediendo. Qua in re nota: quum a minori ſpecie, ad majorem proceditur, puta, a denariis ad ſolidos; videndum eſt quoties major in minorum ſumma continetur, reſiduum tantum, ſi ſupereſt, minori ſubſcribendo; & numerum, quo major in minoris ſpeciei ſumma continetur, reſervando, ut majori addatur.

Exempli cauſa, ſi a denariis ad ſolidos tranſeas, & habeas denarios 38; quum ſumma hæc contineat ſolidos 3, & denarios 2, ſub denariis ſcribes 2, & retinebis 3, quæ ſolidis addes. Pari modo; ſi in tranſitu a ſolidis ad libras habeas ſolidos 47; quum ſumma hæc contineat libras 2, & ſolidos 7, ſcribe 7 ſub ſolidorum columna, & retine 2 libris addenda.

Exemplum primum.

	Libræ.	ſolidi.	den.
	42	18	8
	125	4	11
	72	16	9
	1,060	6	10
Sum.	1,241	7	2
Pro.	0, 112	3	0

Exemplum alterum

	Hexapedæ.	Pedes.	Pol.
	42	5	3
	22	2	7
	9	0	11
	24	4	8
Summa.	89	1	5
Pro.	32	2	0

Alterum exemplum. Pollices 29 ſunt pedes 2, & pollices 5: ſcribo 5 ſub columna pollicum, & 2 refero ad columnam pedum. In ſummam collectis pedibus, hos invenio 13, qui ſunt hexapedæ duæ, & pes 1; ſcribo 1 ſub columna pedum, & 2 addo columnæ hexapedarum. Reliqua additio eſt incomplexa.

Ea-

Eadem methodo utere quum alias quantitates complexas pertractans a minoribus ad majores tranſis; puta, a minutis ad horas, ab horis ad dies, ab unciis ad libras, a lineis ad pollices, ab hexapedis ad leucas.

Probatio additionis complexæ fit, ut in incomplexa (26), a quavis nota ſummæ totalis ſuperiores notas illi reſpondentes ſubducendo. Exempli cauſa, in additione hexapedarum a nota 8 ſubduc 2 + 1 + 4, quæ ſunt 7; ſupereſt 1, quod mente additum notæ 9 valet 19. A 19 aufer 2 + 2 + 9 + 4, quæ ſunt 17; ſuperſunt hexapedæ 2, quæ ſunt pedes 12. Itaque in columna pedum habebis pedes 13; ſubduces ergo pedes 5 + 2 + 4, qui ſunt 11: ſuperſunt pedes 2, qui ſunt pollices 24 in columna ſequente, in qua 5 ſunt. A pollicibus 29 ſubduc 3 + 7 + 11 + 8, qui ſunt 29, nihil remanebit. Recte ergo peracta eſt additio.

§. II.

SUBDUCTIO.

19. DEFINITIO. *Subductio* eſt operatio, qua datis duobus numeris quæritur eorum differentia; ſive qua minor numerus a majori aufertur. Numerus a ſubductione emergens dicitur *reſiduum*, ſeu *differentia*.

Exempli cauſa, ſi a 6 demas 3, ſubductionem facis. Operatio hæc in eo ſita eſt, ut totius *partem ignotam* quæras, cujus *altera pars*, & totum ipſum notum eſt, quod has tantum duas partes continet. In propoſito exemplo totum eſt 6: pars nota eſt 3; altera totius pars eſt, quæ quæritur, nempe 3; quæ eſt differentia inter duos numeros datos.

SUB-

SUBDUCTIO INCOMPLEXA.

30. AXIOMA. *Quum idem numerus duobus aliis additur, horum numerorum differentia eadem eſt ante, & poſt additionem.*

Exempli cauſa, ſi numeris 4, & 6 addas 10, differentia ſummarum auctarum 14, & 16 eadem eſt, quæ numerorum primitivorum 4, & 6.

31. REGULA. *In ſubductione* numerus ſubducendus infra alium ſcribatur, ita ut unius unitates alterius unitatibus reſpondeant, decades decadibus, centenaria centenariis, millia millibus; atque ita porro. Numeros deſcriptos linea ſubſigna. Deinde,

I. Incipe unitates numeri ſubducendi ab alterius unitatibus ſubducere. Tria contingere poſſunt: aut nota inferior unitates indicans *minor* eſt nota ſuperiori: tunc reſiduum ſcribe infra ſub eadem columna: aut duæ notæ *æquales* ſunt: tunc infra ſcribe 0; dempta enim inferiore nota a ſuperiore nihil remanet: aut nota inferior ſuperiore *major* eſt: tunc ſuperiori notæ adde decadem; deinde ex ſumma hac decade, & hac nota conflata aufer notam inferiorem; & reſiduum eidem columnæ ſubſcribe.

II. Quum decas numero, a quo ſubductio fit, addatur, tantundem numero ſubducendo addendum eſt. Quare ſupponi debet, in poſtremo hoc numero notam columnæ præcedentis auctam eſſe unitate, quæ valet decadem additam notæ columnæ dexteræ præcedentis in numero ſuperiore: quælibet unitas ſiquidem columnæ cujuſque valet unitates decem columnæ ſequentis. (17.)

III. Id ipſum in columnis omnibus peragendo, ſumetur duorum numerorum differentia in ec-

eorum unitatibus, decadibus, centenariis, millibus, millium decadibus, &c. Quum partium omnium datorum numerorum differentia ſumatur, evidens eſt, duorum numerorum differentiam ſumi. Differentia hæc, ſeu reſiduum additum numero ſubducendo æquare debet numerum, a quo ſubducitur; numerus enim ſubductus, & reſiduum ſunt duæ partes numeri, a quo ſubductio fit.

Duo hic habebis regulæ hujus exempla. In primo a 7 ſubduc 6; ſupereſt 1. Numero 2 adde decadem, & a 12 ſubduc tria: ſuperſunt 9. Numero 3 adde unitatem, quæ valet decadem columnæ ſequentis; & a 4 ſubduc 4, remanet 0. A 2 + 10 aufer 4; ſuperſunt 8. Adde unitatem numero 7, a 9 deme 8: remanet 1.

Adde numerum ſubducendum reſiduo: habebis ſummam æqualem numero, a quo ſubduxiſti. Hæc eſt ſubductionis probatio.

Exemplum primum.		*Exemplum alterum:*	
A num.	92, 427	A num.	497, 245
ſubduc	74, 336	ſubduc	88, 378
Reſiduum.	18, 091	Reſiduum.	408, 867
Probatio.	92, 427	Probatio.	497, 245

DEMONSTRATIO. In ſubductione quærimus reſiduum numeri, a quo alter ſubducatur. Ex propoſita regula evidens eſt hoc reſiduum inveniri; ex hac enim ſumuntur reſidua unitatum, decadum, centenariorum, millium, & reliqua. Ergo invenietur reſiduum numeri, a quo alter ſubducitur; quod reſiduum exprimit numeri illius exceſſum ſupra numerum ſubductum. Ex hac regula omnium partium reſi-

reſidua habentur; ergo & totius reſiduum; Q. E. D.

32. *Probatio ſubductionis* addit o e fit: addendus ſcilicet eſt numerus ſubducendus reſiduo, ſeu differentiæ numeri ſuperioris: eorum ſumma erit æqualis numero, a quo ſubductio facta fuit, ſi recte proceſſiſti. Patet ratio: ſubducendus, & reſiduum ſunt partes numeri, a quo ſubducitur; ergo duæ partes ſimul ſumptæ toti æquales eſſe debent, Q. E. D.

SUBDUCTIO COMPLEXA.

33. REGULA. *Si ſubductio numeros complexos habeat*, a minimis ſubductio incipienda eſt. Si numerus, a quo ſubducitur, ſubducendo minor eſſet, primo una ex præcedentibus quantitatibus addenda eſt, & ſubductione facta, alteri numero in præcedente columna unitas addenda, ut exemplis ſequentibus patebit, ex quibus in quavis complexorum numerorum ſpecie exempla confinges.

Exemplum primum.

	Hexapedæ :	ped.	pol.
A num.	348	2	6
ſubduc	237	2	10
Reſiduum	110	5	8
Probatio	348	2	6

Exemplum alterum.

	Libræ,	ſolidi,	den.
A num.	123	6	3
ſubduc	97	12	8
Reſiduum	25	13	7
Probatio	123	6	3

I. In primo exemplo nequeo a ſex pollicibus 12 ſubducere: addo valorem unius notæ præcedentis, 12 pollices, numero 6: habeo pollices 18, a quibus ſubduco 10; ſuperſunt 8, quos columnæ iſti ſubſcribo.

Quum

Quum 12 pollices, ſeu pedem numero ſuperiori addiderim, ad rem in integrum reſtituendam (30) eadem quantitas numero inferiori addenda eſt: tunc hic habebit pedes 3, qui a 2 ſubduci nequeunt. Addo itaque numero ſuperiori 2 valorem unitatis præcedentis, quæ eſt hexapeda, ſive pedes 6; & habeo 8 pedes, a quibus ſubductis 3, ſuperſunt pedes 5. Hinc ad hexapedas progrediens, ubi ſubductio eſt incomplexa, hexapedam addo numero inferiori, & in hoc jam 8 habeo, non 7.

II. In altero exemplo, denariorum ſummæ in numero ſuperiori valorem addo unitatis præcedentis, quæ 12 denarios valet: ſummæ ſolidorum addo valorem unitatis præcedentis, quæ valet 20 ſolidos.

III. Si in diebus, horis, & minutis ſubductio verſaretur; in numero ſuperiore ſummæ minutorum adderem valorem unitatis præcedentis, quæ valet minuta 60; horarum ſummæ adderem valorem unitatis præcedentis, ſeu diei, qui valet horas 24; atque ita de reliquis.

IV. Ad probationem adde numerum ſubducendum reſiduo, ſeu differentiæ; ſi recte ſubductio facta fuit horum ſumma ſuperiorem numerum æquare debet. In altero exemplo, denarii 8+7 ſunt 15, ſive ſolidus, & tres denarii: ſcribo 3 ſub columna denariorum, & 1 transfero in columnam ſolidorum. Deinde 1+12+13 ſunt ſolidi 26, ſeu libra, & ſolidi 6, ſcribo 6 ſub columna ſolidorum, & 1 transfero ad columnam librarum. Poſteà 1+7+5 ſunt 13. Scribo 3, & 1 in præcedentem columnam transfero. Tandem 1+9+2 ſunt 12, quæ ſcribo; & res exacte explicit.

§. III.

§. III.

MULTIPLICATIO.

34. DEFINITIO. M*Ultiplicatio* operatio eſt, qua datis duobus numeris, *multiplicando*, & *multiplicatore* tertius invenitur, qui eſſe debet ad multiplicandum ut multiplicator ad unitatem. Numerus emergens dicitur *factum*, ſeu *productum*. Exempli cauſa 5 ducta in 3 dant 15. Productum 15 toties continet multiplicandum 5, quoties multiplicator 3 continet unitatem.

In tabula ſequenti, $5\times4=20$, exempli cauſa ſignificat, 5 ducta in 4, ſeu quatuor quinquies ſumpta valere viginti. Ita $9\times9=81$ indicat, novem ducta in novem valere 81; atque ita de ceteris.

TA-

TABULA MULTIPLICATIONIS. (11)

5	×	4	=	20	8	×	4	=	32
5		5		25	8		5		40
5		6		30	8		6		48
5		7		35	8		7		56
5		8		40	8		8		64
5		9		45	8		9		72
6	×	4	=	24	9	×	4	=	36
6		5		30	9		5		45
6		6		36	9		6		54
6		7		42	9		7		63
6		8		48	9		8		72
6		9		54	9		9		81
7	×	3	=	21	12	×	12	=	144
7		4		28	12		11		132
7		5		35	12		10		120
7		6		42	12		9		108
7		7		49	12		8		96
7		8		56	12		7		84
7		9		63	12		6		72

MULTIPLICATIO INCOMPLEXA.

35. OBSERVATIO. Duplex habetur multiplicatio incomplexa, ſimplex, & compoſita. *Multiplicatio ſimplex* illa eſt, cujus multiplicator unica nota deſignatur; hujuſmodi eſt 764 in 6. *Multiplicatio compoſita* eſt, cujus multiplicator plures notas continet, ut 664 in 25, vel in 325.

36 AXIOMA. *Duarum notarum quarumcumque, puta, 4, & 2, productum ſemper idem eſt, ſive hanc in illam, ſive illam in hanc ducas*. Propoſitio hæc evidens eſt, & inter axio-

xiomata recenſenda. Illam tamen in algebra geometrice demonſtrabimus (93).

Multiplicatio ſimplex.

37. REGULA. *Quum numeri multiplicator unica nota ſcribitur*, ſcribe multiplicandum; huic ſubjice multiplicatorem: ſubducta linea operatio, ut præcedentes, a dextera incipiet; nempe prius unitates multiplicandi in multiplicatorem ducentur.

Si productum hoc unica nota exprimi poteſt, ſub unitatibus ſcribitur. Si *duabus notis* indiget, poſtrema ſub unitatibus ſcribitur; prima addenda producto decadum reſervatur, in quibus eodem modo res peragitur, ut in centenariis, in millibus, ceteriſque. Ita partium omnium multiplicandi productum obtinebitur.

Exemplum primum.		*Exemplum alterum.*	
Multiplicandus	912789	Multiplicandus	763478
Multiplicator	3	Multiplicator	5
Productum	2738367	Productum	3817390

In multiplicatione ſimplici ordo inverti poteſt, & multiplicator per multiplicandum multiplicari: productum erit idem (93). In primo exemplo, 3 in 912789 ducens dicam: 9 in 3 ſunt 27. Scribo 7, & ſervo 2 ad præcedentem locum, ubi duas decades, ſeu 20 valebunt. Proſequor: 8 in 3 ſunt 24, & duo translata efficient 26. Scribo 6, & ſervo 2. Perga: 7 in 3 ſunt 21: addo illa duo, & ſunt 23: ſcribo 3, & transfero 2; deinde, 2 in 3 ſunt 6: addo 2, erunt 8, quæ ſcribo; iterum 1 in 3 ſunt 3. Tandem 9 in 3 ſunt 27; & operatio explicit.

Mul-

Multiplicatio compoſita.

38. REGULA. *Quum multiplicator pluribus notis conſtat, ad multiplicationem:*

I. Quælibet multiplicandi nota in notam unitatum multiplicatoris ducitur; ut in multiplicatione ſimplici.

II. Pariter totus multiplicandus ducitur in notam decadum multiplicatoris; poſtrema tamen hujus producti nota decadibus ſubſcribitur.

III. Si plures, quam duas notas habeat multiplicator, ſemper totus multiplicandus in ſingulas multiplicatoris notas ducitur; & poſtrema producti cujuſque nota ſemper columnæ illius notæ ſubſcribitur, in quam multiplicandus ducitur. Peractis peculiaribus multiplicationibus, producta omnia ſimul adduntur. Summa eſt productum totale.

Exemplum primum.		*Exemplum alterum.*	
Multiplicandus	321	Multiplicandus	25729
Multiplicator	412	Multiplicator	32
	642		51458
	321		77187
	1284		
Productum	132252	Productum	823328

DEMONSTRATIO. I. Præcipit regula, *ſingulas multiplicandi notas in ſingulas multiplicatoris notas duci.* Evidens eſt, ita faciendo inventum iri productum unitatum, decadum, centenariorum, millium, & reliquarum notarum omnium multiplicandi; adeoque totius

mul-

multiplicandi productum per omnes ſucceſſivas multiplicatoris notas habitum iri.

II. Præcipit regula, *poſtremam cujuſque producti notam ſubſcribi columnæ illius notæ, qua multiplicatio fit*. Hujus ratio æque evidens eſt. Quælibet unitas notæ, quæ, exempli causa, ſit in columna decadum multiplicatoris, valet decies totum multiplicandum. Ut valor hic igitur exprimatur, debet poſtrema producti nota ſub decadibus ſiſti; ceterum decades, quas exprimere debet, non deſignaret. Pari modo quælibet unitas notæ in columna centenariorum multiplicatoris multiplicandum centies valet; ut igitur ſumma hæc exprimatur, productum ſub centenariis ſcribi debet: hic enim de centenariis agitur. Idem dicas de millibus, de millium decadibus, ceteriſque.

III. In propoſito exemplo, in quo 321 in 412 ducenda erant, toties multiplicandum ſumſi, quot erant multiplicatoris unitates, quoties illum ſumendum indicabant multiplicatoris decades, & centenaria. Illum igitur in totum multiplicatorem duxi; ergo illum toties ſumpſi, quoties multiplicator ſumendum indicat: ergo multiplicandum 412 vicibus majorem effeci, quam eſſet; ſicuti multiplicator 412 vicibus major eſt unitate. Q. E. D.

39. NOTA I. Facile intelliges, *multiplicationem eſſe additionis ſpeciem*, cujus numeri addendi ſunt æquales. Exempli causa, 365 in 240 ducere idem eſt, ac ſi 365 toties ſcriberem, quoties indicant 240, vicibus nempe 240; & deinde numeros hos omnes alterum alteri ſuppoſitos adderem; quod nimis longum eſſet. Propterea multiplicatio inventa eſt, quæ eſt compendioſa additionis methodus.

40. NOTA II. Sicuti additio ſubductione probatur, & ſubductio additione, ita *multiplicatio diviſione*, & diviſio multiplicatione pro-

probatur. Ad multiplicationem probandam productum per multiplicatorem dividendum eſt. Quotiens multiplicandum æquare debet; quod enim ſumma multiplicatione acquiſivit, diviſione amittit. In praxi multiplicatio tantum reficitur.

Multiplicationis uſus.

41. COROLLARIUM. *Multiplicationis uſus, inter ceteros, eſt in majoribus ſpeciebus ad minores adducendis*, exempli gratia, leucis ad hexapedas hexapedis ad pedes, diebus ad horas. Ad hoc ſpecies majores in numerum ducendæ ſunt, qui exprimat quoties minor ſpecies in majori contineatur.

Quare ſi pedes 54 in pollices convertere velis, duces 54 in 12; pes enim 12 pollices continet. Si dies 30 in horas mutare velis, duces 30 in 24; ſi libras 24 in ſolidos mutare velis; duces 24 in 20. Si leucas 13 in hexapedas mutare velis, duces 13 in 2287, ſeu 2287 in 13.

Methodus compendioſa multiplicationis.

42. NOTA. Aliquando multiplicatio in praxi breviari poteſt: exempli cauſa.

I. Quum multiplicator eſt unitas cum uno, aut pluribus zero; ſatis eſt multiplicando tot zero adjicere, quot habet multiplicator $740 \times 100 = 74000$.

II. Quum in multiplicatore notæ ſunt ab unitate diverſæ, quas unum, aut plura zero ſequantur; multiplicandus ducitur in notas multiplicatoris poſitivas; & zero ſummæ totali productorum peculiarium adduntur. $45 \times 600 = 27000$.

III. Quum notas poſitivas tam in multiplicando, quam in multiplicatore zero ſequuntur; multiplicatio peragitur ac ſi zero non adeſ-

D ſent,

ſent; & producto totali adduntur omnia zero tum multiplicandi, tum multiplicatoris. Adverte tamen hic agi tantum de zero ſequentibus notas omnes poſitivas; alia enim, ut notæ poſitivæ, pertractanda ſunt. Itaque 207000 × 600 = 124200000.

EXPLICATIO. Compendiorum horum ratio intelligetur, ſi animadvertatur, zero ad finem numeri poſitum decuplo illum majorem efficere: duo vero illum efficere centuplum; atque ita porro.

Exempli cauſa, ut 560 ducantur in 300, duco 5, & 6 in multiplicatorem 3: habeo 168. Summa hæc eſt millies vero producto minor. At ſi ad finem addam zero unum multiplicandi, & duo multiplicatoris, illam efficio millies majorem, adeoque vero producto æqualem (18). Idem dicas de aliis multiplicationis compendiis.

Hic de incomplexa multiplicatione tantum egimus: poſt diviſionem de complexa agemus; diviſione ſiquidem indigemus ad horum numerorum productum inveniendum.

§. IV.

DIVISIO.

43. DEFINITIO. D*iviſio* eſt operatio, qua datis duobus numeris, *dividendo*, & *diviſore*, tertius invenitur, qui eſſe debet ad dividendum, ut unitas ad diviſorem: numerus a diviſione ortus dicitur *quotus*, aut *quotiens*: hic vero exprimit quoties diviſor in dividendo contineatur. Exempli cauſa, 15 diviſa per 3 dant 5. Quotiens 5 in dividendo 15 toties continetur, quoties unitas continetur in diviſore 3.

DI-

DIVISIO INCOMPLEXA.

44. OBSERVATIO. Duæ ſunt diviſionis incomplexæ ſpecies, ſimplex, & compoſita. *Diviſio ſimplex* eſt, cujus diviſor unicam notam habet; *compoſita*, cujus diviſor plures notas habet. Quamprimum complexæ multiplicationis, & diviſionis præcepta trademus. Modo de numeris incomplexis tantum agemus.

I. *Ad diviſionem efficiendam* ſcribe diviſorem ad dexterum latus dividendi; & utrumque linea ſubſigna, quam ſecabis perpendiculari inter utrumque ducta ad illos ſeparandos. In diviſione peragenda quotientis notas ſucceſſive ſub diviſore colloca procedens a ſiniſtra ad dexteram. Tot erunt in quotiente notæ, quot membra in dividendo.

II. *Nota, quæ ut unius membri quotiens ſumitur, nunquam major 9 eſſe debet*. Si enim major eſſet vel unica unitate, jam valeret 10; & tunc numerum exprimeret, qui non collocari deberet in columna, quam illi aſſignas, ſed in præcedente (15). Vel ſi nota, quæ ut quotiens ſumitur, valere poſſet 10, aut unitatem notæ ad ſiniſtram ſitæ; deberet numerus, cujus eſt quotiens, valere unitatem notæ ſiniſtræ; at numerus ullus hujus notæ unitatem valere nequit (16): ergo nota, quæ ut quotiens ſumitur, nunquam major 9 eſſe poteſt.

III. Si prima nota dividendi ſiniſtra diviſore major eſt, aut illi æqualis; *prima hac nota membrum efficit diviſionis, & qualibet nota ſequens novum membrum eſt*. Si nota hæc diviſore minor eſt, primum diviſionis membrum erunt duæ primæ dividendi notæ.

Diviſio ſimplex facillima eſt; quod de hac dicemus diviſioni complexæ intelligendæ, quæ aliquanto difficilior eſt, viam ſternet.

Diviſio ſimplex.

45. REGULA. *Ad diviſionem ſimplicem, ſive ad numerum unica nota dividendum*:

I. Incipe quærere quoties diviſor in primo membro dividendi contineatur, *ut quotientem habeas*; & dividendo notam ſubſcribe exprimentem quoties in illo contineatur.

II. Multiplica diviſorem per notam quotientis inventam, *ut habeas productum*.

III. Productum hoc ſubduc a primo hoc membro dividendi, *ut habeas reſiduum*; & infra hoc reſiduum ſcribe, ſi ſupereſt, ut illud mente addas ſequenti dividendi membro, quod ut primum pertractabis, ut quotientem habeas. Idem quoque in ſequentibus membris perages.

Si quod ex ſequentibus membris diviſore minus ſit, quotienti adſcribitur zero; & membrum diviſore minus additur ſequenti dividendi notæ, ut ſequens membrum efficias. Sit datus numerus 9692 per 4 dividendus.

Dividendus.	9, 692	4	Diviſor.
	1, 010	2, 423	Quotiens
		4	
Probatio.	9, 692	9, 692	Productum.

EXPLICATIO. Prius divido *primum dividendi membrum*, quod millia exprimit: & dico: in novem millibus quoties continentur quatuor millia; ſeu ſimplicius, in 9 quoties 4? bis. Scribo ad quotientem 2, quæ exprimunt millia. Diviſorem 4 duco in hanc primam notam inventam 2: productum eſt 8. Hoc a 9 ſubduco, & reſiduum 1 ſcribo ſub 9.

Mente reſiduum 1, quod exprimit mille, addo

addo notæ ſequenti 6, quæ exprimit centenaria; itaque *ſecundum* diviſionis *membrum* ſunt 16 centenaria per 4 centenaria dividenda. Dico: in 16 quoties 4? Quater. Ad quotientem ſcribo 4, quæ erunt centenaria. Diviſorem 4 duco in notam inventam 4: productum eſt 16, quod a membro dividendo 16 ſubductum nihil relinquit.

Tranſeo ad *tertium* diviſionis membrum, quod continet 9 decades, quas divido per 4 decades. Dico: in 9 quoties 4? bis. Ad quotientem ſcribo 2, quæ decades exprimunt. Diviſor 4 ductus in hanc notam 2 producit 8. Hoc productum a 9 ſubductum relinquit 1, quod ſcribo ſub 9, ut illud addam poſtremæ dividendi notæ.

Reſiduum hoc 1 eſt decas, quæ addita 2 valet 12 unitates; eſt hoc *quartum* diviſionis *membrum* adhuc per 4 dividendum. Dico: in 12 quoties 4? ter. Ad quotientem ſcribo 3, quæ erunt unitates. Diviſorem 4 duco in hæc 3: productum eſt 12, quod a 12 ſubductum nihil relinquit; & diviſio expleta eſt.

Ad probandam diviſionem quotientem 2423 duco in diviſiorem 4: diviſio recte facta erit, ſi productum dividendo æquale ſit.

46. NOTA. Quum facta diviſione aliquid ſupereſt in poſtremo membro, reſiduum hoc ſcribitur ſub dividendo, & lunula ad ſiniſtram interpoſita ſeparatur. Reſiduum hoc eſt numerator fractionis, cujus denominator eſt ipſe diviſor.

In exemplo ſequente, facta diviſione remanent quatuor unitates dividendi per diviſorem 6 dividendæ. Hæ quatuor unitates per 6 diviſæ non ſunt integra unitas, ſed tantum quatuor ſextæ, aut duæ tertiæ partes unitatis. Quare quum peracta diviſione habetur reſiduum, nunquam hoc tantum eſſe debet, ut efficiat quotientis unitatem.

Probationem inſtituendo , poſtquam numeri integri quotientis in diviſorem ducti fuerint , producto addendus eſt numerus hic unitatum , quæ a dividendo ſuperfuerunt . Ratio eſt , quia hæ unitates in integris numeris quotientis non ſunt computatæ , & adhuc ad dividendum ſpectant . Productum huic reſiduo additum dividendo æquale eſſe debet ; ut in ſequenti exemplo apparet . Ductis 23079 in 6 productum eſt 138474 , quod cum reſiduo 4 dividendo æquale eſt

Dividendus	138478	6 Diviſor .
	1045	23079 $+\frac{4}{6}$ Quotiens
Reſiduum . . .	(4	6
Probatio	138478	138474 + (4

Diviſio compoſita .

47. **REGULA** . *Diviſio compoſita , ut & ſimplex, efficitur tribus operationibus in præcedenti regula indicatis* (45).

I. Dividendus per diviſorem dividitur , ut habeatur *quotiens*.

II. Diviſor in quotientem ducitur , ut habeatur *productum*.

III. A dividendo productum ſubducitur , ut habeatur *reſiduum* . Hæc exemplis , & obſervationibus ſequentibus clarius elucеſcent.

Etſi diviſor ſemper ſit idem numerus abſolutus varios tamen habet valores relativos . Quum enim milionibus admovetur , quotientem extrahit , qui miliones exprimit . Quum millibus admovetur , quotientem extrahit , qui millia exprimit ; quum unitates dividit , quotientem extrahit , qui unitates exprimit . Sit nu. 49326 per 24 dividendus .

Divi-

Dividendus	49, 326	24	Diviſor
Productum	48	2055	Quotiens
Reſiduum	1		
II. Membrum	13		
Productum	0		
Reſiduum	13		
III. Membrum	132		
Productum	120		
Reſiduum	12		
IV. Membrum	126		
Productum	120		
Reſiduum	(6		
Probatio.	49326	Numerus æqualis dividendo.	

EXPLICATIO. Primum dividendi membrum eſt 49, quod a reliquis puncto diſtinguo. Omnes notæ ſequentes totidem membra erunt. Totidem in quotiente notæ eſſe debent, quot in dividendo membra ſunt; ergo quatuor notis quotiens conſtabit. Ad tres præſcriptas regulas implendas:

I. Primum dividendi membrum divido, ut habeam quotientem. Poſſem ſtatim dicere: in 49 millibus quoties 24 millia? Bis; & 2 quotienti adſcriberem. At primam tantum notam attendens in dividendo, & in diviſore dico ſimplicius: in 4 quoties 2? Bis; & *quotienti* adſcribo 2, quæ valent millia. Diviſorem 24 duco in quotientem 2: productum eſt 48, quo exprimuntur millia. Productum 48 ſubduco a primo dividendi membro 49; *ſupereſt* 1, quod exprimit millia; cui proximum ſtatuo alterum membrum 3; unde habeo 13; nempe 13 centenaria, a quibus extrahenda ſunt 24, quæ quoque exprimunt centenaria.

II. Hoc alterum membrum pertracto ut primum, juxta tres datas regulas. Dico igitur: in 13 quoties 24? ſeu potius primam tantum notam attendens dividendi, & diviſoris: in 1 quoties 2? Ne ſemel quidem. Quotienti itaque adſcribo o: hic vero tum ſubductio, tum multiplicatio locum non habent.

III. Demitto 2 prope notas reſiduas; & tertium membrum exurgit 132, quod decades exprimet. Hoc juxta datas regulas pertracto, & dico: in 13 quoties 2? Sexies. Diviſorem 24 duco in notam 6 quotienti deſtinatam. At productum 144 quum dividendo 132 majus ſit, ab eo extrahi nequit; *numerus enim major a minore extrahi nequit.*

Ad quotientem itaque ſcribo 5 minora unitate. Indicant 5 quoties 24 decades in decadibus 132 continentur. Multiplicationem inſtituo, & productum evenit 120, quod a 132 ſubduco. Reſiduum eſt 12, prope quod demitto 6; & quartum terminum habeo 126, quo unitates exprimuntur.

IV. Quartum membrum ad datas regulas adhuc pertracto. In 12 quoties 2? Quinquies. Quotienti adſcribo 5. Subductione facta remanent 6, quæ lunula ſeparo; & diviſio explicit.

Quoties dividendi nota demittitur, opportunum eſt illam obliquo ſigno delere; ne notæ pertractandæ pertractatis miſceantur.

DEMONSTRATIO. Numerum per alium dividere eſt in dividendo partem ſumere a diviſore indicatam. Exempli gratia, dividere 500 per 50 eſt quinquageſimam ejus partem ſumere. Atqui ſtando regulæ propoſitæ in toto dividendo pars ſumitur a diviſore indicata. Oſtendo. In omnibus dividendi partibus partem ſumo a diviſore indicatam; ergo illam ſumo in toto dividendo; neque enim dividendus ab omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis diſtinctus eſt. Q. E. D.

48.

48. OBSERVATIO. *Diviſio probatur quotientem in diviſorem ducendo.* Diviſor totum, dividendum ſcilicet, in ſuas partes æquales partitur, quarum una a quotiente exprimitur. In toto, ſeu in dividendo totidem ſunt partes quotienti æquales, quot exprimit diviſor: ergo pars hæc, quæ quotientem exprimit, in diviſorem ducta totum dabit dividendo æquale.

Poſſet æque diviſor in quotientem duci. Productum eſſet idem, $100 \times 10 = 1000$. Pariter $10 \times 100 = 1000$.

49. NOTÆ. Ex dictis, & peractis patet:

I. Antequam nota quotienti adſcribatur, eam multiplicatione probandam eſſe; experiundum ſcilicet, num productum majus efficiat membro dividendi, ad quod refertur; & ſemper illam unitate minuere, donec productum partialem dividendum non excedat: debet quoque illum quam proxime fieri poteſt adæquare.

II. Quum diviſor pluribus notis conſtat, primam tantum attendendam eſſe, quæ ad partialis dividendi primam notam, aut primas duas refertur.

III. Ad probationem multiplicatione inſtituendam ſatis eſſe producta partialia addere, quæ ſubductioni inſervierunt. Producta in propoſito exemplo ſunt 48, 120, 120, & reſiduum 6. Deletis ceteris membris, producta hæc juxta columnarum ſeriem ſumpta, in quibus ſunt diſpoſita productum totale exhibent 49326 æquale dividendo; & probatio expleta eſt. Idem in ſequenti exemplo, & in quavis diviſione apparebit.

50. PROBLEMA. *Dividere 147475 per 362.*

Dividendus	1474. 75	362	Diviſor.
Productum	1448	$407 + \frac{141}{362}$	Quotiens
Reſiduum	26		
II. Membrum	267		
Productum	0		
Reſiduum	267		
III. Membrum	2675		
Productum	2534		
Reſiduum	(141		
Probatio.	147475	æquale dividendo.	

SOLUTIO. Primum conſidero, in quot dividendi notis ad ſiniſtram poſitis diviſor contineri poſſit; quum vero 362 in tribus primis notis 147 contineri nequeat, ſed tantum in quatuor primis 1474, has ab aliis 75 puncto ſejungo. Primum itaque diviſionis membrum eſt 1474 per 362 dividendum.

I. Quum hæc diviſio unica operatione fieri nequeat tantum centenaria numeri 1474 divido per centenaria numeri 362, dicens: in 14 quoties 3? Quatuor, & ultra. Quotienti adſcribo tantum 4. Diviſorem 362 in quotientem 4 duco, & productum 1448 a dividendo 1474 ſubduco. Remanent 26: & explicit prima pars diviſionis.

II. Prope reſiduum 26 demitto primam ſequentem notam 7; & erit alterum diviſionis membrum 267 per 362 dividendum. Centenaria quoque hujus per centenaria diviſoris 362 divido dicens: in 2 quoties 3? Nunquam. Quotienti igitur adſcribo 0; & altera pars expleta eſt.

III. Prope reſiduum 267 demitto notam 5; & tertium diviſionis membrum erit 2675 per 362 dividendum. Dico igitur: in 26 quoties 3?

3? Octies. Duco 362 in 8, & productum habeo 2896, quod quum majus ſit dividendo 2675, oſtendit quotientem 8 nimium eſſe. Itaque quotienti adſcribo 7, quæ duco in 362: productum 2534 a 2675 ſubduco: remanent 141; & quoniam nulla nota demittenda ſupereſt, diviſio expleta eſt: quotiens quæſitus eſt 407, & reſiduum 141 fractionis modo ſcribo illi ſubjiciens 362 (46).

51. NOTA. Quum diviſor plures notas continet, & plura membra dividendus, juvat cuique producto diviſoris in notam quotienti adſcriptam apponere notam, quæ hoc productum efficit: ſæpius enim productum hoc numeroſequenti inſervit, & a novæ multiplicationis tædio liberat. Exempli cauſa; poſtquam diviſorem 76842756 duxeris in 5, quæ quotienti adſcribis; prope productum 384213780 ſignum appone, quod tibi indicet quodnam productum det nota 5, hoc pacto 384213780 ═ 5. Poſtquam eundem diviſorem in 7 duxeris, quæ quotienti adſcribis, eodem modo deſigna productum 537899292 ═ 7. Cito noſces quam tibi commoda hæc ſigna accidant ad alias quotientis notas inveniendas, ut diviſione ſequenti, quæ œcumenicum exemplum erit.

Divid, 445632100 = 00000	76842756 Diviſor.
	579927 Qotiens.
384213780 = 5	
614183200	
537899292 = 7	
762839080	
691507804 = 9	
712542760	
691507804 = 9	
210379560	
153685512 = 2	
566940480	
537899292 = 7	
(29041188	

DIVISIONIS USUS.

52. COROLLARIUM, *Diviſio, inter ceteros uſus, parvis ſpeciebus in magnas convertendis inſervit*. Hoc fit ſummam parvarum ſpecierum dividendo per numerum exprimentem quoties magna ſpecies parvam continet. Exempli cauſa:

I. Ut pedes 36 in hexapedas convertam, divido 36 per 6: quotiens dabit 6. Porro ſextam dividendi partem ſumpſi: ergo dividendus eſt ſextuplo major. Si ergo ſextuplo major eſt, ſpeciem valet ſextuplo pedibus majorem, adeoque 6 hexapedas.

II. Pari modo ut 100 ſolidos in libras convertam, divido 100 per 20. Quotiens dabit 5.

At

At viceſimam dividendi partem ſumpſi: ergo totus dividendus ſpeciem æquat vicies ſolidis majorem, adeoque libras 5.

III. Eodem modo denari in ſolidos convertuntur, pollices in pedes, lineæ in pollices, datam ſummam per 12 dividendo. Eadem methodo unciæ in libras convertuntur unciarum ſummam per 16 dividendo; horæ in dies eas dividendo per 24; minuta in horas, ſecunda in minuta ſummam datam per 60 dividendo.

IV. Ad ſolidos in libras convertendos deme poſtremam dividendi notam, quæ ſolidos exprimet: reſiduum dividendi divide per 2, quotiens libras exprimet. Ratio eſt evidens. Quum poſtremam dividendi notam demis, notas omnes præcedentes ad decimam ſui valoris partem adducis (15): quum adhuc decimæ hujus partis dimidum aufers, eam ad viceſimam ſui valoris partem adducis, adeoque ad libras exprimendas. Exempli cauſa, ſolidi 108 fient libræ 5, & ſolidi 8.

Modus compendioſa diviſionis.

53. NOTA. *Diviſio aliquando breviari poteſt:*

I. Quum diviendus pluribus zero terminatur & diviſor eſt unitas, quam plura zero ſequuntur; a dividendo tot zero demenda ſunt, quot habet diviſor, & quotiens eſt reſiduum dividendi. Exempli cauſa ſi dividas 9000 per 100, quæris numerum centies dividendo minorem; atqui duo zero a dividendo demendo (quot habet diviſor) dividendum efficies decies minorem, & =90; ergo divides per 100 (18),

II. Quum diviſor eſt unitas, quam plura zero ſequuntur, & dividendus notis poſitivis terminatur; totidem notæ poſitivæ a dividendo demendæ ſunt, quot zero habet diviſor. Quotiens erit reſiduum dividendi addita fractione, cujus numerator erunt notæ a dividendo abſciſ-

ſciſſæ, numerator vero erit ipſe diviſor. Exempli cauſa, ſi 999 divido per 100; quotiens erit $9+\frac{99}{100}$, ſeu decem unitates dempta centeſima unitatis parte. Pariter $\frac{29}{10}=2+\frac{9}{10}$

III. Quum numerus dividi debet per 2 ſumi poteſt omnium notarum dimidium a ſiniſtris incipiendo. Si per 3, aut per 4 dividendus ſit, ſumitur tertia, aut quarta pars cujuſque notæ; atque ita dicas de aliis diviſionibus. Tunc reſiduum cujuſque numeri, qui pertractatur ſemper ad ſiniſtram incipiendo (25) mente jungitur notæ ſequenti.

Methodus hæc nova demonſtratione non indiget: dicta ſiquidem ſatis rem oſtendunt. Patet ſumpto dimidio, aut quadrante partium omnium dividendi ſummi dimidium, aut quadrantem totius dividendi. En tibi exempla.

54397	2 Diviſor	54397	3 Diviſor
(1	27198	2000	18132
	2	(1	3
Probatio	54397	Probatio	54397
54397	4 Diviſor	54397	5 Diviſor
1233	13599	1434	10879
(1	4	(2	5
Probatio	52396	Probatio	54397

§. V.

§. V.

MULTIPLICATIO COMPLEXA.

54. DEFINITIO. *Multiplicatio eſt complexa* quum aut multiplicandus, aut multiplicator, aut uterque numeros continet diverſi valoris; exempli cauſa libras, & ſolidos, hexapedas, & pedes.

In multiplicatione complexa quantitates invicem ducendæ ſunt aut *heterogeneæ*, aut *homogeneæ*; nempe aut *diverſæ naturæ*, ut quum libræ, & ſolidi in hexapedas ducuntur; aut *ejuſdem naturæ*, ut quum libræ, & ſolidi in libras, ſolidos, & denarios ducuntur. Duabus regulis hæ operationes tradentur.

Quantitates heterogeneæ.

55. REGULA. *Quum numerus complexus unius in numerum complexum alterius ſpeciei ducendus eſt*; puta, quum multiplicatione pretium mercis alicujus inquiritur; ſemper tamquam *multiplicandus* ſumendus eſt numerus continens quantitates illis ſimiles, quas productum exprimet. Poſita hac obſervatione, en ejus praxis methodum.

I. Uterque numerus ad minimam ſpeciem redigendus eſt. Exempli gratia, ſi primus numerus continet hexapedas, pedes, & pollices; omnia in pollices converte. Si alter numerus continet libras, ſolidos, & denarios, omnia in denarios converte.

II. Numeros ad minimam ſpeciem adductos invicem multiplica; ut in exemplo ſequenti, numerum denariorum duc in numerum pollicum.

III.

III. Productum hujus multiplicationis divide per numerum exprimentem quoties maxima multiplicatoris ſpecies minimam continet. Quotiens erit hujus complexæ multiplicationis productum.

IV. Adverte tamen, productum tantum in minima multiplicandi ſpecie expreſſum iri; nempe in denariis, ſi in denarios converſum fuerit.

56. EXEMPLUM. Quæritur *quanti valebit opus lateritium* hexapedarum 4, pedum 5, pollicum 8, cujus pretium in ſingulas hexapedas ſit librarum 3, ſolidorum 2, denariorum 4? Ad hunc valorem multiplicatione inveniendum:

I. Ad minimas ſpecies redigo multiplicandi, & multiplicatoris terminos; hexapedas, & pedes ad pollices; libras, & ſolidos ad denarios. Multiplicandus habebit denarios 748.
multiplicator pollices.. 356.

II. Numeros hos invicem duco. Productum erit 266288.

III Productum hoc divido per 72, quæ indicant quoties minima multiplicatoris ſpecies, nempe pollex, in majori, hexapeda ſcilicet, continetur. Quotiens erit 3698, cum reſiduo 32 per 72 dividendo. Quare valor hexapedarum 4, pedum 5, pollicum 8 eſt denariorum 3698, cum fractione $\frac{32}{72}$, quæ negligi poteſt, quum ne dimidium quidem denarium valeat.

IV. Quum productum ita diviſum denariis expreſſum ſit, illud in ſolidos, & deinde in libras convertendum eſt methodo ſupra tradita (52); ut productum ad minimos terminos adductum ſit.

DEMONSTRATIO. Ratio præcepti hujus eſt ſatis patens. Tantum tertius articulus negotium faceſſere poteſt, in quo dicitur, dividendum eſſe productum inventum per numerum exprimentem quoties maxima multiplicatoris ſpecies minimam continet. En rei hujus rationem.

I. Si

I. Si pollex quilibet valeret denarios 748, evidens eſt, pollicum 356 pretium futurum 266288 denariorum; numerus hic ſiquidem eſt productum 748 in 356 ductorum; ſeu ſeriei denariorum 748 toties ſumptæ, quot ſunt pollices; nempe 356 vicibus.

II. At ex hypotheſi denarii 748 ſunt pretium unius hexapedæ, non unius pollicis: quare quum hexapeda conſtet pollicibus 72, pretium unius pollicis eſt tantum pars ſeptuageſima ſecunda denariorum 266288. Ut igitur habeatur in denariis pretium pollicum 356, denarii 266288 per 72 ſunt dividendi. Q. E. D.

Methodus hanc operationem breviandi.

57. EXPLICATIO. Quum maxima multiplicatoris ſpecies ingenti numero exprimitur, tunc multiplicatio multo prolixior evadit; hæc maxima ſpecies ad minimam redacta maximum numerum exhibet.

Si, exempli cauſa, quærendus eſſet valor hexapedarum 5746, pedum 5, pollicum 8; & hexapedæ pretium eſſet librarum 3, ſolidorum 2, denariorum 4, ; ut in exemplo ſequente:

Multiplicandus......3 libræ....2 ſold...4 den.
*Multiplicat.*per..5746..per 5746.per 6746

Productum...17238 lib...11492 ſol. 22984 den.

I. Quærendus eſt ſeorſim valor hexapedarum 5746; nec illæ in pedes, & pollices ſunt convertendæ. Ad hoc en tibi methodum compendioſam. Multiplica ſucceſſive libras 3, ſolidos 2, denarios 4 per 5746: habebis jam pro hexapedis 5746 (37) productum ſupra indicatum in libris, ſolidis, & denariis.

II. Remanet adhuc quærendus valor pedum 5, & pollicum 8 methodo præcedente (56).

Va-

Valor hic eſt denariorum 706 cum fractione $\frac{32}{72}$ negligenda, quum ne dimidium quidem denarium æquet. Reſtat unice ut denarios in ſolidos, ſolidos in libras convertamus, ut in minimis terminis productum quæſitum habeamus.

DEMONSTRATIO. Quæ ad articulum ſecundum hujus demonſtrationis ſpectant jam demonſtrata ſunt (56). Quæ ad primum ſpectant patent. Quælibet enim hexapeda quum *tres libras valeat*, patet, hexapedas 5746 valituras libras ter 5746 = 17238; quum quælibet hexapeda *valeat præterea ſolidos* 2, patet, 5746 hexapedas valituras bis ſolidos 5746 = 11492; quum quælibet hexapeda valeat præterea denarios 4, patet, hexapedas 5746 valituras denarios quater 5746 = 22984. Q. E. D.

QUANTITATES HOMOGENEÆ.

58. REGULA. *Quum quantitates homogeneæ invicem ducuntur*, alteruter ex numeris has quantitates exprimentibus pro multiplicando ſumi poteſt. Methodus vero ſequenda hæc eſt:

I. Ad minimam ſpeciem in alterutro numero expreſſam ambo numeri adducendi ſunt.

II. Numeri ita redacti invicem ducendi ſunt.

III. Hujus multiplicationis productum dividendum eſt per quadratum numeri exprimentis quoties minima ſpecies in maxima continetur.

Quadratum numeri eſt productum hujus numeri in ſe ducti. Exempli cauſa, quadratum 6 eſt $6 \times 6 = 36$; quadratum 12 eſt $12 \times 12 = 144$; quadratum 100 eſt $100 \times 100 = 10000$.

59. EXEMPLUM. Quum extenſio in extenſionem ducenda eſt, ut hexapedæ, & pedes in hexapedas & pedes, & pollices; poſt adductos multiplicandum, & multiplicatorem ad minimam ſpeciem in his numeris contentam; numeri ambo redacti invicem ducuntur.

De-

Deinde productum dividitur per numerum exprimentem quoties maxima ſpecies in minima continetur. Atqui maxima ſpecies non eſt hexapeda in longitudine, quæ pollices 73 continet, ſed *hexapeda quadrata* quæ pollices quadratos 5184 continet. Productum ergo dividendum hic erit non per 72, ſed per 5184. Quotiens exprimet numerum quæſitum hexapedarum quadratarum, pedum, & pollicum quadratorum.

In hac multiplicatione uti quoque poſſumus methodo partium aliquotarum (70; vel methodo adhuc ſimpliciori, & faciliori, quam alibi indicabimus (461).

60. NOTA. Ex dictis ſequitur; *aliud exurgere ex duabus ſimplicibus menſuris invicem ductis, aliud ex harum menſurarum partibus invicem ductis.*

EXPLICATIO. Ut hoc diſcrimen intelligas, *unitatis natura* in utroque producto conſiderata attendenda eſt. Hæc unitas eſt res ipſa in producto menſurarum ſimplicium. In partium producto unitas eſt una ex partibus his aliquotis.

I. Productum menſuræ ſimplicis in menſuram ſimplicem eſt hæc eadem, *menſura ſimplex* toties aut numero, aut ſuperficie ſumpta, quoties productum indicat. Exempli cauſa, productum ſolidorum 4 in ſolidos 3 eſt numerus ſolidorum 12, ſeu quatuor ſolidorum ſeries, quæ ſingulæ in longitudine habent ſolidos 3. Pari modo productum hexapedarum 3 in hexapedas 4 eſt ſpatium hexapedarum 12, ſeu tres hexapedarum ſeries, quarum ſingulæ quatuor hexapedas longæ ſunt (*Fig.* 63.).

II. At productum partium, ſeu fractionum menſuræ ſimplicis per ejuſdem menſuræ partes aut fractiones, exprimit *hujus ipſius menſuræ partes aliquotas* datis vicibus ſumptas. Unitas, quæ in hoc producto conſideratur, eſt itaque ad-

admodum ab ea diverſa, quæ in præcedente producto conſideratur. Exempli cauſa productum denariorum 48, qui valent ſolidos 4, in denarios 36, qui valent ſolidos 3, eſt denariorum 1728, qui multo majoris ſunt valoris, quam ſolidi 12. Hic productum exprimit non unitates, quæ ſingulæ valeant denarium, ſeu duodecimam ſolidi partem, ſed *unitates*, quæ ſingulæ valent tantum ſolidi partem centeſimam quadrageſimam.

Pari modo productum pedum 18, qui valent hexapedas tres longitudine, in pedes 24, qui valent hexapedas 4 longitudine, & pedum 432, qui ultra 12 hexapedas valent. Hic productum exprimit non unitates, quæ ſingulæ valeant pedem, aut ſextam hexapedæ partem, ſed *unitates* quæ ſingulæ valent tantum triceſimam ſextam hexapedæ quadratæ partem, de qua hic agitur.

III. Duo producta, de quibus hactenus, eadem erunt, ſi *eadem unitas* ſumatur in producto duarum menſurarum ſimplicium, & in producto partium, ſeu fractionum earundem menſurarum. Habebimus enim in ſolidorum producto $4 \times 3 = 12$ ſoldis; & ex theoria fractionum (208, & 194), $\frac{48}{12} \times \frac{36}{32} = \frac{1728}{144} = \frac{12}{1} = 12$ ſolidis. Habebimus deinde in producto hexapedarum, $3 \times 4 = 12$; & $\frac{18}{6} \times \frac{24}{6} = \frac{12}{1} = 12$ hexapedis.

§. VI.

DIVISIO COMPLEXA.

61. DEFINITIO. D*iviſio complexa* eſt, quum aut dividendus, aut diviſor, aut uterque numeros continet diverſæ ſpeciei.

62. RE-

62. REGULA. *Ad numerum complexum per alium numerum complexum dividendum*:

I. Diviſor ad minimam, quam contineat, ſpeciem redigendus eſt.

II. Diviſio inſtituenda eſt a maximis dividendi ſpeciebus incipiendo, & ad inferiores procedendo.

III. Totus quotiens ducendus eſt in numerum indicantem quoties maxima diviſoris ſpecies minimam continet. Sequens problema hujus canonis exemplum erit.

63. PROBLEMA. *Marci, & unciæ 3 argenti empta fuerunt libris* 346, *ſolidis* 18, *denariis* 9, *quanti emetur marcus unus?*

SOLUTIO. Quæſtio ipſa indicat, dividendo libras 346, ſolidos 18, denarios 9, cujuſque marci pretium inventum iri. Quare diviſor eſſe debet marci 7, unciæ 2; qui ad uncias redactus erit unciarum 58. Primum itaque libras 346 divido per 58: quotiens eſt 5. Reſiduum deinde librarum ad ſolidos redactum divido, (additis dividendi ſolidis 18), per 58: quotiens eſt ſolidorum 18. Eodem modo tandem denarios divido: quotiens eſt denariorum 7 cum reſiduo $\frac{32}{58}$, quod negligi poteſt; nec enim dimidium denarium adæquat.

Lib. 346, ſol. 18, den. 6] unciæ 58. Diviſor

Unciæ valor = lib. 5, ſol. 19, denar. 7

Marci valor = lib 40, ſol. 152, den. 56

DEMONSTRATIO. Ratio trium hujus regulæ partium patet.

I. Diviſor primum ad minimam, quam continet ſpeciem redigendus eſt; ut habeatur numerus integer, qui ſine fractione adhiberi poſſit omnibus dividendi membris; qui in totidem par-

partes ſecandus eſt, quot indicat diviſor; quarum partium una a quotiente exprimetur.

II. Primo majores, ſubinde minores dividendi ſpecies per diviſorem redactum dividendæ ſunt. Diviſorem ſucceſſive omnibus dividendi membris admovendo evidens eſt, me ſucceſſive ab omnibus dividendi membris partem ſumere a diviſore indicatam, eamque ſucceſſive quotienti adſcribere. Ergo hac peracta operatione dividendum per diviſorem diviſero; partem enim a diviſore indicatam ab omnibus dividendi membris, ſeu partibus extraxero..

III. Totus quotiens in numerum integrum ducendus eſt indicantem quoties maxima diviſoris ſpecies minimam continet, qua diviſio facta fuit. Hac methodo ex duobus primis regulæ articulis patet, partem dividendi inveniri uni diviſoris unitati reſpondentem. In propoſito exemplo invenitur totius ſummæ pars quinquageſima octava, quæ uncia eſt. Erit ergo unius unciæ pretium, ſeu valor pars ſummæ a quotiente indicata; nempe lib. 5, ſol. 19, den. 7.

At marcus eſt unciæ octuplus; ergo ſumma marci valorem exprimens octupla eſſe debet ſummæ quotienti adſcriptæ; adeoque ut marci valor habeatur, quotiens in numerum ducendus eſt indicantem quot unciæ in marco contineantur; nempe in 8. Productum librarum 40, ſol. 152, den. 56. erit marci valor; & reducendo, marci valor erit lib. 47, ſol. 16, den. 8. Q. E. D.

64. NOTA. Quum diviſor eſt numerus incomplexus, primus, & tertius præcedentis regulæ articulus ad rem non facit. Exempli cauſa.

I. Si 26 vini dolia empta fuerunt lib. 4467, ſolidis 12, denariis 8, quanti dolium emptum fuit? Dividere oportet per 26 primum libras, deinde ſolidos, tandem denarios dividendi, ut in præcedente problemate. Redactis denariis

in

in ſolidos, & ſolidis in libras inveniemus libras 56, ſolidos 8, denarios 11, cum 10 denariis per 26 dividendis. Hoc erit unius dolii pretium.

II. Eadem methodo invenies quid ex data ſumma, puta librarum 7687 annui proventus quotidie expendere poſſis. Evidens eſt partem datæ ſummæ trecenteſimam ſexageſimam quintam inveſtigandam eſſe, adeoque ſummam per dies 265 eſſe dividendam.

III. Pari modo, ſi quæras ex ſumma pluribus diſtribuenda quid ſingulis contingat; data ſumma per capitum numerum dividenda eſt.

§. VII.

FRACTIONES UNITATIS.

65. DEFINITIO. Aliqua dicenda ſuperſunt de multiplicationibus, & diviſionibus, quarum multiplicatores, & diviſores ſunt partes, ſeu fractiones unitatis. *Fractiones unitatis* dicuntur numeri fractionarii, quorum unitas eſt numerator (13 III.). Exempli cauſa, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{16}, \frac{1}{100}$, ſunt fractiones unitatis, quæ alium numerum multiplicare poſſunt, aut dividere, ut 242, aut 3600, alioſque; ut ſequentibus problematibus apparebit.

PROBLEMA PRIMUM.

66. *Multiplicationem facere quum multiplicator minor eſt unitate.*

SOLUTIO. In quavis multiplicatione productum eſſe debet ad multiplicandum, ut multiplicator ad unitatem (34).

I. Quum

I. Quum ergo multiplicator eſt *unitati æqualis*, productum multiplicando æquale eſſe debet; exempli cauſa, $12 \times 1 = 12$; $236 \times 1 = 236$.

II. Quum ergo multiplicator *minor eſt unitate*, productum multiplicando minus eſſe debet ea ratione, qua multiplicator minor eſt unitate. Si ergo multiplicator eſt unitas diviſa per 2, vel per 3, vel per 4, vel per 10; productum erit multiplicandus diviſus per 2, vel per 3, vel per 4, vel per 10; atque ita de ceteris. Ergo $12 \times \frac{1}{2} = 6$; $12 \times \frac{1}{3} = 4$; $12 \times \frac{1}{12} = 1$.

67. COROLLARIUM. Hinc ſequitur, quum multiplicator fractio eſt, cujus numerator ſit unitas, idem eſſe, ſi multiplicandum in hanc fractionem ducas, aut illum per fractionis denominatorem dividas. Quare *hæc multiplicatio eſt vera diviſio, cujus diviſor eſt fractionis denominator*.

Multiplicatio per partes aliquotas.

68. NOTA. Hoc principio innititur ars numeros multiplicandi per *partes aliquotas* (61); per partes ſcilicet, ſeu fractiones unitatis, quæ in multiplicatore conſideratur. En exempla duo.

69. EXEMPLUM I. *Numerus 12 per libras 2, ſolidos 10 multiplicandus ſit*. Poſtquam in libras 2 ductus fuit, unde productum 24, in ſolidos 10 ducendus eſt.

I. Hic animadverto, ſolidos 10 eſſe libræ fractionem, ſeu partem aliquotam; libram vero eſſe unitatem, quam in multiplicatore conſidero; ad ſpeciem enim pertinet, qua ille componitur. Quare quum ſolidi 10 ſint libræ dimi-

midium, ſive $\frac{1}{2}$; productum 12 in ſolidos decem ductorum inveniam 12 per 2 dividendo; unde $12 \times \frac{1}{2} = 6$ libris (66).

II. Pari modo productum 12 in ſolidos 5, qui ſunt quarta pars libræ, ſive $\frac{1}{4}$, erit $12 \times \frac{1}{4} = 3$ libris. Productum 12 in ſolidos 2, qui ſunt decima pars libræ, ſive $\frac{1}{10}$, erit $12 \times \frac{1}{10} = \frac{12}{10} = 1$ libræ, & ſolidis 4.

70. EXEMPLUM II. *Hexapeda 18 in hexapedas 5, & pedes 3 ducenda ſint.* Ductis 18 in 5, unde hexapedæ 90; hexapedæ 18 in pedes 3 ducendæ ſunt.

I. Hic animadverto, 3 pedes eſſe hexapedam dimidiam; quare $18 \times \frac{1}{2} = 9$ hexapedis. Hinc $90 + 9 = 99$; erit ergo integrum productum hexapedarum 99.

II. Si loco hexapedarum 18 in pedes 3, 18 in pedes 2 ducendæ fuiſſent, animadvertiſſem, pedes 2 eſſe tertiam hexapedæ partem, ſive $\frac{1}{3}$. Quare $18 \times \frac{1}{3} = 6$ hexapedis. Productum integrum igitur fuiſſet 96 hexapedarum.

III. Si hexapedæ 18 in pedes 4 ducendæ fuiſſent, notaſſem, 4 pedes eſſe duas tertias hexapedæ partes; duxiſſem itaque 18 in tertiam partem, & bis productum ſumpſiſſem. Quare $18 \times \frac{1}{3} = 6$ hexapedis, quæ bis ſumptæ dant hexapedas 12. Igitur integrum productum fuiſſet hexapedarum 102.

Methodus hæc eſt fundamentum *menſuræ ſuperficierum*, & *ſolidorum*; de prima in planimetria agemus (461); de altera in Stereometria (613).

E PRO-

PROBLEMA SECUNDUM.

71. *Diviſionem facere quum diviſor minor eſt unitate.*

SOLUTIO. In quavis diviſione quotiens eſt ad dividendum ut unitas ad diviſorem (43).

I. Quare quum diviſor æqualis eſt unitati, quotiens dividendo æqualis eſt. 16 diviſa per $1 = 16$; 1000 diviſa per $1 = 1000$.

II. Quum ergo diviſor minor eſt unitate, eo quotiens major eſſe debet dividendo, quo unitas diviſore major eſt. Quare $\frac{16}{1} = 16$; at 16 diviſa per $\frac{1}{2} = 32$; 16 diviſa per $\frac{1}{3} = 48$; 16 diviſa per $\frac{1}{4} = 64$; & ita porro.

72. COROLLARIUM. In poſtremis exemplis ad quotientem obtinendum ſumpſimus duplum, triplum, quadruplum dividendi; nempe re ipſa 16 duximus in 2, 3, 4. Quare quum diviſor fractio eſt, cujus numerator eſt unitas, idem eſt ſi dividendum per hanc fractionem dividas, & ſi illum per hujus fractionis denominatorem multiplices. Itaque *hæc diviſio eſt vera multiplicatio, cujus multiplicator eſt fractionis denominator.*

73. CONCLUSIO. Quum arithmetica ſcientia ſit, cujus uſus neceſſarius, & ferme quotidianus, nihil nos hac in re deſiderandum relinquere voluimus. Speramus, tractatum hunc etſi brevem, ſumma, qua poteſt, claritate donatum eſſe, Qui ſcientiæ methodo arithmeticam non didicerunt, mirabuntur, ſi tractatum hunc legerint, quam parvi negotii ſit philoſophice, & geometrice id ſcire, quod illi cæca, & mechanica methodo tantum exequuntur.

ARI-

ARITHMETICÆ, ALGEBRÆ, ET GEOMETRIÆ PRINCIPIA SIVE MATHESEOS ELEMENTA

TRACTATUS II.

ALGEBRA.

74. DEFINITIO. ALgebra eſt *ſcientia quantitatis in genere* nonnullis ſignis expreſſæ, quorum ſignificatio a ſignorum natura non determinetur. Signa, quæ uſurpantur, ſunt literæ alphabeti; primæ ad *quantitates notas*, poſtremæ ad *quantitates incognitas* deſignandas,

I. Algebra matheſeos pars eſt, quam ab Arabibus accepimus: hi vero veroſimiliter eam a Græcis acceperunt. Si enim ſcientia hæc Platoni, Pythagoræ, Archimedi, Euclidi, Apollonio Pergæo ignota fuiſſe videtur, ut multa probabilitate plerique autumant; certum eſt celebris Diophanti ætate notam fuiſſe, & multum profeciſſe ineunte jam quarto æræ Chriſtianæ ſæculo, ut hujus auctoris opere nobis conſtat, cui titulus: *Quæſtiones arithmeticæ Diophanti*.

II. Si Arabia phyſicas, ac mathematicas diſciplinas felicibus Græcorum ſæculis genitas excepit, atque ſervavit; non ita eas ampliavit, atque perfecit; neque enim natio hæc acuta magis, quam profunda, magis ingenio præſtans, quam inveniendi ſagacitate donata, magis ab aliis excipere apta, quam alios erudire, hac in re quidquam ampliaſſe, aut perfeciſſe videtur. Omnia Græcorum inventa poſtquam diu apud Arabes depoſita jacuerunt, alias regiones inviſere debebant, ut vegetarent, & novam quamdam ſpeciem induerent. Ab Arabia in Europam translata a Leonardo Piſano ineunte ſæculo decimo quinto, algebra ſummo ſtudio a pleriſque arithmeticis, & geometris excepta fuit. Vieta Pontaneti in Pictavia natus ejus uſum ſimpliciorem, atque ampliorem reddidit; ſæculo vero proxime ſuperiore celebris Carteſius, qui inventionis ſpeciem rei cuilibet, quam pertractaret, inferebat, illam ad id faſtigium extulit, ad quod ferme poſtremis hiſce temporibus evecta fuit.

III. Algebra eſt arithmetica ſignis expreſſa; ſeu peculiaris eſt ſermonis ſpecies, quo breviter geometricorum ratiociniorum ſeries exprimitur, quæ mens aut nullo modo, aut non niſi ſummo conatu retinere poſſet, ſine artis auxilio, a qua ad technicam methodum adducuntur (250), paucis figuris, expreſſionibus ſimpliciſſimis, & percipi facillimis tum in earum compoſitione, tum in ſolutione. Etſi præcipue in *diſcreta quantitate* verſetur, ſive in numeris, evidens eſt, illam æque in *quantitate continua* verſari poſſe; quælibet enim extenſionis ſpecies numeris deſignari poteſt. Linea, exempli cauſa, tanta longitudine non eſt, niſi quia aliam continet tot vicibus ſumptam aut ut menſuram, aut ut unitatem. Idem de ſuperficiebus dicas, & de ſolidis, quæ non ſunt, exempli gratia, pollices mille quadrati,

aut

aut cubici, niſi quia pollicem quadratum, aut cubicum millies continent. Quare lineæ, ſuperficies, ſolida exhiberi poterunt tamquam numeri ſignis univerſalibus. Hinc apparet qua ratione *Algebra ſit veluti ſcientia media inter arithmeticam, & geometriam*, & cui innitatur uſus a celebri Carteſio inventus algebræ (ſeu analyſis algebricæ) ad varias circuli curvas; uſus enim algebræ ad elementaris geometriæ problemata ſolvenda Carteſio antiquior eſt.

III. Magna algebræ utilitas in eo ſita eſt, quod ad omne magnitudinum genus, ad extenſionem, ad velocitates, ad pondera, ad numeros, ad tempora adhiberi poſſit; deinde quod æque notas, atque ignotas quantitates pertractat. Literæ elementariæ has quantitates referentes, quæque earum ſunt veluti ſymbolum, & expreſſio, dicuntur *quantitates algebricæ*; ars vero has quantitates ita expreſſas pertractans *algebra* nuncupatur.

Algebra nihil habet, quod deterreat, præter objectum indeterminatum, & ſignorum apparatum; ſpectra hæc, quæ mens expaveſcit, facile evaneſcent. Hoc tractatu, & duobus ſequentibus apparebit, algebram eſſe geometriæ, quod aquilæ alæ ſunt; non incommodo ſunt, ſed auxilio, quo facili, & tuta via ad luminis regionem attollitur.

SIGNA, ET QUANTITATES ALGEBRICÆ.

75. AXIOMA. *Quantitates algebricæ, ut numericæ, pertractari poſſunt.*

EXPLICATIO. Poſſunt ſcilicet hæ quantitates invicem addi, aliæ ab aliis ſubduci, invicem multiplicari, aut dividi. Quum literæ invicem ut notæ arithmeticæ componi nequeant, literas pertractando ſignis utimur, quæ ſunt.

I. Signum +, ſive additionis, quod ſignifi-

cat *plus*. Exempli cauſa, $a + b$ ſignificat a plus b, ſive quantitatem a additam quantitati b.

II. Signum —, ſeu ſubductionis, quod ſignificat *minus*. Exempli cauſa, $a - b$ ſignificat a minus b; ſeu quantitatem a ſubductam a quantitate b.

III. Signum ×, ſeu multiplicationis, quod ſignificat *ductum in*. Exempli gratia, $a \times b$, ſignificat a ductum eſſe in b.

IV. Signum diviſionis, lineola ſcilicet duabus algebricis quantitatibus altera alteri ſuperpoſitæ interjecta. Exempli cauſa $\frac{a}{b}$ ſignificat, a diviſum eſſe per b.

V. Signum =, aut æqualitatis, quod ſignificat *æquale*; exempli cauſa $a = b$, ſignificat, a eſſe æquale b.

VI. Signum > quod ſignificat *majus*. Exempli cauſa $a > b$, ſignificat, a majus eſſe, quam b.

VII. Signum <, quod ſignificat *minus*. Exempli cauſa, $a < b$, ſignificat, a minus eſſe, quam b.

VIII. Signum ∞, quod ſignificat *infinitum*. Exempli cauſa, $\infty\, a$ ſignificat, quantitatem a eſſe infinitam.

IX. Signum $\surd$, quod ſignificat *radicem*. Exempli cauſa $\surd a$ ſignificat radicem quantitatis a.

76. NOTA. Quum literæ alphabeti nullum per ſe valorem habeant, poſſumus his literis quam libuerit quantitatem ſignificare. At quando ſemel uni literæ *datum valorem* tribuimus, hic illi in univerſa ſupputatione ſervandus eſt.

Quod vero ſpectat ad *quantitatum algebricarum indeterminationem* facile hoc terriculamentum evaneſcet. Si quantitates 5, & 4 ſimul addere vellem ad efficiendam quantitatem 9; evidens eſt mihi liberum eſſe quovis ſigno uti ad has tres quantitates indicandas, puta tri-

bus

bus literis *a*, *b*, *c*; tunc vero ſummam 5 + 4 = 9 exhiberi hac alia expreſſione $a+b=c$.

Pari modo ſi invicem ducere vellem quantitates 5, & 6 ad habendum productum 30, evidens eſt, me has quantitates exhibere poſſe tribus literis *m*, *n*, *p*; tunc vero multiplicationem 5 × 6 = 30 expreſſum iri hac alia ratione $m \times n = p$. Hæ omnes hypotheſes, ſive hæc poſtulata evidenter non repugnant.

DEFINITIONES.

77. DEFINITIO I. *Terminus algebricus* dicitur litera, ſeu plures ſimul collectæ nulla ſignorum +, & — interpoſitione. Exempli gratia *a*, *b*, *ab*, *abc*.

Termini poſitivi dicuntur, quos præcedit ſignum +; *termini negativi*, quos præcedit ſignum —. Quum nullum ſignum præcedit, terminus cenſetur affectus ſigno +. In quantitate $a + ab - abc - bc + acd$ tres ſunt termini poſitivi, duo negativi.

78. DEFINITIO II. *Termini ſimiles* dicuntur, qui iiſdem ipſis literis toties utrobique ſcriptis deſignantur. Quare in quantitate $ab - ab + 5ab + abc$ tres primi termini ſunt ſimiles, poſtremus diſſimilis.

79. DEFINITIO III. *Quantitates incomplexæ*, ſeu ſimplices, aut monomiæ dicuntur, quæ ſolitariæ ſunt; quas ſcilicet nulla alia quantitas adjecta ſigno +, aut — præcedit, aut ſequitur. Quare — *a* eſt quantitas incomplexa; ſicuti quoque + *ab*, — *abcd*, + *aaa*, — *aaa*.

80. DEFINITIO IV. *Quantitates complexæ*, aut polynomiæ dicuntur, quæ pluribus terminis conſtant ſimul conjunctis interpoſitione ſignorum +, & —. Quare quantitas $ab - cd - bd$ eſt quantitas complexa tribus terminis conſtans, *ab*, *cd*, *bd*. Quantitates complexæ di-

dicuntur binomiæ, trinomiæ, quadrinomiæ, ſeu abſolute *binomia*, *trinomia*, *quadrinomia* a numero terminorum, quibus conſtant.

81. NOTA. Quum in quantitate complexa plures in ſeriem ſunt termini negativi, *qui primum ſequuntur ejus valorem non minuunt*. Exempli gratia, in quantitate + 12 − 5 − 3 non intelligas a 12 ſubducenda eſſe 5 − 3, ſeu 2; ſed a 12 ſubducendos eſſe numeros 5, & 3, qui efficiunt 8. Quare 12 − 5 − 3 = 4. Eadem ratione 12 − 5 + 3 = 10; terminus enim poſitivus + 3 auget primum terminum poſitivum + 12, ſeu minuit terminum negativum præcedentem − 5.

Idem de quantitatibus algebricis dicendum, quum plures terminos negativos in ſeriem continent: hi omnes a præcedente poſitivo ſubduci debent; nec quo ordine termini diſpoſiti ſint attendendum eſt. Quare $a + b - c - d$ idem eſt, ac $a - c + b - d$.

82. DEFINITIO V. Quum duæ quantitates æquales invicem comparantur iis interpoſito ſigno =; hoc dicitur eſſe *æquatio*, ſeu *æqualitas*. Exempli cauſa $5 + 3 = 8$, ſeu $a + b = c$ eſt æquatio.

Duæ quantitates, quæ comparantur, dicuntur *membra æquationis*. Quantitas ſiniſtra ſigno æqualitatis eſt *primum membrum*; quantitas dextera *alterum membrum*.

83. NOTA. Quantitates algebricæ conſiderari poſſunt aut ſimul conlatæ augmento, aut imminutione: hæc eſt *arithmetica quantitatum algebricarum*; aut elevatione ad diverſas potentias: eſt hæc *elevatio*, & *extractio quantitatum algebricarum*. Hæc duo breviter, at dilucide, pertractanda ſuſcipimus.

AR-

ARTICULUS PRIMUS.

Arithmetica Algebrica.

PARAGRAPHUS PRIMUS.

ADDITIO, ET SUBDUCTIO.

84. REGULA I. GEometræ *algebricas quantitates addunt* eas in ſeriem deſcribendo earum ſignis non mutatis. Ut addantur $+a$, & $+b$ ſcribitur ſimpliciter $a+b$; ut addantur ab, $+abc$, $-acd$, ſcribitur $ab+abc-acd$; atque ita de ceteris. Methodus hæc ipſa per ſe patet.

85. REGULA II. *Subductio algebrica* fit quantitates algebricas in ſeriem deſcribendo mutatis ſignis quantitatis ſubducendæ, nempe $+$ in $-$, & $-$ in $+$. Exemplum. Ut ſubducas quantitatem $+b$ a quantitate $+a$ ſcribe $a-b$. Ut ſubducas $ab-cd$ a quantitate $bc+cd$ ſcribe $bc+cd-ab+cd$. Rei hujus ratio eſt, quia:

I. Quum quantitas poſitiva $+b$ ſubducitur a quantitate quavis $+a$, quantitas $+a$ imminuitur tota quantitate $+b$, quæ ſubducitur; ſcribendum igitur $a-b$. Ergo ſignum $+$ quantitatis ſubducendæ mutari debet in $-$. Sit $+b=10$ nummis, & $+a=20$ nummis; ſi ab a ſubducitur $+b$, habebimus $+20$ nummos -10 nummos; ſive $a-b$.

II. Qui quantitatem negativam $-b$ ſubducit a quantitate quavis $+a$ auget quantitatem a tota quantitate b; ſcribendum igitur $a+b$; ergo ſignum $-$ quantitatis ſubducendæ mutari debet in $+$.

MUTATIO SIGNORUM.

86. OBSERVATIO. Hæc mutatio ſignorum in algebrica ſubductione clarius explicari debet, ut omnis tollatur ambiguitas.

In algebra *quantitates poſitivæ, & negativæ æque reales ſunt.* Poſtremæ non ſunt ſimplex primarum negatio. Sunt ipſæ in ſe æque reales, & poſitivæ, ac primæ ſint; hoc diſcrimine, quod quantitates negativæ ſunt poſitivis oppoſitæ. Exempli cauſa.

I. Sit mobile a duabus viribus vere motricibus impulſum directione oppoſita ita, ut una a alteram b excedat. Vires hæ in ſe æque reales ſunt; at quum poſtrema b a primæ a actione elidatur; primam a, quæ motum in ſua directione parit, conſidero ut poſitivam; alteram b quæ perſeveranter primæ actioni opponitur, ut negativam; actio primæ, ſubducta alterius reſiſtentia, erit $+a$.

Verum ſi ab hac quantitate poſitiva $+a$ demam quantitatem oppoſitam, & negativam $-b$; patet, motum in directione primæ auctum iri tota quantitate, quæ illi reſiſtebat, ſeu toto motu in partem oppoſitam $-b$; & tunc motum mobilis in directione primæ fore non jam $+a$, ſed ex hac ſubductione fore $+a+b$.

II. Pari modo, ſi debeam nummos 10, qui ſunt quantitas negativa $-b$ in bonorum meorum ſumma, bona mea, dempto hoc debito, erunt $+a$.

Si vero quiſpiam hoc debito me abſolvens mihi adimeret quantitatem negativam $-b$, evidens eſt, tunc bona mea auctum iri toto valore hujus debiti, ſive hujus quantitatis negativæ $-b$, & tunc bona mea non jam fore $+a$, ſed ex hac ſubductione fore $a+b$.

III. Hinc intelliges, ut initio monuimus, quantitates tum poſitivas, tum negativas æque

in

in ſe reales eſſe; adeoque negativas non eſſe ſimplicem poſitivarum negationem, aut abſentiam. Quare in primo exemplo, quantitas negativa reſpectu motus in directione primæ vis non eſt jam, quod motus in illa directione non habeatur, ſed quod habeatur motus oppoſitus, ſeu directione oppoſita. Ita quoque quantitas negativa reſpectu bonorum, non eſt, quod bona non habeantur, ſed quod debeatur.

87. COROLLARIUM. *Ex his principiis ſequitur, idem in algebra eſſe ſi ſubducas* $+$, *ac ſi addas* $-$; *ſi ſubducas* $-$, *ac ſi addas* $+$.

COEFFICIENTIA, ET REDUCTIO ALGEBRICA.

88. DEFINITIO. Ad compendioſam algebricam expreſſionem pro $a+a$ ſcribitur $2a$. Sicuti enim in numeris idem eſt $4+4$, ac bis 4, ſeu $2\times4=8$; ita in literis $a+a$ idem eſt, ac bis a, ſeu $2\times a=2a$. Eadem ratione pro $a+a+a$ brevius ſcribes $3a$; atque ita de ceteris.

Nota terminum algebricum præcedens dicitur *coefficiens*. Exprimit hoc quoties idem terminus ſcribi debeat ſive ſigno $+$, ſive ſigno $-$; ſeu potius quoties addi debeat, aut ſubduci. Methodus hæc compendioſa dicitur *reductio*; nec adhiberi poteſt, niſi in terminis ſimilibus. Quum terminus coefficiente caret, cenſetur ejus coefficiens eſſe unitas. Quare $a=1a$.

89. COROLLARIUM I. Hinc ſequitur, $a+2a+4a$ reduci ad $7a$; $-a-2a-5a$ reduci ad $-8a$. *Quare quum ſigna terminorum ſimilium eadem ſunt, reductio fit coefficientium additione.*

90. COROLLARIUM II. Sequitur quoque, terminos $+a-a$ invicem deſtrui; quantitas enim a ſe ſubducta nulla fit. Quare $5a-2a$

reducuntur ad $3a$; $-5ab-2ab$ reducuntur ad $-3ab$. *Adeoque quum ſigna terminorum ſimilium diverſa ſunt, reductio fit minus coefficiens a majori ſubducendo.*

Poſt additionem, & ſubductionem, & generatim poſt quamvis algebricam operationem termini ſimiles reducendi ſunt, ſi qui ſint, ut expreſſio brevior evadat.

§. II.

MULTIPLICATIO.

91. DEFINITIO. Quantitatem in quantitatem ducere eſt primam toties ſumere, quoties altera indicat. In quavis multiplicatione ſive numerica, ſive algebrica unitas eſſe debet ad multiplicatorem, ut multiplicandus ad productum (34).

Multiplicatio algebrica eſt aut *incomplexa*, aut *complexa*: incomplexa eſt, quum multiplicandus, & multiplicator unico termino conſtant ſinguli; complexa eſt, quum ambo, aut alteruter plures habet terminos.

EXPONENS ALGEBRICUM.

92. DEFINITIO. *Exponens algebricum* dicitur nota literæ poſtpoſita: ſignificat, literam, quam ſequitur, in ſeductam fuiſſe, ut ad ſuum quadratum, aut cubum, aut ad ſuam quartam potentiam efferretur; atque ita porro. Exempli cauſa a^2 indicat, quantitatem a ad quadratum elevatam eſſe; a^3, quantitatem a elevatam eſſe ad cubum; $a^2b^2c^2$ indicat, totum hunc terminum elevatum eſſe ad ſuum quadratum; a^3b^3 indicat, totum hunc terminum elevatum eſſe ad ſuum cubum; & huic æquivalet bbb.

Ex-

Exponens, ut apparet, expreſſioni algebricæ ſimpliciori reddendæ inſervit. Loco ſcribendi *aaabbbccc* ſcribimus $a^3b^3c^3$; pro *aaaa* ſcribimus a^4; atque ita de ceteris.

Quum quantitas algebrica exponens non habet, cenſetur pro exponente habere unitatem. Quare $a = a^1$; $abc = a^1b^1c^1$; $ax^3 = axxx$.

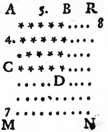
Magnum eſt diſcrimen inter coefficiens, & exponens; exempli cauſa, inter $3a$, & a^3. Etenim $3a = a + a + a$ additionem præbet; at $a^3 = aaa$ productum exhibet. Coefficiens (88) additionem indicat, exponens multiplicationem.

Ut duo termini algebrici invicem ducantur, ſæpius quatuor pertractanda ſunt: ſigna, coefficientia, literæ, exponentia; ut in regulis poſt lemma ſequens ſtatuendis apparebit.

L E M M A.

93. *Duæ quantitates invicem ductæ idem productum efficiunt, utcumque invicem ducantur.*

DEMONSTRATIO. Sit ſeries punctorum AB = 5, & ſeries AC = 4, quæ invicem ducendæ ſint.



I. Evidens eſt, idem fore productum ſive 5 in 4 ducantur, ſive 4 in 5. Productum enim ſemper erit numerus punctorum in rectangulo AB DC contentorum. Quare AB × AC dat productum huic rectangulo æquale, uti & AC × AB. 5 × 4, vel 4 × 5 productum dant huic rectangulo æquale.

II. Auge modo, vel minue punctorum ſeries ABR, ACM: productum ſerierum utcumque invicem ductarum erit ſemper punctorum numerus efficiens rectangulum AMNRA, quod ex duabus ſeriebus invicem ductis exurget. Atqui hic punctorum numerus ſemper idem eſt, ſive

ſive ſeries A R in ſeriem A M ducatur, ſive hæc in illam.

III. Sit modo productum inventum = 20, exempli cauſa, quod per quamvis quantitatem 3 multiplicandum ſit. Dico novum productum ex hac nova multiplicatione adhuc idipſum futurum ſive 3 in 20, ſive 20 in 3 ducantur. (*Fig.* 93).

Patet ſiquidem, quum prima quantitas 20 repræſentetur ſuperficie ABCF, & altera quantitas 3 profunditate CD; productum fore ſemper æquale numero cuborum, ſeu diviſionum, quas exhibet ſolidum ABCFGD. Atqui numerus hic diviſionum idem ſemper eſt, ſive ſuperficies ABCF in profunditatem CD, ſive hæc in illam ducatur. Ergo duæ quantitates ſemper idem productum exhibent, utcumque invicem ducantur. Q. E. D.

MULTIPLICATIO INCOMPLEXA.

94. REGULA I. *Generatim multiplicatio algebrica fit multiplicandum, & multiplicatorem ſimul ſcribendo.* In algebra ſiquidem aa idem eſt, ac $a \times a$; ita aaa idem eſt, ac $aa \times a$, ita quoque $aabb$ idem eſt, ac $ab \times ab$. Quare ad duos algebricos terminos invicem ducendos ſatis eſt eos proxime ſcribere nulla diviſione. Ordo, & claritas poſtulant, ut literæ ordine alphabetico ſcribantur. Sequens regula indicabit quando ſignum +, vel − producto præfigendum ſit.

95. REGULA II. *Quum multiplicandi, & multiplicatoris ſigna eadem ſunt, productum affici debet ſigno + ; quum ſigna diverſa ſunt, productum affici debet ſigno −.*

DEMONSTRATIO. Multiplicandus, & multiplicator poſſunt ambo habere ſignum +, aut ſignum −; aut alter +, alter −. In omnibus caſibus ſtat regula.

I. Si

I. *Si ambo affecti ſint ſigno* $+$, etiam pro-
ductum ſigno $+$ affici debet. Exempli cauſa: $+a \times +b = +ab$. Quantitas enim poſitiva du-
cta in quantitatem poſitivam evidenter præbet productum poſitivum.

II. Si diverſis ſignis affecti ſint, ut alter ſigno $+$, alter ſigno $-$ affectus ſit, productum ſingo $-$ affici debet. Exempli gratia, $+ab \times -$
$b = -ab$. Ratio patet in numeris; $5 - 4 \times 6$
$= 30 - 24$; non vero $= 30 + 24$. Multipli-
candus enim $5 - 4 = 1$; atqui $1 \times 6 = 6$, ſive
$= 30 - 24$. Quare $- \times +$, ſeu $+ \times - = -$.

III. Si tum multiplicandus, tum multiplica-
tor effecti ſint ſigno $-$; productum affici debet ſigno $+$. Exempli gratia, $-a \times -b = +ab$.
Ratio patet in numeris; nam $6 - 2 \times 4 - 2 =$
$24 - 8 - 12 + 4$; ubi vides productum ex -2
in -2 dare $+4$, non -4. Re ipſa multipli-
candus $6 - 2 = 4$; multiplicator quoque $4 - 2$
$= 2$; atqui $4 \times 2 = 8$; ſive $= 24 - 8 - 12 +$
4. Quare $- \times - = +$.

Theoria hæc cohæret iis, quæ de poſitivis, & negativis quantitatibus alibi diximus (86): eam adhuc clarius explicare pergimus, ut tum multiplicationi, tum diviſioni algebricæ faciliorem viam ſternamus.

96. THEOREMA. *In algebra plus in plus, aut minus in minus dant plus; plus in minus, aut minus in plus dant minus.*

DEMONSTRATIO. Ad multiplicationem inſtituendam toties multiplicandus ſumi debet, quoties unitas in multiplicatore continetur.

Ergo I. Si multiplicandus eſt $+a$, & multiplicator $+b$, toties ſumenda erit quantitas poſitiva a, quoties quantitas poſitiva b unitatem continebit. Quare ſi b tres unitates contineat, productum ab erit quantitas poſitiva $3a$, adeoque productum ſigno poſitivo afficietur, $+ab$.

Ergo II. Si multiplicandus eſt poſitivus $+a$
& mul-

& multiplicator negativus $-b$, vel -3; magnitudo poſitiva $-a$ ſumenda erit non ter, ſed $-$ ter; multiplicator enim non continet tres unitates, ſed $-$ tres unitates. Quare productum idem erit, ac $-3a$; & ſigno negativo afficietur. Quantitatem enim ſumere $-$ tribus vicibus, eſt illam tribus vicibus in producto omittere (a), ſive illam tribus vicibus a producto ſubducere $-ab$.

Ergo III. Si multiplicandus eſt negativus $-a$, & multiplicator poſitivus $+b$; quantitas negativa, ſive defectus $-a$ toties ſumendus erit, quoties unitas in b continetur, nempe ter; adeoque productum ab id ipſum erit, ac $-3a$ & ſigno negativo adhuc afficietur $-ab$.

Ergo IV. Si multiplicandus eſt nagativus $-a$, & multiplicator quoque negativus $-b$; quantitas negativa, ſive defectus $-a$ ſumendus erit non jam ter; multiplicator enim $-b$ non continet tres unitates; ſed $-$ ter; multiplicator enim $-b$ continet $-$ tres unitates. Atqui ſumere $-$ ter eſt ter a producto ſubducere, aut auferre; & quantitatem negativam, ſeu defectum ter a producto ſubducere eſt illi hujus negativæ quantitatis, ſeu defectus oppoſitum ter addere; quantitas enim negativa deſtrui, aut auferri nequit, niſi oppoſita quantitate (86). Quare ſumere -3 defectum $-a$ eſt producto addere $+3a$; adeoque productum ab id ipſum eſt quod $-3a$; & ejus ſignum eſt poſitivum $+ab$. Q. E. D.

97. COROLLARIUM. *Eadem regula, eademque demonſtratio valent in diviſione.*

EXPLICATIO. Ponamus dividendum $a = 6$ & diviſorem $b = 2$.

I. Si uterque affectus eſt ſigno $+$; dividendus

(a) *Non eſt illam tribus vicibus omittere, ſed negare*. Interpres.

dus 6 diviſorem 2 ter poſitive continebit; quare quotiens 3 afficietur ſigno +.

II. Si uterque affectus eſt ſigno —; defectus — 6 poſitive ter continebit (86) defectum — 2, qui — ter quotienti adſcribetur; quare quotiens 3 adhuc afficietur ſigno +.

III. Si dividendus eſt — 6, & diviſor + 2; defectus — 6 non continebit ter quantitatem poſitivam 2; ſed ter defectum, ſeu oppoſitum quantitatis 2; quare quotiens 3 afficietur ſigno —.

IV. Si dividendus ſit + 6, diviſor — 2; quantitas poſitiva 6 non continebit ter defectum — 2; ſed ter oppoſitum, ſeu quantitatem poſitivam 2; quare quotiens 3 afficietur ſigno —. Q. E. D.

MULTIPLICATIO COMPLEXA.

98. AXIOMA. *In algebra, ut in arithmetica ad habendum productum duarum quantitatum debent ſingula multiplicandi partes duci in ſingulas partes multiplicatoris.* Exempli cauſa, ad habendum productum quantitatis $a+b$ ductæ in $m+n$, debet quantitas a duci in m, & n; & quoque quantitas b in m, & n duci debet.

Quum diviſio ſit operatio multiplicationis inverſa; jam *ad habendum quotientem ſingula diviſoris partes ſingulas dividendi partes dividere debent.*

99. REGULA I. *Si multiplicandus eſt quantitas complexa, & multiplicator quantitas incomplexa; quilibet multiplicandi terminus in multiplicatorem ducendus eſt, habita ratione ſignorum.*

EXPLICATIO. I. $a+b+c$ duci debeat in n. Patet, in multiplicatorem poſitivum n duci debere tres poſitivos multiplicandi terminos; tunc productum erunt tres termini poſitivi $an+bn+cn$,

II.

II. Duci debeat $a - b + dd$ in $- n$. Patet, in multiplicatorem poſitivum duci debere ſucceſſive terminos omnes multiplicandi producta efficiendo alia poſitiva, alia negativa (96). Habebimus ergo productum $- an + bn - ddn$.

100. REGULA II. *Si multiplicandus, & multiplicator ſunt quantitates complexæ, totus multiplicandus in ſingulos multiplicatoris terminos ducendus eſt, habita ratione ſignorum.*

EXPLICATIO I. $aa + b + ac$ duci debeat in $a + b + c$. Multiplicator multiplicando ſubſcribetur, & quilibet multiplicandi terminus ducetur prius in primum multiplicatoris terminum deinde in alterum; tandem in tertium; ut hic apparet. Summa omnium horum productorum eſt productum totale.

$$\begin{array}{l} aa + b + ac \\ a + b + c \\ \hline aaa + ab + aac \\ aab + bb + abc \\ aac + bc + acc \end{array}$$

II. $aa - ab + b$ duci debeat in $- a + b$. Multiplicator multiplicando ſubſcribetur; & multiplicatio fiet mutatis ſignis ubi opus fuerit (96) ut hic apparet. Deinde termini ſimiles reducentur (88).

$$\begin{array}{l} aa - ab + b \\ - a + b \\ \hline - aaa + aab - ab \\ + aab - abb + bb \end{array}$$

101. REGULA II. *Si termini multiplicandi coefficientibus affecti ſunt; coefficientia invicem ducuntur*. Exempli cauſa, $3a \times 2b$ dant $6ab$. Ratio eſt, quia $3a = a + a + a$; ut jam monuimus; & $2b = b + b$. Atqui $a + a + a \times b + b$ dant $ab + ab + ab + ab + ab + ab = 6ab$; ergo $3a \times 2b = 6ab$.

102 REGULA IV. *Si quantitates multiplicandæ iiſdem literis exponentibus affectis exprimuntur, operatio breviatur addendo exponentia.* Exempli cauſa; $a^3 \times a^2$ dat a^5. Ratio eſt, quia $a^3 = aaa$, & $a^2 = aa$; atqui $aaa \times aa = aaaaa = a^5$.

Pari

Pari modo $b \times b^2 = b^3$; prima enim quantitas, quæ exponens expreſſum non habet, ſemper unitatem exponens habet. Quare $b \times bb = bbb = b^3$.

§ III.

DIVISIO.

103. DEFINITIO. Quantitatem per aliam dividere eſt exprimere quoties prima alteram continet, ſeu aliquam ejus partem. Multiplicatione productum quæritur, diviſione quotiens. Scuti $a \times a = aa$; contraria ratione $\frac{aa}{a} = a$; diviſio enim deſtruit quod multiplicatio produxit.

Diviſionis, & multiplicationis regulæ dantur pro literis, ſignis, exponentibus, coefficientibus. *Incomplexa* eſt, quum dividendus, & diviſor unicum habent terminum; *complexa*, quum alteruter, aut uterque plures habet. Quare aa diviſum per b eſt diviſio incomplexa: $a + b$ diviſa per d eſt complexa.

DIVISIO INCOMPLEXA.

104. REGULA I. Generatim diviſio algebrica fit diviſorem dividendo ſubſcribendo, linea interjecta. Exempli cauſa ab diviſum per a eſt $\frac{ab}{a}$. Ita quoque aaa diviſum per aa eſt $\frac{aaa}{aa}$, ſeu $\frac{a^3}{a^2}$. Quotiens modo affici debet ſigno $+$ modo ſigno $-$.

105. REGULA II. *Si dividendus, & diviſor eadem habent ſigna, quotiens afficietur ſigno* $+$; *ſi diverſa, ſigno* $-$. Exempli gratia ab diviſum per b quotientem habet $+\frac{ab}{b}$. Pari mo-

do

do $-ab$ diviſum per $-b$ quotientem habet $+\frac{ab}{b}$

Verum $+ab$ diviſum per $-b$ quotientem habet $-\frac{ab}{b}$; pari modo $-ab$ diviſum per $+b$ quotientem habet $-\frac{ab}{b}$ (97).

106. REGULA III. *In diviſione algebrica in dividendo deleantur literæ illi cum diviſore communes: reſidua ſunt quotiens.*

EXPLICATIO. Sit quotiens $+\frac{ab}{b}$ ſeu $\frac{ab}{b}$ cujus dividendus ſit ab. Docet regula, in dividendo deleri literam communem b; & a reſiduum dividendi eſſe quotientem hujus diviſionis.

Ut regulæ veritas appareat, ſit $a = 5$; $b = 10$; $a \times b$ erit $ab = 50$; en multiplicationem. Contra, ab diviſum per b erit 50 diviſum per 10; atqui $\frac{50}{10} = 5$, adeoque $= a$ dumtaxat. Ergo in diviſione $\frac{ab}{b}$ litera b dividendo, & diviſori communis evaneſcere debet, nec quotienti adſcribi; qui erit tantum a. Hic quotiens a erit aut poſitivus, aut negativus pro ſigno, quo afficietur; ſignum vero non mutatur quum literæ communes delentur.

Eadem ratione in quotientibus $+\frac{aaa}{aa}$, vel $-\frac{aaa}{aa}$ quotiens redactus eſt $+a$, vel $-a$.

Hic nota, quum dividendus, & diviſor literas communes non habent, diviſionem fieri non poſſe, ſed tantum indicari. Exempli cauſa, diviſio a per b effici nequit: tantum ita indicatur; $\frac{a}{b}$. Hoc indicat, quantitatem a dividi debere per quantitatem b, quum ad numeros devenietur.

Quum

Quum dividendus, & diviſor literas habent alias communes, alias non item; poſt deletas in utroque literas communes ad modum fractionis reliquæ ſcribuntur: hæ ſunt quotiens redactus quantum fieri poteſt. Exempli cauſa $\frac{aaam}{aan} = \frac{am}{n}$.

DIVISIO COMPLEXA.

107. OBSERVATIO. Diviſio complexa algebrica, ut & arithmetica, poſtulat; ut in quovis dividendi membro quæratur *quotiens*, *productum*, *reſiduum* (45): ut totius dividendi quotiens inveniatur omnium ſuarum partium, ſeu terminorum quotientem inveniendo. Etſi raro hæc diviſio obtineri poſſit, tamen quomodo ipſa fiat ſcire opportunum eſt.

108. REGULA I. *Si dividendus eſt quantitas complexa, & diviſor quantitas incomplexa; quemlibet dividendi terminum per diviſorem dividere oportet; & ſingulis vicibus quotientem ſcribere, qui quoque ſingulis vicibus in diviſorem duci debet, ut productum a dividendo ſubducatur, & reſiduum innoteſcat, ſi quod ſupereſt.*

EXPLICATIO I. Sit $ab - ad$ dividendum per a. Poſtquam diviſorem prope dividendum ſcripſerim, ut in diviſione arithmetica, interjecta lineola eos ſeparo, & aliam lineam ſubſcribo. Quotiens ſub diviſore collocabitur.

I. Primum terminum ab divido per a: *quotiens* eſt b (106), quem diviſori ſubſcribo. Quotientem b in diviſorem a duco: productum eſt ab. Hoc a primo dividendi membro ab ſubduco: nihil eſt *reſidui*. Primi hujus

$ab - ad$	a Diviſ.
$-ab + ad$	$b - d$
o o	Quotiens.

jus membri diviſio expleta eſt. Ad alterum tranſeo.

II. Alterum membrum negativum $-ad$ divido per diviſorem poſitivum a; *quotiens* eſt $-d$ (105). Quotiens $-d$ duco in diviſorem $+a$; & productum eſt negativum $-ad$ (97). Hoc a ſecundo dividendi membro ſubduco (85); nihil ſupereſt. Quare diviſio expleta eſt; & quotiens quantitatis $\frac{ab-ad}{a}$ eſt $b-d$.

EXPLICATIO II. Sit quantitas $8abbc - 12abcc + 4bbcf$ dividenda per $4bc$.

Dividendus	Diviſor
$\overset{0}{8abbc} - \overset{0}{12abcc} + \overset{0}{4bbcf}$	$4bc$ Diviſor.
Productum; ſignis mutatis	Quotiens.
$-8abbc + 12abcc - 4bbcf$	$2ab - 3ac + bf$.

I. Primum $8abbc$ divido per diviſorem $4bc$; & deletis literis utrique communibus, habeo quotientem $2ab$. Quotientem inventum duco in diviſorem; & habeo productum $+8abbc$; quod a dividendo ſubduco mutato ejus ſigno $+$ in $-$; & reductione facta deleo duos terminos $8abbc$, & $-8abbc$, qui invicem deſtruuntur; quod indico his terminis o ſuperſcribendo.

II. Alterum terminum $-12abcc$ divido per diviſorem $4bc$; & iiſdem peractis, quæ ſupra, habeo quotientem $-3ac$; & facta multiplicatione, ac terminorum ſimilium reductione remanet tantum $+4bbcf$.

III. Terminum hunc $4bbcf$ per diviſorem dividens, habeo quotientem $+bf$; & facta multiplicatione, ac reductione nihil ſupereſt; & res peracta eſt.

109. REGULA II. *Si dividendus, & diviſor ſunt ambo quantitates complexæ; res peragitur ut in diviſione numerica; advertendo tamen, terminos ſimiles reducendos eſſe, quoties aliquod diviſionis membrum pertractatum fuit.*

Exem-

Exempli gratia; ſi dividere oporteat $6abb - 2bbc - 3aab + abc$ per $2b - a$; poſtquam quantitates, ut infra, diſpoſueris, ita procedes.

0 0 0 0	Diviſor
$6abb - 2bbc - 3aab + abc$	$2b - a$
$-6aab + 3aab + 2bbc - abc$	$3ab - bc$

I. Primum dividendi terminum divides per primum diviſoris terminum; & habebis quotientem $3ab$, quod diviſori ſubſcribes.

II. Quotientem inventum $3ab$ duces in diviſorem $2b - a$: habebis productum $6abb - 3aab$; quod dividendo ſubſcribes.

III. A dividendo productum ſubduces mutatis ſignis, quod erit $-6abb + 3aab$.

IV. Terminos ſimiles in dividendo, & producto ſubducto reduces, & ſeſe deſtruentes delebis, ſive illis o ſuperſcribes.

V. His peractis, remanent in hoc exemplo termini $-2bbc + abc$ in dividendo, qui alterum diviſionis membrum efficiunt, quod ut in prima pertractandum eſt. Quum vero poſt redactos terminos ſimiles nihil ſuperſit, diviſio explicit.

110. REGULA III. *Si dividendus, & diviſor coefficientibus affecti ſunt, coefficientia dividenda ſunt.* Ratione illi oppoſita, qua in multiplicatione invicem ducuntur. Exempli cauſa $\frac{6ab}{2a} = 3b$.

111. REGULA IV. *Si dividendus, & diviſor ſunt eadem litera exponentibus affecta, exponentia invicem ſubducenda ſunt:* ratione illi oppoſita, qua in multiplicatione invicem adduntur (102). Quare $\frac{a^6}{a^2} = a^4$.

111. NOTA. *Si dividendus, & diviſor ſunt quantitates incomplexa, & eadem litera exponentibus affecta*; fieri poteſt:

I. Ut exponens dividendi *majus* ſit exponente

te diviſoris; tunc vero exponens quotientis erit poſitivum. Exempli cauſa, $\frac{a^3}{a^2} = a^3$; etenim $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$.

II. Ut exponentia dividendi & diviſoris ſint *æqualia*. Tunc exponens quotientis erit zero. Exempli cauſa, $\frac{a^3}{a^3} = a^0$; etenim $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. (Quantitas a^0 eſt quotiens $\frac{a}{a} = 1$.)

III. Ut exponens dividendi *minus* ſit exponente diviſoris. Tunc exponens quotientis erit negativum. Exempli cauſa; $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$; etenim $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$. (Quantitas a^{-3} eſt $= \frac{1}{a^3}$ vel $\frac{1}{aaa}$).

ALIÆ QUANTITATUM COMBINATIONES.

113. OBSERVATIO. Poſt perceptas numericas combinationes, & algebricas quantitatum, ut earum ſumma, aut differentia, aut productum, aut quotiens inveniretur; non abs re erit hic curſim inſpicere qua ratione, & quot modis tum regularibus, tum irregularibus datus quidam quantitatum numerus combinari, aut diſponi poſſit. Hæc obſervatio ſæpius utilis, imo neceſſaria eſſe poteſt pluribus in caſibus, quos hic recenſere omittemus.

114. PROBLEMA. *Dato quantitatum a, b, c, d, e, &c. numero, quot modis inter ſe combinari poſſint definire.*

SOLUTIO. I. Quantitates duæ *a*, *b*, duobus tantum modis diſponi poſſunt, *ab*, *ba*.

II. Tres quantitates *a*, *b*, *c*, diſpoſitiones admittunt ter binas, ſive ſex; poſita enim earum quavis in prima linea, duæ reliquæ duas diverſas diſpoſitiones admittunt: ſunt hæ diſpoſitiones ſex, quas hic vides.

abc, *acb*
bac, *bca*
cab, *cba*

III.

III. Quatuor quantitates *a*, *b*, *c*, *d*, diſpoſitiones admittunt quater ſex, ſeu 24. Poſita enim harum quavis in prima linea, tres reliquæ ſex diſpoſitiones habere poſſunt; quæ ſunt ſeu diſpoſitiones 24 diverſæ, quas quoque hic vides.

abcd	*abdc*	*acbd*	*acdb*	*adbc*	*adcb*
bacd	*badc*	*bcad*	*bcda*	*bdac*	*bdca*
cabd	*cadb*	*cbad*	*cbda*	*cdab*	*cdba*
dabc	*dacb*	*dbac*	*dbca*	*dcab*	*dcba*

IV. Pari modo, & eadem ratione quinque quantitates admittere poſſunt diſpoſitiones quinquies 24, ſeu 120; ſex quantitates admittunt diſpoſitiones ſexies 120, ſeu 720; ſeptem ſepties 720, ſeu 5040; octo octies 5040, ſeu 40320; atque ita porro per numeros ſequentes. Quare octo commenſales menſæ aſſidere poſſunt diſpoſiti modis diverſis 40320; octo toni octavæ muſicæ combinationes admittunt harmonicas, aut diſcordes 40320.

ARTICULUS II.

QUANTITATUM ELEVATIO, ET EXTRACTIO.

115. OBSERVATIO. VErſabitur hic articulus in quantitatum tum numericarum, tum algebri carum *compoſitione*, & *decompoſitione*. Numericarum compoſitio, & decompoſitio ad algebricarum compoſitionem, & decompoſitionem nobis viam ſternet. Compoſitio dicitur *formatio potentiarum*; decompoſitio *extractio radicum*.

116. DEFINITIO I. Numerus quicumque in ſe ductus productum efficit. Hoc *quadratum* dicitur; numerus, qui in ſe ductus productum edidit, dicitur *radix quadrata*. Exempli cauſa; $5 \times 5 = 25$. Numerus 25 conſideratus ut productus a 5 eſt quadratum; & numerus 5 eſt radix hujus quadrati.

117. DEFINITIO II. Numerus quicumque in ſe ductus *quadratum* efficit. Hoc quadratum ductum in numerum, a quo formatum fuit, novum productum edit, quod dicitur *cubus*. Exempli cauſa, $5 \times 5 = 25$; $25 \times 5 = 125$. Numerus hic 125 conſideratus ut productus a 5 primum in ſe ductis, mox in productum eſt cubus; & numerus 5 eſt hujus numeri *radix cubica*. Pari modo $10 \times 10 = 100$: en quadratum; $10 \times 10 \times 10 = 1000$; en cubum. In utroque caſu radix vel quadrata, vel cubica eſt 10.

118. DEFINITIO III. *Numerus quilibet dici poteſt radix*, ſi neque per ſe, neque per alium numerum productus conſideretur. Radix hæc vocatur *prima potentia*, quæ eſt numerus quilibet in unitatem ductus.

Productum radicis in ſe ductæ dicitur quadratum, ſeu *ſecunda potentia* hujus radicis. Productum quadrati in ſuam radicem dicitur cubus, ſeu *tertia potentia* hujus radicis. Productum cubi in radicem dicitur *quarta potentia* ſuæ radicis. Productum quartæ potentiæ in radicem dicitur *quinta potentia*; atque ita porro.

119. DEFINITIO V. *Quadratum perfectum* dicitur numerus, qui præciſe, & nullo reſiduo eſt productum radicis in ſe ductæ; uti 4, quæ ſunt quadratum 2; & 36, quæ ſunt quadratum 6, nullo reſiduo. *Quadratum imperfectum* dicitur numerus, qui ſupra quadratum perfectum reſiduum habet; uti 6, quæ præter quadratum radicis 2, quod eſt 4, duo præterea continent.

120. DEFINITIO V. Pari modo *cubus perfectus* dicitur numerus, qui præciſe, & nullo reſiduo eſt productum quadrati in ſuam radicem; uti 8, quæ ſunt cubus 2; uti 216, quæ ſunt cubus 6 nullo reſiduo. *Cubus imperfectus* dicitur numerus, qui præter cubum perfectum reſiduum continet; uti 10, quæ præter cubum

2, qui

2, qui eſt 8, continent adhuc 2; vel 250, quæ præter cubum 6, qui eſt 216, continent 34.

Ex potentiarum formatione earum decompoſitionem intelliges; ut tribus ſequentibus paragraphis oſtendemus.

121. DEFINITIO VI. Superficies, cujus quatuor anguli recti ſunt, & quatuor latera æqualia, *quadratum* eſt. Hujuſmodi eſt tali luſorii facies una.

Solidum ſex ſuperficiebus terminatum, quæ quadrata ſint, & cujus anguli recti ſint, eſt *cubus*. Hujuſmodi eſt talus luſorius.

Superficies quatuor angulis rectis terminata, & duo latera habens æqualia, duo inæqualia eſt *rectangulum*; hujuſmodi eſt regulæ planum, ſeu ſuperficies.

Solidum, cujus ſuperficies ſunt quadrata, aut rectangula, eſt *parallelepipedum*; hujuſmodi eſt trabs ad normam dolata; vel talus ſectione baſi parallela diviſus.

PARAGRAPHUS PRIMUS.

FORMATIO QUADRATI.

122. HYPOTHESIS. Sit linea AB, qua menti, & oculo omnes quadrati proprietates exhibebimus, ejuſque compoſitionem, ac decompoſitionem; quæ æque numeris, ac literis referri poterunt (*Fig.* 1.).

I. Si lineam hanc A B in ſe duco, quadratum A B F G habebo. Ponamus, eam exprimere hexapedas 20, ſeu talos 20. Lineam A B in ſe ducendo, productum erunt 20 ſeries hexapedarum, aut talorum expreſſæ quadrato A B F G, $20 \times 20 = 400$.

II. Si lineam A B augeo quantitate B C, linea A C in ſe ducta dabit productum quadratum A C N M. Augeo igitur primum quadra-

 tum

tum 1°. toto rectangulo F B C R; 2°. toto rectangulo M G F P æquale præcedenti; 3°. toto exiguo quadrato P F R N.

Ponamus, B C exprimere 5 hexapedas, aut talos. Lineam A C in ſe ducendo primum quadratum auxero 1°. quinquies viginti ſeriebus hexapedarum, aut talorum in rectangulo B R; 2° quinquies viginti ſeriebus hexapedarum aut talorum in rectangnlo M F; 3°. quinquies quinque ſeriebus hexapedarum, aut talorum in quadrato N F.

III. Si adhuc lineam A C augeo quantitate C D, linea A D in ſe ducta efficiet quadratum A D S T. Augeo igitur quadratum A C N M 1°. toto rectangulo N C D V; 2°. toto rectangulo T M N O; 3°. toto exiguo quadrato N O S V.

Ponamus, C D exprimere duas hexapedas, ſeu talos duos: lineam A D in ſe ducendo quadratum A C N M auxero 1°. bis 25 ſeriebus hexapedarum, aut talorum in rectangulo C V; 2°. bis 25 ſeriebus hexapedarum, aut talorum in rectangulo M O præcedenti æquale; 3°. bis duabus ſeriebus hexapedarum, aut talorum pro exiguo quadrato N S.

IV. Si adhuc lineam A D augerem, evidens eſt, nova augmenta factum iri ut ea, quæ hactenus expoſuimus.

123. COROLLARIUM I. *Quadratum quantitatis complexæ continet ergo quantitates, quæ in ſua formatione detegi, & obſervari poſſunt* (*F.* 1.).

EXPLICATIO. Quantitatem quamvis A B, aut A C, quæ quadrati noti radix eſt, *a* appellabimus. Quantitatem quamvis B C, aut G D, quæ præcedentis quadrati noti radicem auget, dicemus *b*.

I. Quadratum primi termini A B $= a$ ſe ſolum continet, nempe quadratum A B F G: hoc quadratum eſt $= aa$.

II. Quadratum duorum primorum terminorum A D + B C $= a + b$ continet præterea du-

duplum primi termini ducti in ſecundum, & quadratum ſecundi; nempe rectangula B R, G P, cum quadrato F N; hoc augmentum eſt $2ab + bb$.

III. Quadratum trium primorum terminorum A B + B C = a, & D C = b continet præterea duplum duorum primorum terminorum ductorum in tertium cum quadrato tertii; nempe rectangula C V, & T N cum quadrato N S; hoc augmentum adhuc eſt $2ab + bb$.

IV. Quadratum quatuor primorum terminorum A B + B C + C D = a, & D E = b, continebit præterea duplum trium priorum terminorum in quartum ductorum, & quadratum quarti. Erit adhuc hoc augmentum $2ab + bb$; atque ita porro in infinitum.

124. COROLLARIUM II. *Quadratum igitur cujuſvis quantitatis exhiberi poteſt hac formula œcumenica:* $aa + 2ab + bb$.

EXPLICATIO. In hac formula aa exprimit quadratum primi termini; $2ab + bb$ exprimit quod quadrato noto addit terminus ſequens. Patet, poſt ſumptam radicem a primi termini, formulam pro termino ſequente hanc eſſe; $2ab + bb$; atque eam in hanc recidere; $\overline{2a + b} \times b$.

Formula hæc æque numeris, ac literis convenit; numeri enim pluribus notis expreſſi conſiderari poſſunt ut quantitates complexæ. Exempli gratia; 6342 eſt æquale 6000 + 300 + 40 + 2; adeoque eſt hæc quantitas complexa quatuor terminos habens, quæ duarum notarum radicem haberet; ut quamprimum videbimus.

125. COROLLARIUM III. *Bene percepta quadrati compoſitione, pronum eſt ejus decompoſitionem intelligere;* decompoſitio ſiquidem, ſive extractio radicum eſt operatio inverſa formationis quadrati iiſdem radicibus.

Patet, ſumpta radice A B, quæ majus quadratum producit, ſumpta deinde radice B C, quæ tria rectangula addit majori quadrato;

ſumpta demum radice CD, quæ tria quoque rectangula adjicit ſummæ præcedenti, habitum iri radicem totius quantitatis ADST; atque ita de ceteris.

Tabulam adjicimus, qua uno oculi intuitu novem primarum notarum *quadratum maximum* invenitur. Nonnulla alia quadrata addimus, quæ ſequentibus obſervationibus inſervient.

Radices.	*Quadrata.*	*Radices.*	*Quadrata.*
1.	1.	10.	100.
2.	4.	11.	121.
3.	9.	99.	9,801.
4.	16.	100.	10,000
5.	25.	999.	998,001.
6.	36.	1,000.	1,000,000.
7.	49.	9,999.	99,980,001.
8.	64.	10,000.	100,000,000.
9.	81.	99,999.	9,999,800,001.

126. NOTA I. Hanc quadratorum tabulam inſpiciens adnota:

I. Radicem quadratam *unica nota* ſcriptam ſemper quadratum habere ſaltem una nota, nunquam pluribus quam duabus ſcriptum.

II. Radicis quadratæ *duabus notis* ſcriptæ quadratum tribus ſaltem notis ſcribi, nunquam pluribus quam quatuor.

III. Radicis quadratæ *tribus notis* ſcriptæ quadratum quinque ſaltem notis ſcribi, nunquam pluribus quam ſex.

IV. Radicis quadratæ *quatuor notis* ſcriptæ quadratum ſeptem ſaltem notis ſcribi, nunquam pluribus quam octo.

V. Radicis quadratæ *quinque notis* ſcriptæ quadratum novem ſaltem notis ſcribi, nunquam pluribus quam decem; atque ita in infinitum.

127. NOTA II. In eadem quoque tabula adnotabis; *quum duo numeri inter ſe tantum u-*

nita-

nitate differunt, quadratum minoris deficere a quadrato majoris bis ſua radice, & unitate. Exempli cauſa, duo numeri ſint, ſeu radices, 10, & 11; horum quadrata erunt 100, & 121. Minus quadratum a majori deficit bis 10 + 1. Pari modo quadratum radicis 99 deficit a quadrato radicis 100, bis 99, & unitate; ſive 198 + 1.

Nota hæc œcumenica fieri poteſt, atque ita mathematice demonſtrari. Minor numerus ſit a, major erit $a+1$; tunc primum quadratum erit aa; alterum $aa+2a+1$ (100). In hoc poſtremo quadrato noto, quum multiplicator eſt unitas, producta a multiplicando non eſſe diverſa.

128. NOTA III. Quum *extractio radicis quadratæ maxime utilis, & frequens ſit in matheſi univerſa*; nihil negligendum hac in re cenſuimus, ut clariori methodo, & a communi diverſa uteremur. Theoriam expoſuimus: methodum aggrediamur.

I. Numerus datus in partes dividitur, quæ ſingulæ duas notas contineant, dempta prima ſiniſtra, quæ unica nota conſtare poteſt. Diviſio hæc ad dexteram incipienda eſt. Numero dato linea ſubſcribitur, quæ perpendiculariter ſecatur, ut in diviſione. *Totidem in radice erunt notæ, quot in numero diviſiones* (126). Quælibet nota radicis, quæ inveniatur, prope datum numerum ſcribetur.

II. Ad radicem inveniendam ſequenti methodo utemur, quæ initio paulo obſcurior videbitur; ſed brevi tenebræ evaneſcent. Methodus eſt, ut utamur hac formula, $2a+b \times b$. (124).

Sequentibus problematibus formulæ uſus apparebit; exemplis res clara in luce ſtatuetur.

EXTRACTIO RADICIS QUADRATÆ.

129. PROBLEMA. *Dati numeri* 1296 *radicem quadratam invenire.*

SOLUTIO. Numerus 1296 vel eſt quadratum perfectum, vel imperfectum: quæritur ejus radix, ſeu numerus, qui in ſe ductus dat 1296. Hoc quadratum quatuor notas habet: ejus radix babebit duas (126), quas inveſtigare oportet formula aa, quæ maximum quadratum dabit primi membri 12; & formula $2a+b \times b$, quæ alterius membri quadratum dabit (124).

I. Quæro maximum quadratum in primo membro 12 contentum: hoc eſt 9. Hoc primo membro 12 ſubſcribo, & ejus radicem 3 ſcribo prope numerum datum. Hoc quadratum 9 ſubduco a primo membro 12: reſiduum 3 inferius ſcribo. Jam habeo radicem 3 maximi membri dati numeri, quum radicem habeam primæ notæ, & partis ſequentis; & quum prima nota omnes ſequentes valore ſuperet.

Quum tres unitates a primo membro 12 reliquæ aliam unitatem radici addere nequeant, has ſequenti diviſioni adjicio, cum qua unum totum efficiunt, cujus radicem inveſtigo formula utens $2a+b \times b$.

Formula hæc, quæ æque in ſequentibus numeris valeret, ſi numerus datus majorem diviſionum numerum haberet (124), inſervit in membro quovis, cui adhibeatur, inveniendis *quotienti*, *producto*, *reſiduo*; ut hoc, & ſequentibus exemplis apparebit.

Qua-

Quadratum.		a b
I. Membrum 12,	96	3 6 *Radix*
	9	$6 = 2a$
		$6 = + b$
II. Membrum.	39, 6	$6 = \times b$
	39 6	396 = producto,

Reſiduum . . . (0.

Probatio. $36 \times 36 = 1296$.

II. Ut ſecundi membri 396 radicem inveniam, radicem inventam 3 voco a, eamque bis ſumo; hinc habeo $b = 2a$. Neglecta modo poſtrema nota numeri, quem pertracto, & notam hanc a præcedentibus ſeparans, dico: in reſiduo 39 quoties $2a$, ſeu 6? Sexies. En numerum, ſeu *quotientem* 6, quem nos b dicemus, Poſtquam illum ad latera prope 3 ſcripſerimus, quoque ipſis $2a$ ſubſcribi debet uno paſſu ad dexteram promotus. Duorum numerorum ſumma $2a + b$ ita diſpoſitorum eſt 66. Duco 66, ſive $2a + b$ in 6, quod eſt b, ut formula indicat; & productum habeo 396. Deinde productum hoc ſecundo membro ſubſcribo, & ſubduco. Nihil eſt *reſidui*; & operatio expleta eſt. Quare radix quæſita eſt 36; & radix eſt quadrati perfecti.

130. NOTA I. Operatione peracta ſi quid ex poſtrema diviſione ſupereſt, hoc reſiduum negligitur; quum radix accurate a numero non perfecte quadrato extrahi nequeat. Exempli cauſa, ſi datus numerus fuiſſet 1298, reſiduum fuiſſet 2, non 0.

I. Quum hoc reſiduum eſt *æquale* radici inventæ, ipſam dimidia ferme unitate augere poſſet (127). Quum *paulo minus* eſt, aut *paulo majus*, facile quiſnam reſpectu radicis ejus valor ſit proxime dignoſcitur.

II. Si maxima accuratione opus ſit in radi-

ce, (quod eſt rariſſimum) infinite proxime accedere poſſumus ad *hujus reſidui valorem* methodo approximationis, de qua mox (135).

131. NOTA II. Operationis hujus demonſtratio, & probatio facile ex jam poſitis principiis elucent.

I. *Operationis demonſtratio* per ſe patet. Methodo propoſita $2a + b \times b$, evidens eſt, extrahi radicem partium omnium, quibus quadratum conſtat; ergo totius quadrati radix extrahitur.

II. *Operationis probatio* fit radicem inventam in ſe ipſam ducendo. Evidens eſt hoc productum additum reſiduo, ſi quod eſt æquale eſſe debere numero dato.

132. PROBLEMA II. *Dati numeri 425104 radicem quadratam invenire.*

	Quadratum	*a b*
I. Membrum	42 | 51 | 04	6 5 2 *Radix*
	36	$12 = 2a$
		$5 = + b$
II. Membrum	65.1	$5 = \times b$
	625	625 = produc
III. Membrum	260.4	$130 = 2a$
	260 4	$2 = + b$
		$2 = \times b$
Reſiduum	(0	2604 = product.
Probatio. $652 \times 652 = 425104$		

SOLUTIO I. Poſt binas, & binas diviſas notas, ut docuimus, vide quodnam ſit maximum quadratum in prima ſiniſtra diviſione contentum, quæ eſt 42: eſt hoc 36, ut apparet in tabula præcedente. Quadratum hoc 36 ſubſcribe primæ ſectioni 42, & ejus *radicem* 6 prope datum numerum ſcribe; ſubducto quadrato 36 a 42, ſcribe infra reſiduum 6, & ſequentem

tem ſectionem 51 prope illud demitte: numerus 651 erit alterum membrum, cujus radix inveſtiganda.

II. Quidquid radici adſcriptum eſt ſemper a appellabimus; quare modo $6 = a$. Formula $2a + b \times b$ indicat, bis ſumendum a, alii numero, quem inveniemus, addendum, & dicemus b, ambos vero in b ducendos.

Quum itaque a ſit 6, ſumo bis 6, ſeu 12, ut habeam $2a$, quæ ſeorſim ſcribo. Omiſſa poſtrema nota dextera, quæ eſt 1, quæro: in toto reſiduo 65 quoties $2a$, ſeu 12. Quinquies. En numerum, ſeu quotientem, quem dicemus b: ille ſub $2a$ ſcribendus eſt ad dexteram uno gradu promotus. Numerorum $2a + b$ ita diſpoſitorum ſumma erit 125. Hanc in 5, ſeu in b duco, ut formula indicat, & *productum* habeo 625, quod erit $2a + b \times b$. Quum 625 non excedant 651, infero, me non nimium quotientem 5, ſeu b ſumpſiſſe. *Quotientem* igitur 5 radici adſcribo prope 6; & *productum* 625 traduco ſub 651, ut illud ab hoc ſubducam; ſequentem vero ſectionem 26 ſcribo prope reſiduum. Eſt hoc tertium membrum 2604.

III. Tertium hoc membrum ut præcedens pertractabitur. Aſſumo itaque iterum formulam $2a + b \times b$; & quoniam 65 eſt a (ſemper enim quod in angulo eſt a eſt quoties nova ſectio ex formula pertractanda aſſumitur): bis ſumo 65, ut habeam $130 = 2a$, quæ ſeorſim ſcribo. Poſtremam notam tertii membri, quæ eſt 4, omitto; & quæro: in reſiduo 260 quoties $2a$, ſive 130? bis. Eſt hic numerus, ſeu *quotiens* 2, quem vocabimus b in hac operatione. Illum ſcribo infra $2a$ uno gradu promotum; & additis duobus hiſce numeris, ut habeam $2a + b$, hoc eſt 1302, ſummam duco in $b = 2$, atque ita habeo totam formulam $2a + b \times b$; ac *productum* integrum 2604 tertii hujus membri. Quum vero 2604 non excedant ſummam per-

tractatæ ſectionis, quotiens nimius non eſt. Radici igitur adſcribo numerum $b = 2$ prope 65; & ſubductis 2604 a correſpondente ſectione, quæ eſt 2604, nullum eſt *reſiduum*. Inferro igitur numerum 652 eſſe radicem dati numeri, qui quadratum perfectum eſt.

IV. Eadem peragerentur in quarta, quinta, ſexta ſectione, ſi adeſſent. Eſt igitur radix quæſita 652 quadrati perfecti. Sequens erit radix quadrati imperfecti.

133. PROBLEMA III. *Numeri 6422739 radicem quadratam invenire.*

SOLUTIO. Radix hæc methodo præcedentium inveſtigabitur prius ſumendo radicem *maximi quadrati* in prima ſectione 6 contenti; & deinde ſingulis ſectionibus formulam $2a + b \times b$ adhibendo.

Quadratum.		a b
I. Membrum	6|42|27|39	2534 *Radix.*
	4	$4 = 2a$
II. Membrum	24|2	$5 = + b$ II. Membrum
	225	$5 = \times b$
III. Membrum	172|7	25 Productum
	1509	
IV. Membrum	21836|9	$50 = 2a$
	20256	$3 = + b$ III. Membrum
		$3 = \times b$
Reſiduum......	1583	1509 productum
Probatio.		$506 = 2a$
		$4 = + b$ IV. Membrum
25342 × 534 =	6421156	$4 = \times b$
Reſiduum....	1583	20256 productum
Summa.... =	6422739	æqualis quadrato dato.

134 NOTÆ. I. Inter præcipuas diviſionis proprietates ea eſt, *qua invenire facit radicem ignotam producti, cujus altera radix habeatur*, productum notum per notam radicem dividendo;

do; quotiens eſt altera radix, nempe aut multiplicandus, aut multiplicator. Si habeam productum 204, cujus altera radix data ſit 4; *radix quæſita* erit 51. Si radix data eſſet 16, radix quæſita eſſet 12 cum 12 unitatibus reſiduis, quas membro ſequenti adjicerem.

Quare quotieſcumque novam ſectionem demitto prope reſiduum membri præcedentis, reſiduum tantum attendo, & primam ſectionis demiſſæ notam. Semper punctum, aut lineolam duabus notis demiſſis interiicio; *& ſumens tamquam dividendum quidquid hanc lineolam præcedit*, hoc divido diviſore 2 *a*, ut habeatur quotiens + *b*, qui nunquam major 9 eſſe poteſt (44 II.). Si numerum *b* nimis magnum ſumpſi ita, ut productum efficiat majus membro, quod pertracto, illum minuo una, aut pluribus unitatibus donec productum præbeat non excedens membrum, a quo ſubducendum eſt, & cui ſit quam proxime æquale.

Si numerus 2 *a*, qui *diviſor* eſſe debet, major ſit numero, cui reſpondet, radici adſcribo 0; & ſectionem ſequentem numeri dati demitto, ut habeam membrum ſequens, quod de more pertracto.

II. Quum numerum *b* inveni, illum uno gradu ad dexteram promotum ſcribo; numerus enim 2 *a* reſpicit tantum notam, quæ lineolam præcedit; & numerus + *b*, qui cenſetur eſſe radix, ſeu generator totius numeri, reſpicere debet notam lineolæ poſtpoſitam.

III. Numerus datus non eſt quadratum perfectum; præter enim quadratum perfectum numeri 2534, continet unitates 1583; nec continet quadratum numeri 2535 unitate majoris. Vera igitur numeri dati radix eſt inter 2534, & 2535: quare eſt numerus 2534 auctus parte unitatis, quæ nec numero integro, nec fractione accurate exprimi poteſt. Si datus numerus pedes exprimeret, radix eſſet pedes 2534,

& præ-

& præterea pars unius pedis, quæ in praxi negligi ſolet.

IV. Etſi ipſum hujus radicis valorem exprimere nequeam, tamen illi in infinitum proxime accedere poſſum; ita ut reſiduum, aut accuratæ radicis defectus minor ſit decima, centeſima, milleſima unitatis parte; atque ita porro. Hoc eſt *radicem quadratam per approximationem extrahere*; quod ſequenti problemate præſtabimus.

At hujus problematis ſolutio nonnulla de fractionibus nota ſupponit, de quibus alibi (191). Quare qui hæc ignorat, ſequens problema, quod tamen hic ſolvi poſtulat, modo prætereat.

135 PROBLEMA IV. *Radicem quadratam per approximationem extrahere.*

SOLUTIO. Sit numerus datus 67, qui non eſt quadratum perfectum, & cujus radix quæritur. Ejus radix eſt 8, & pars unitatis reſpondens tribus unitatibus, quas numerus 67 ſupra quadratum 64 habet.

I. Si velim radicem numeri $67 = \frac{67}{1}$, ita ut quod huic radici deerit ſit minus decima unitatis parte, numero $\frac{67}{1}$ addo duo zero (quod perinde eſt, ac ſi illum in 100 duxiſſem), ut habeam fractionem $\frac{6700}{100}$, quæ illi æqualis erit (191). Quum itaque radix 100 ſit 10, certum eſt, ſi numeri 6700 radicem extraxero, extractum fore *decimas*. Educta igitur conſueta methodo hac radice, invenio $\frac{81}{10} = 8 + \frac{1}{10}$ pro radice proxima numeri 67, quæ radix minus decima unitatis parte ab accurata deficiet; reſiduum enim 139 non valet radici unitatem; ceterum non $\frac{81}{10}$, ſed $\frac{82}{10}$ haberemus.

II. Si reſiduum minus centeſima unitatis parte

te eſſe velim, numero $\frac{67}{1}$ addo quatuor zero (quod perinde eſt ac ſi illum in 10000 ducerem) ut habeam fractionem $\frac{670000}{10000}$; quum vero radix 10000 ſit 100, adhuc certum eſt, extractæ radicis ex 670000 fore *centeſimas*. Quare habebo $\frac{818}{100} = 8 + \frac{18}{100}$ pro radice proxima numeri 67; quæ minus centeſima parte a vera deficiet; reſiduum enim 876 minus eſt unitate radicis 818.

III. Generatim numero, a quo radix extrahenda eſt per approximationem, addenda ſunt aut duo, aut quatuor, aut ſex zero, atque ita porro ſemper paria; & radix extrahenda, cui ſubſcribetur unitas cum dimidiis zero numero dato additis. Habebis fractionem, quæ erit radix quæſita. Quo plura erunt zero addita, & radicis valor veræ proximior evadet.

IV. Ex hiſce principiis ſi zero bina addita ſupponamus numero dato in tertio problemate; reſiduum 1583 auctum binis zero depreſſis, fieret *quintum membrum*, quod pertractandum eſſet juxta formulam; & haberetur radix: 25343 decimæ $= 2534 + \frac{3}{10}$. (53).

§. II.

FORMATIO CUBI.

136. HYPOTHESIS (*fig.* 2.). Sit cubus TAGMLSBA cujuſcumque magnitudinis, quem appellabimus cubum R: habebit hic ſex ſuperficies ſuperficiei ATSB æquales. Linea AB eſt ejus *radix cubica*: hæc linea elevata ad quadratum dat ſuperficiem ABST. Ipſa AB = AG ducta

ducta in unam ex cubi ſuperficiebus dat ejus profunditatem, ſeu ſoliditatem.

Si radix hæc cubica AB vocetur *a*, erit *a* radix, *aa* quadratum, ſive una ex ſuperficiebus, *aaa* cubi ſoliditas.

Videndum modo quod augmentum addat cubo cuivis jam exiſtenti nova quantitas BC addita notæ ejus radici AB. Hoc præſtabimus inveſtigantes quænam eſſent quantitates, quibus cubus R augeretur, ſi ejus radix AB = *a* augeretur quantitate quavis BC = *b*.

Sit igitur cubus R, cujus tres dimenſiones in longum, latum, & profundum ſunt æquales ipſi AB, quam dico *a*; cubus hic eſt *aaa*, Si ejus radicem AB augeo quantitate quavis BC = *b*, patet, lineam hanc ABC ad cubum ſuum elevatam daturam cubum ACDKHGAN majorem præcedente. Cubus præcedens tunc augebitur ſeptem parallelepipedis (121), quæ erunt: (*fig.* 2.).

I. Parallelepipedum BD perveniens uſque in F, quod primi cubi latitudinem, & longitudinem habebit, profunditatem vero BC; = *aa* × *b*.

II. Parallelepipedum GH productum uſque ad K, quod primi cubi profunditatem, & latitudinem habebit, longitudinem vero GI = BC; = *aa* × *b*.

III. Parallelepipedum X, quod primi cubi latitudinem, & longitudinem habebit, profunditatem vero VM = BC; = *aa* × *b*. En jam 3 *aa* × *b* formulæ mox a nobis uſurpandæ.

IV. Parallelepipedum DPF, longitudine primo cubo æquale, latitudine, & profunditate æqualibus ipſi BC; = *ab* × *b*.

V. Parallelepipedum HVK, quod habet dimenſiones præcedentis; = *ab* × *b*.

VI. Parvus cubus KF, qui ſuas dimenſiones habet æquales ipſi BC; = *bb* × *b*.

VII. Sub hoc cubo KF parallelepipedum, quod ha-

habet altitudinem primi cubi R, latitudinem & profunditatem æqualem ipſi BC; $= ab \times b$. En igitur adhuc $3ab + bb \times b$ formulæ.

Si ad ſenſus cubi theoriam clariorem quis cupit, cera, aut argilla binos cubos, de quibus ſermo, confingere poterit.

Evidens eſt, ſi linea AC adhuc nova quantitate quavis CE augeretur; ex hoc augmento exoritura ſeptem alia parallelepipeda præcedentibus ſimilia ſupra cubum auctum, ſeu totalem AF. Novum hoc augmentum apparet in CDFOE.

137. COROLLARIUM I. *Cubus ergo quantitatis complexa quantitates continet, quadum formantur obſervari poſſunt.*

EXPLICATIO. Si cubus formatur a duabus quantitatibus $a + b$, continebit, ut oſtendimus præter cubum aaa primi termini quantitates ſequentes; $3aa + 3ab + bb \times b$.

Si cubus oritur a tribus quantitatibus; invento cubo duarum primarum, quarum radix cubica adhuc dicetur a, tertia quoque dicetur b; & inveniemus, ut innuimus, cubum prætere contenturum $3aa + 3ab + bb \times b$.

138. COROLLARIUM II. *Quum cubi formatio apte percepta fuerit, ejus decompoſitionem intelligere proclive eſt*; decompoſitio ſiquidem, ſive extractio radicis cubicæ eſt operatio inverſa formationis cubi ex iiſdem radicibus.

Evidens eſt, ſumpta radice cubica cubi noti, & radice cubica eorum omnium, quæ primo huic cubo addita ſunt, habitum iri radicem cubicam totius.

Tabulam ſubjicimus, in qua deſcripti ſunt primarum novem notarum cubi; hujus uſus erit ad illico cognoſcendum *maximum cubum* primæ ſectionis in radice cubica extrahenda pertractandæ. Ceteri cubi, qui adduntur ad nonnullas obſervationes mox faciendas ſpectant.

Ra-

Radix	Quadratum	Cubus
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1,000
99		970,299
100		1,000,000
999		997,002,999
1000		1,000,000,000
9999		999,700,029,999

139. NOTA I. In hac tabula obſervabis;

I. Radicem cubicam *unica nota* conſtantem cubum habere ſaltem una nota deſcriptum, nunquam pluribus, quam tribus.

II. Radicis cubicæ *duabus notis* deſcriptæ cubum eſſe ſemper quatuor ſaltem notis deſcriptum, nunquam pluribus, quam ſex.

III. Radicis cubicæ *tribus notis* deſcriptæ cubum ſemper ſeptem ſaltem notis deſcribi, nunquam novem.

IV. Radicis cubicæ *quatuor notis* deſcriptæ cubum ſemper decem ſaltem notis deſcribi, nunquam pluribus, quam duodecim; atque ita porro ſemper trinas notas addendo.

V. Hic apparet, pleroſque numeros eſſe debere quadrata imperfecta; in numeris enim omnibus infra 100 tantum 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ſunt quadrata perfecta, quorum radix quadrata accurate extrahi poſſit.

Apparet quoque, pleroſque numeros eſſe cubos imperfectos; in numeris enim omnibus infra

ſra 1000 tantum 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000 ſunt cubi perfecti, quorum radix cubica nullo reſiduo extrahi poſſit.

140. NOTA II. Hinc orta methodus datum numerum, cujus radix cubica quæritur, *in ſectiones dividendi* ad dexteram incipiendo. Quæritur quænam nota ad ſuum cubum elevata quamlibet ſectionem, ſeu maximam ſectionis partem producit a ſiniſtra incipiendo, ubi ſectiones majorem valorem obtinent.

Inventa in numeris rotundis radice cubica potiſſime partis cujuſque ſectionis, reſiduum additur ſectioni ſequenti, cujus deinde radix cubica quæritur inveſtigando quinam numerus ad cubum elevatus numerum pariat illi ſectioni æqualem, aut proximum; reſiduum vero ſectioni ſequenti addetur eodem modo pertractandæ.

141. NOTA III. *Radix cubica cujuſque ſectionis nunquam major eſſe poteſt, quam* 9; radix enim vel unica unitate major ad numerum ſpectat conſtantem notis pluribus, quam tribus; at numerus pluribus, quam tribus notis conſtans neceſſario ſpectat ad ſectionem, quæ illam præcedit, in qua ſit operatio (16.).

142. NOTA IV. *Si duo numeri unitate tantum differant; cubus majoris excedit cubum minoris triplici quadrato radicis minoris, ter hac radice, & inſuper unitate.* Si enim numerus minor dicatur a, erit major $a+1$.

Cubus a eſt aaa. Cubus $a+1$ eſt $aaa+3aa+3a+1$. Primum enim $a+1 \times a+1$ dat quadratum $aa+2a+1$ (127). Deinde quadratum $aa+2a+1 \times a+1$ dat cubum $aaa+3aa+3a+1$ (100, & 127).

143. NOTA V. Numeri, quorum radix cubica quæritur, vel ſunt cubi perfecti, vel imperfecti (119).

I. Si ſunt *cubi perfecti*, eorum radix accurate invenitur, nullo poſtremæ ſectionis reſiduo.

II.

II. Si ſint *cubi imperfecti*, eorum radix proxime invenitur; at reſiduum poſtremæ ſectionis ſupereſt, quod aliam unitatem radici cubicæ addere nequit. Ut hanc unitatem addere poſſet, deberet hoc reſiduum valere triplum quadratum hujus radicis, ter hanc radicem, & præterea unitatem (142). Hinc proxime colligemus quinam ſit hujus reſidui valor reſpectu radicis; at paſſim negligitur.

In quadratis, & cubis imperfectis radix quadrata, aut cubica eſt quantitas hiſce numeris incommenſurabilis (6): illi proxime accedere poſſumus in infinitum (135, & 151); nunquam tamen perfecte aſſequi illam poſſumus.

144. NOTA VI. Methodus, quam ad radicem cubicam extrahendam trademus, valde illi affinis eſt, quam ad radicem quadratam extrahendam uſurpavimus. Utriuſque methodi facilis uſus dignoſcetur, ſi aliis aliorum auctorum methodis, quæ huic ſuffici poſſent, comparetur. Itaque ad dati numeri radicem cubicam extrahendam:

I. Datus numerus in ſectiones tribus notis conſtantes dividetur a dextris incipiendo: prima ſectio ſiniſtra duas, aut unam tantum notam habere poteſt. Numerus ita diviſus lineæ ſubſignabitur, quæ alia perpendiculari ſecabitur, ut in extractione radicis quadratæ; & ad latus numeri dati quælibet radicis cubicæ, quæ invenietur, nota ſcribetur. *In radice cubica tot erunt notæ, quot in dato numero ſectiones* (139). His ita diſpoſitis;

II. Quæretur *maximus cubus* in prima ſectione contentus (138); & ejus radix cubica ad latus numeri dati ſcribetur. A prima ſectione cubus hic ſubducetur; & reſiduum ſequenti ſectioni adjicietur; quæ ita erit alterum membrum. Membrum hoc alterum, & ſequentia omnia, ut in ſequentibus problematibus, quæ ſolvemus, apparebit, pertractabimus

hac

hac formula œcumenica, $3aa + 3bb + bb \times b$ (137).

EXTRACTIO RADICIS CUBICÆ.

145. PROBLEMA I. *Dati numeri 13824 radicem cubicam invenire.*

SOLUTIO. Numerus datus vel eſt cubus perfectus, vel imperfectus: quinque notas continet, ſeu membra duo; duas ergo notas habebit ejus radix, quæ invenienda eſt (139):

		ab
Cubus	13, 824	24 *Radix*
I. Membrum	8	$12 = 3aa$: diviſori.
		$24 = 3ab$
II. Membrum	58. 24	$16 = bb$
	58. 24	$1456 =$ ſummæ.
		$4 = \times b$
Reſiduum	0	$5824 =$ producto.

Probatio $24 \times 24 \times 24 = 13824$

I. Quæro prius *maximum cubum* in prima ſectione 13 contentum, Hic eſt 8. Hunc ſubſcribo primæ ſectioni, & ejus *radicem cubicam* 2 numero dato adſcribo, Cubum 8 ſubduco a prima ſectione; reſiduum eſt 5, prope quod demitto ſequentem ſectionem 824.

Partis primi membri radicem cubicam jam extraxi: quinque unitates reſiduæ quum aliam unitatem addere nequeant primæ notæ 2 radicis; hoc reſiduum addo ſequenti ſectioni, cum qua unum totum efficiet, & cujus radicem cubicam inquiro ex formula $3aa + 3ab + bb \times b$.

336. Formula hæc, quæ quoque pro omnibus ſequentibus membris valeret, ſi plures ſectiones haberet cubus (137); modum præbet inveniendi reſpectu numeri dati, cui adhibetur, *quotientem productum reſiduum*; ut hoc, & ſequentibus exemplis apparebit. Quare:

II. Radicem inventam 2 voco a: eam in ſe duco ut habeam $aa = 4$; ter illam ſumo, ut habeam $12 = 3aa$ diviſorem numeri 58.

Omiſſis duabus notis dexteris ſecundi membri, eiſque puncto, aut lineola a præcedentibus diviſis, dico: in 58 quoties $3aa$, ſeu 12? Quater. *Quotiens* hic 4 eſt numerus, quem dicam b (134).

Pergens uti formula, duco $a = 2$ in $b = 4$, & habeo $8 = ab$; ter 8 ſumo ut habeam $24 = 3ab$; & numerum 24 ſubſcribo ipſi 12, ſive $3aa$ uno gradu ad dexteram promotum. Item $b = 4$ in ſe ipſum duco, ut habeam $bb = 16$, quæ infra 24 ſcribo, ſeu infra $3ab$ adhuc uno gradu ad dexteram promota.

Numeros hos omnes ſimul addo, & ſummam 1456 ducens in $b = 4$ *productum* habeo 5824, quod reſpondebit formulæ $3aa + 3ab + bb \times b$.

Productum hoc ſecundo membro ſubſcribo, & ab eo *ſubduco*: quo peracto *nihil ſupereſt* Extractio expleta eſt, & radix quæſita eſt 24 Eſt hæc cubi perfecti radix.

146. NOTA I. Quum re peracta aliquid ex poſtrema ſectione reſiduum eſt, hoc negligitur, quod indicat datum numerum non eſſe cubum perfectum. Si hoc reſiduum valeret radicem inventam, & dimidiam: & præterea quadratum cum dimidio hujus radicis, & dimidiam unitatem, tota hæc ſumma dimidiam unitatem radici adderet, quæ in caſu noſtro eſſet 24 + $\frac{1}{2}$ (142).

147. NOTA II. Methodi hujus demonſtratio & pro-

& probatio iis ipſis principiis, quibus exponitur, innixæ ſunt.

I. *Operationis probatio* fit radicem in ſe ducendo, ut habeatur ejus quadratum, & hoc quadratum in radicem ducendo, ut habeatur cubus. Evidens eſt, poſtremum hoc productum reſiduo additum, ſi datur, æquale eſſe debere numero dato; neque enim numerus a ſuis partibus conſtituentibus diverſus eſt.

II. *Operationis demonſtratio* theoriæ innititur cubi cujuſque formationis, & decompoſitionis a nobis traditæ. Stando formulæ propoſitæ $3aa + 3ab + bb \times b$ evidens eſt, extrahi partium omnium cubi radicem cubicam; ergo totius cubi radix cubica extrahitur.

148. PROBLEMA II. *Numeri* 107, 850, 176 *radicem cubicam extrahere.*

SOLUTIO. Radix hæc tribus notis conſtabit, tribus enim ſectionibus numerus datus dividitur (139). Methodus ſequenda ſemper erit formula $3aa + 3ab + bb \times b$.

I. *Maximum cubum* in prima ſiniſtra ſectione incluſum inveſtigo, quæ eſt 107. Video hunc eſſe 64, cujus radix cubica 4. A 107 ſubduco 64. Prope reſiduum 43 demitto ſequentem ſectionem 850; & ſuo loco radicem inventam 4 ſcribo.

II. In ſecunda ſectione, ſeu membro ſecundo radicem 4 voco a; & quum formula ſit $3aa + 3ab + bb \times b$ duco in ſe a, quod eſt 4, ut habeam $16 = aa$, quæ triplico, ut habeam $48 = 3aa$; & hic erit diviſor numeri 438.

Cu-

	$a \; b$
Cubus 107, 850, 176	476 Radix
I. Membr. 64	48 = 3 aa : Diviſor.
	96 = 3ab. II. Mebr.
II. Membr. 438, 50	64 = bb
398 23	5824. Summa
	8 = × b
III. Memb. 40 271, 76	46592. Productum.
40 271 76	
	48 = 3aa II. Memb.
Reſiduum . . . . . (0	84 = 3 ab
	49 = bb
Probatio 476 × 476	5689. Summa
476 = 107850176	7 = × b
	39823 = Producto
	6627 = 3 aa Diviſ.
	846 = 3 ab III.
	36 = bb Memb.
	671, 196. Summa
	6 = × b
	4027, 176. Productum.

Omiſſis deinde duabus dexteris ſecundi membri notis, nempe 50, peto: in toto reſiduo 438 quoties 3 aa, ſeu 48? Octies. *Quotiens* 8 eſt numerus, quem dicemus b.

Formulam itaque exequens duco primum a = 4 in b = 8; & habeo 32 ab; triplico 32 = 96, ut habeam 3 ab, quæ ſcribo ſub 3 aa, uno gradu producta, ut in tabula apparet. Iterum b = 8 in ſe duco, ut habeam bb illa ſcribo uno gradu ad dextera m producta. Deinde his omnibus in ſummam collectis, ut habeam 5824, quæ erunt 3 aa + 3 ab + bb; omnia

duco

duco in $b = 8$, ut habeam integram formulam $3aa + 3ab + bb \times b$ productum invenio 46592 excedens notas ſecundi membri 43850: igitur ſumens $b = 8$ quotientem ſumpſi nimis magnum.

Quotiens igitur b ſumo $= 7$, & ſcriptis $3aa$ ſemper infra 48, duco $a = 4$ in 7, ut habeam $28 = ab$. Triplico 28, ſive ſumo 84 ut habeam $3ab$; ſub $3aa$ ſcribo 84 uno gradu producta. Adhuc $b = 7$ in ſe duco, ut habeam bb, ſeu 49, quæ ſcribo ſub $3ab$ uno gradu ad dexteram producta. Omnia in ſummam colligo, quam duco in $7 = b$ ut habeam $39823 = 3aa + 3ab + bb \times b$. *Productum* 39823 membro correſpondenti ſubſcribo, ut ſubducam; & demiſſa ſequenti ſectione prope *reſiduum* 4027; & radici adſcripto $b = 7$ nunc invento; ad tertium membrum progredior.

III. Formulam iterum ſumo, & dico a eo omni, quod radici adſcriptum eſt, nempe 47, ſumo $aa = 47 \times 47$, ſeu 2209, quod triplico, ut habeam $3aa$, ſeu 6621, quæ ſeorſim ſcribo. Omiſſis deinde quinque notis dexteris, quæro (50): in 40 quoties 6? ſexies. *Quotiens* 6 erit b.

Duco $47 = a$ in $6 = b$, & habeo 282: triplico, & habeo $846 = 3ab$, quæ ſcribo ſub $3aa$ uno gradu producta: Deinde duco b in 6, ſeu 6 in 6, ut habeam $36 = bb$, quæ ſcribo ſub $3ab$ uno gradu producta. Horum numerorum ſumma eſt $671196 = 3aa + 3ab + bb$. Omnia duco in $b = 6$, ut habeam $3aa + 3ab + bb \times b$ formulam conſuetam; & habeo *productum* 4027176, quod a poſtremo ſubductum nullum *reſiduum* relinquit. Scribo igitur radicem 6; & numerus 476 eſt numeri dati, & cubi perfecti radix cubica.

149. PROBLEMA III. *Numeri* 53 054 72 *radicem cubicam extrahere.*

SOLUTIO. Numeri dati radix cubica tres

notas continebit (139). Sumpto *maximo cub.* primæ ſectionis 5, ut in præcedentibus problematibus formula $3aa + 3ab + bb \times b$ utemur.

	a b
Cubus 5 305,472	174 Radix
I. Membr. 1	$3 = 3aa$ Diviſori
II. Membr. 43,03	$21 = 3ab$
39 15	$49 = bb$ II. Memb.
	559 Summa.
III. Membr. 3924,72	$7 = \times b$
3550 24	3913 Productum
Reſiduum... (374 48	$867 = 3aa$ Diviſori
	$204 = 3ab$
Prob. 174×174×174·5268024	$16 = bb$ III. Mem.
Adde reſiduum. .. 37448	88756 Summa.
	$4 = \times b$
Habes num. dat. 5305472	355024 Productum.

150. NOTÆ. I. Quoties novam ſectionem demitto, punctum interjicio, ſeu lineolam inter primam ex notis demiſſis, & duas ſequentes: quod punctum præcedit eſt numerus *dividendus*, cujus *diviſor* erit numerus $3aa$: quotiens erit numerus b inveniendus (134), nec nimius ſumendus.

II. Numerus b, qui quoque *multiplicatoris* munus agit, non modo multiplicare debet notas punctum præcedentes, ſed & ſequentes. Quare in operatione $3ab + bb$ notas produco primum uno gradu, deinde altero ad dexteram; ut notæ omnes producti in columnis ſiſtantur correſpondentibus notis membri, a quo ubduci debent.

III.

III. Numerus datus non eſt cubus perfectus: præter enim cubum radicis 174 continet unitates 37448, quæ ad unitatem radici addendam non ſufficiunt (142).

IV. In praxi reſiduum unitatum, quæ radici unitatem addere non valent, negligitur, ſive approximatione utimur. Sed ſi major accuratio deſideratur, in infinitum ad veram radicem proxime accedere poſſumus; ita ut quod vera radice deficiet, minus ſit parte unitatis decima, centeſima, milleſima, atque ita porro.

151. PROBLEMA IV. *Radicem cubicam per approximationem extrahere.*

SOLUTIO. Ad hoc res peragitur, ut in radice quadrata (135): hoc tamen diſcrimine, quod tres notæ adduntur ad reſiduum efficiendum decies minus; ſex ad centies; novem ad millies minus reddendum.

I. Quare in problematis præcedentis exemplo tria zero addo reſiduo $37448 = \frac{37448}{1}$; quod idem eſt, ac ſi numerum hunc ducerem in 1000; & fractionem efficio $\frac{37448000}{1000}$, cujus denominator erit 1000, cujus numeri radix cubica eſt 10. Numerum ita auctum pertracto ex formula conſueta $3aa + 3ab + bb \times b$. Radix 1343 exprimet partes *decimas* unitatis.

Reſiduum 183913 *decimam* unitatis partem non valet in radice; ceterum radix eſſet 1744, non 1743, quod efficeret 174 unitates cum 4 decimis partibus unitatis in radice.

IV. Membr.	374480, 00	*Partes decimæ.*
	272640 87	$1743 = 174 + \frac{1}{10}$. (53)
Reſiduum	1839 13	
		$90828 = 3\,aa$ diviſori
Numeri	53054720 00	$522 = 3\,ab$
		$9 = bb$
V. Membr.	1835130, 00	9088029 Summa.
		$3 = \times\, b$
		27264087 Productum.

II. Si radicem a vera deficere velis minus parte centeſima unitatis tria zero addes reſiduo 183913; tunc 183913000, erunt quintum membrum, cujus radicem ex præcedente formula extrahere perges: radix extracta exprimet partes unitatis *centeſimas*. Reſiduum unitatem radici centeſimas tantum unitatis partes exprimenti addere non valebit.

III. Patet additis adhuc tribus zero novo reſiduo, quod eſſet *ſextum membrum*, inventum iri radicem exprimentem partes milleſimas unitatis, & cui pars una unitatis non deeſſet ut vera fieret radix numeri dati; atque ita porro in infinitum.

IV. Approximatione quoque invenies radicem cubicam numeri 9 ita, ut quod huic radici deerit, ut accurata ſit, minus ſit decies milleſima unitatis parte, duodecim zero huic numero 9 addendo; & tantum radicem cubicam extrahendo numeri 9, 000, 000, 000, 000 methodo problematum præcedentium. Radix hæc cubica erit 20800 *decies milleſima* unitatis partes, quæ valent $2 + \frac{800}{10000}$. Quare ſi cubus exacte, pedes

des novem materiæ continet, proxima ejus radix cubica erit pedes 2 + 800 partes pedis in partes 10000 diviſi; & cubus hac radice productus non erit minor dato niſi parte decies milleſima cubi materiæ. Hinc apparet qua ratione ad veram cubi imperfecti radicem accedere poſſmus in infinitum.

§. III.

ELEVATIO, ET EXTRACTIO ALGEBRICÆ.

152. OBSERVATIO. Poſt dicta de formatione potentiarum, & extractione radicum *in numeris* facile intelligentur dicenda de elevatione quantitatum notis algebricis expreſſarum. Exempli cauſa:

I. *Quadratum quantitatis unicæ*, ut a, eſſe productum hujus quantitatis in ſe ductæ, ſive aa; & radicem quadratam ipſius aa eſſe quotientem ipſius aa diviſi per a, nempe a.

Eadem ratione quadratum termini unici pluribus quantitatibus compoſiti, ut abx, eſſe $aabbxx$, & hujus radicem eſſe abx.

II. *Cubum quantitatis unicæ*, ut x, eſſe ejus in ſe ductæ productum, quod deinde in ipſam ducatur, nempe xxx; & cubi hujus radicem cubicam eſſe quotientem quadrati per radicem diviſi, nempe x.

Eadem ratione cubus termini unici abc eſt $aaabbbccc$, ſive $a^3b^3c^3$; & cubi hujus radicem cubicam eſſe abc.

III. Quum a quantitate algebrica radix quadrata, aut cubica extrahi nequit, tunc poſſe tantum hanc radicem indicari quantitatem algebricam ſigno radicali $\surd$ ſubjiciendo (75). Exempli cauſa radix quadrata quantitatis a eſt $\sqrt[2]{a}$; ejus radix cubica eſt $\sqrt[3]{a}$. Nota 2 ſigno

radicali ſuperpoſita indicat, quantitatem ſigno ſubjectam ad ſuam ſecundam potentiam elevatam eſſe, ſive ad quadratum, & ejus radicem eſſe ſumendam. Nota 3 ſigno radicali ſuperpoſita indicat, quantitatem ſigno radicali ſubjectam cenſeri debere cubum, cujus radix cubica ſumenda eſt. Quum ſignum radicale nullam habet notam ſuperpoſitam, cenſetur habere notam 2, & quantitatis ſubjectæ radicem quadratam indicat.

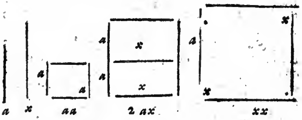
Quare radix quadrata quantitatis ab eſt $\sqrt{ab}$; ejus radix cubica eſt $\sqrt[3]{ab}$. Pari modo radix quadrata quantitatis $16ab$ eſt $\sqrt{16ab}$: radix cubica $64ab$ eſt $\sqrt[3]{64ab}$. Si ex parte quantitatis datæ radix extrahi poteſt, extrahitur: reſiduum ſigno radicali ſubjicitur. Exempli cauſa, radix quadrata quantitatis $16ab$ eſt $4\sqrt{ab}$; ita radix cubica quantitatis $64ab$ eſt $4\sqrt[3]{ab}$.

IV. *Quadratum binomii*, ut $a+x$, eſſe productum hujus binomii in ſe ducti, ſive $aa + ax + ax + xx$ (100); quod reducendo evadit $aa + 2ax + xx$ (100); & quadrati hujus *radicem quadratam* eſſe quotiens quadrati $aa + 2ax + xx$ per ſuam radicem $a+x$ diviſi (153).

V. *Cubum binomii*, ut $a+x$, eſſe productum ejus in ſe primum, dein in ſuum productum ducti, aut $aaa + 3aax + 3axx + xxx$; & *radicem cubicam* hujus cubi eſſe *quotientem* hujus cubi diviſi per quadratum $aa + 2ax + xx$ (154).

IV. Facile ſenſibus exhiberi poſſe qua ratione binomium quodvis $a+x$ attollatur ad quadratum ex ſuarum radicum producto; & quomodo hujus binomii quadratum $aa + 2ax + xx$ deinde in ſuas radices $a + x$ decomponatur. Sint lineæ a & x in lineas a & x ducen-

cendæ. Habebimus primo $a \times a = aa$; deinde $a \times x = ax$, deinde $x \times a = ax$; tandem $x \times x = xx$. Binomium itaque $a + x$ ad *perfectum ſuum quadratum* elevatum tres terminos continebit, qui erunt quadratum aa, duo rectangula ax, quadratum xx; ſeu inverſe, ut libuerit, quadratum xx, duo rectangula ax, quadratum aa; ut in ſubjecta figura apparet, quæ binomii cujuſque $a + x$, ſeu alicujus ex binomiis, de quibus infra mox agemus, elevationem exhibet. Si binomium non jam $a + x$, ſed eſſet $bcd + yz$, primus terminus adhuc a linea magis, minuſve longa a, & alter a linea x repræſentaretur.



Facile intelliges tribus hiſce figuris, ſeu tribus hiſce productis xx, $2ax$, aa ſimul compoſitis ut par eſt, effectum iri quadratum ſimile quadrato AMNCA, quod alibi perpendimus (*Fig.* 1.).

VII. Si pro binomio $a + x$ elevatum fuiſſet ad quadratum binomium $a - x$, quadratum adhuc tres terminos habiturum fuiſſe; nempe $aa - 2ax + xx$, ſeu quadratum aa demptis duobus rectangulis ax, addito quadrato xx.

Et ſi binomium elevatum ad quadratum fuiſſet $a + \frac{x}{2}$, producta futura fuiſſe $aa + \frac{ax}{2} + \frac{ax}{2} + \frac{xx}{4}$ & reducendo $aa + ax + \frac{xx}{4}$.

Et ſi binomium elevatum ad quadratum fuiſſet $a + 1$; producta, ſeu tres terminos futuros fuiſſe $aa + 2a + 1$.

Et ſi binomium elevatum ad quadratum fuiſſet $a + \frac{1}{2}$; producta, ſeu tres terminos futuros fuiſſe $aa + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{1}{4}$; & reducendo $aa + a + \frac{1}{4}$. Contra ſi fuiſſet $a - \frac{1}{2}$; terminos futuros fuiſſe $aa - a + \frac{1}{4}$.

VIII. Quadratum completum binomii ſemper neceſſario *tres terminos* continere; nempe quadratum primi termini, duo producta primi termini in ſecundum, & quadratum ſecundi. Sive termini hi ſint quantitates integræ, aut fractionariæ, poſitivæ, aut negativæ, ſemper termini binonii ad quadratum elevati tres erunt.

Quadratum perfectum dicitur quod omnes ſuos terminos habet; nempe ſi binomium eſt, quod continet quadratum primi termini, duplum productum primi termini in ſecundum, & quadratum ſecundi. Binomium $a + b$ erit quadratum perfectum ita: $aa + 2ab + bb$. Deme aut primum terminum aa, aut alterum $2ab$, aut tertium bb, erit illud *quadratum imperfectum*, quod perfici poterit terminum deficientem addendo.

IX. *In quadrato binomii nullum eſſe quadratum negativum.* Binomium ſiquidem neceſſario conſtat aut duabus quantitatibus poſitivis, aut duabus negativis, aut altera poſitiva, altera negativa. Atqui ſi ad quadratum effers quantitatem $+ a + b$, vel $- a - b$ bina quadrata erunt poſitiva; vel ſi ad quadratum effers quantitatem $+ a - b$, vel $- a + b$, duo quadrata æque erunt poſitiva (100).

X. Si ad cubum efferatur binomium quodvis $a + x$; habitum iri primum $aaa + aax + aax + axx + aax + axx + axx + xxx$; & re-

& reducendo $aaa + 3aax + 3axx + xxx$.

Hinc emergit veritas hæc œcumenica a nobis alibi explicata (136, nempe cubum cujuſque binomii continere præter cubum primi termini, *ter productum quadrati primi termini in ſecundum; ter productum quadrati ſecundi termini in primum, & cubum ſecundi.*

NOTA. Raro radix quadrata, aut cubica a quantitatibus algebricis accurate extrahi poteſt; ad hoc enim quantitates pertractandæ quadrata perfecta, & cubi perfecti ſint oportet, quibus ſcilicet nullus terminus deſit. Quum tamen extractio aliquando fieri poſſit, ejus methodum ſequentibus problematibus trademus.

153. PROBLEMA I. *A polynomio algebrico radicem quadratam extrahere.*

SOLUTIO. Datum ſit polynomium $aa + 2ax + xx$; de quo ita dico. Quoniam quantitas data eſt polynomium, patet, ejus radicem plus, quam unum terminum habere: ponamus habere duos. In data quantitate haberi debet quadratum primi termini, quadratum ſecundi & productum ſecundi termini per duplum primi (152. VIII,).

I. In polynomio dato video primum quadratum aa; ſumo ejus radicem a ut primum terminum quæſitum, quam ad latus dati polynomii ſcribo. Deinde primo hoc termino radicis quæſitæ ad quadratum elevato, hoc aa a polynomio ſubduco. Reſiduum habeo $+ 2ax + xx$.

Polynomium datum: $aa + 2ax + xx$ | Radix. $a + x$

$-aa$

Reſiduum $+ 2ax + xx$

$2a + x$.

Quotiens $+ x$ Multiplicator.

Productum $+ 2ax + xx$

$- 2ax - xx$

Reſiduum. o o

Dico deinde: in hoc reſiduo $2ax + xx$ eſſe debet productum dupli a in alium radicis quæſitæ terminum. Nequeo igitur alterum hunc terminum obtinere, niſi hoc reſiduum $2ax + xx$ dividam per duplum terminum inventum a, ſive per $2a$. Diviſio enim detegit radicem ignotam producti, cujus altera radix nota eſt, productum notum per radicem notam dividendo: quotiens eſt altera radix, nempe aut multiplicandus, aut multiplicator (134).

Pergo igitur $2ax + xx$ per $2a$ dividere. Primi termini quotiens eſt x. Quotientem hunc $+x$ radici adſcribo; & dico: ſi x eſt alter terminus quæſitus; ejus productum in $2a$, addito ejus quadrato æquare debet reſiduum $2ax + xx$. Pono igitur $+x$ prope $2a$, & $2a + x$ duco in alterum terminum inventum x; (tunc enim productum æquat ſummam producti x in $2a$, & quadrati x): habeo $2ax + xx$, quæ ſubduco a reſiduo $2ax + xx$. Et quum nihil ſuperſit, dico radicem quadratam quantitatis $aa + 2ax + xx$ eſſe $a + x$; hac enim operatione decompoſita fuit hæc quantitas, & deductæ fuerunt nullo exceſſu, aut defectu partes, quibus conſtabat.

Facile hinc apparet quomodo agendum fuiſſet ſi polynomium datum fuiſſet $aa - 2ax + xx$, Radix quæſita eſſet $a - x$; & ad eam in-

inveniendam ſatis eſſet in ſuperiori exemplo mutare + in −.

SOLUTIO II. Si polynomium datum fuiſſet $xx - ax + \frac{1}{4}aa$; eodem modo, atque iiſdem principiis ejus radicem quadratam inveniſſem. Sumpta enim radice x primi termini, reſiduum habeo $-ax + \frac{1}{4}aa$ cujus quotiens inquiro illud dividens per xx, & dicens: + in − dat −; quotiens ergo quæſitus erit negativus. Dividendus ax caret coefficientè; cenſetur ergo unitatem coefficientis loco habere. Porro 1 per 2 dividendo quotiens eſt $\frac{1}{2}$. Deinde dividens ax per radicem x habeo quotientem a; & ex dictis eſt $-\frac{1}{2}a$ (152. VII.).

	Polynomium datum	Radix
	$xx - ax + \frac{1}{4}aa$	$x - \frac{1}{2}aa$
	$-xx$	
Reſiduum	$-1ax + \frac{1}{4}aa$	
	$+2x - \frac{1}{2}a$	
Quotiens	$-\frac{1}{2}a$	Multiplicator.
Productum	$-ax + \frac{1}{4}aa$	
Reſiduum	0 0	

Quotientem hunc radici adſcribo; & quoque illum prope $+2x$ colloco: tum $2x - \frac{1}{2}a$ duco in alterum radicis terminum. Productum reſiduo æquale eſſe debet. Dico igitur: + in − dat productum negativum. Deinde 2 in $\frac{1}{2} = 1$, tandem a in $x = ax$. Quare primum habeo productum ex $+2x$ in $-\frac{1}{2}a$ primum terminum $-1ax$ ſeu $-ax$.

 Dico

Dico pariter, ut habeam ſecundum terminum producti: primum — in — dat +; deinde, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; tandem $a \times a = aa$. Quare productum $-\frac{1}{2}a$ in $-\frac{1}{2}a$ eſt ſecundus terminus $+\frac{1}{4}aa$. Poſt hæc a primo reſiduo productum inventum ſubducens, nihil ſupereſt, & dati polynomii radix inventa, & exacta eſt.

NOTA. Polynomium $xx - ax + \frac{1}{4}aa$, cujus radicem extraximus, ita exhiberi potuiſſet; $xx - \frac{2ax}{2} + \frac{aa}{4}$; ambo perfecte æqualia ſunt; ſeu potius idem polynomium ſunt duobus modis expreſſum. Quum quæritur radix quadrata (quæ in ſolvendis æquationibus ſecundi gradus omnino neceſſaria eſt), ſcribitur ut in ſolutione problematis; hic enim modus radicis extractionem ſimpliciorem reddit, & faciliorem.

154. PROBLEMA II. *Radicem cubicam polynomii algebrici extrahere.*

SOLUTIO. Polynomia ad cubum elevata conſiderando patebit methodus cubicam illorum radicem extrahendi, ut in radice quadrata præſtitimus. Sit polynomium datum $8aaa + 12aab + 6abb + bbb$, cujus quæratur radix cubica. Dico: radix hujus quantitatis eſt polynomium; quantitas enim plures habet terminos. Ponamus eam eſſe binomium: ejus cubus, ex præcedente obſervatione (152 X.), conſtabit cubo cujuſque termini, & triplici producto quadrati cujuſque termini in alterum. His poſitis,

Video initio, primum terminum $8aaa$ eſſe cubum. Sumo radicem cubicam coefficientis 8, quæ eſt 2; ſumo quoque radicem cubicam ipſius aaa, quæ eſt a: radicem hanc $2a$ ſcribo pro-

pe

pe polynomium datum; & eam ad cubum elevatam a data quantitate ſubduco: reſiduum eſt $12aab + 6abb + bbb$.

Dico deinde: in hoc reſiduo eſſe debet ter productum quadrati primi termini $2a$ modo inventi per alterum terminum, quem inquiro. Elevo igitur $2a$ ad quadratum, & habeo $4aa$: hoc triplico, & habeo $12aa$, quibus incipio reſiduum dividere. Dividenti mihi $12aab$ per $12aa$ occurrit quotiens $+b$.

Statuo $+b$ ad radicem; & dico: ſi $+b$ eſt alter terminus; ſumma ſui producti in $12aa$, & præterea productum ſui quadrati in $6a$, cum ſuo cubo æquare debet reſiduum.

	Polynomium datum.	Radix
	$8aa + 12aab + 6abb + bbb$	$2a +$
	$8aa$	
Reſiduum	$+ 12aab + 6abb + bbb$	
Quotiens	$+ b$	
Prod.	$+ 12aab + 6abb + bbb$	
	$- 12aab - 6abb - bbb$	
Reſiduum	$0 \quad 0 \quad 0$	

Atqui ſumma hæc eſt $12aab + 6abb + bbb$ accurate reſiduo æqualis, à quo ſubduci debet; ergo radix cubica quæſita eſt $2a + b$.

Ex iiſdem principiis, eademque methodo invenietur radix cubica polynomii algèbrici cujuſcumque, quod ſit cubus perfectus; ſive ejus termini omnes poſitivi ſint; ſive partim negativi; tantum opportuna ſigna $+$, & $-$ mutanda erunt in ſubductione, multiplicatione, diviſione, ſicuti quantitas, cujus radix quæritur, poſtulabit.

Ex horum problematum ſolutione apparet, methodum in extrahendis tum quadratis, tum cubicis radicibus ſequendam ex algebricis quantitatibus eandem re ipſa eſſe, quam pro extrahendis radicibus quadratis, aut cubicis a nu-

numericis quantitatibus tradidimus (129, & 145).

Amplioribus algebricis cognitionibus neque in phyſica, neque in matheſi noſtra non indigebimus; raro quoque omnibus hoc tractatu traditis indigebimus, in quo claritatem cum brevitate conjunctam inventum iri *ſperamus*.

Duobus præcipue ſequentibus tractatibus quanta ſit algebræ utilitas apparebit.

ARI-

ARITHMETICÆ, ALGEBRÆ, ET GEOMETRIÆ PRINCIPIA SIVE MATHESEOS ELEMENTA

TRACTATUS III.

ANALOGIA, SIVE PROPORTIONES.

ANalogia (*a*) *ſcientia eſt relationum* inter quantitates intercedentium. Hæ relationes calculo ſubjici poſſunt æque, ac ipſæ quantitates; quum enim illæ admittant magis, & minus, augeri poſſint, & minui, jam ut ipſæ magnitudines pertractari poſſunt.

Relatio quantitatis ad alteram *ratio* dicitur: duarum rationum æqualitas dicitur *proportio*; ſeries rationum æqualium dicitur *progreſſio*.

Rationum ſimplicium theoriam, fractionum, rationum compoſitarum, progreſſionum tractatus

(*a*) ETYMOLOGIA. *Analogia* ἀναλογία *relatio, conformitas, ſimilitudo, a* λογος *ſermo, ratio; & ab* ἀνά *inter. Quaſi duo inter ſe relativa; ſeu unum dicens ordinem ad aliud.*

tus hic complectetur, qui quanti momenti ſit apparebit, quum ab eo lucem omnibus fere mathematicis, ac phyſico-mathematicis diſciplinis affundi videbimus. Ordinem, quem ſequimur, non eſſe pure arbitrarium res ipſa indicabit.

ARTICULUS PRIMUS.

RATIONES SIMPLICES.

155. DEFINITIO. R*atio* ſtylo mathematico eſt duarum quantitatum relatio, ſeu comparatio, ut earum ſive differentia, ſive quotiens dignoſcatur.

I. Quantitates omnes homogeneæ inter ſe relationem, ſeu rationem habent; ſemper enim aut differentiam habent, aut quotientem. Exempli gratia, 6, & 8 differentiam habent, quæ eſt 2. Pari modo 12, & 4 quotientem habent, qui eſt 3. Hæc *differentia*, aut hic *quotiens* dicitur *valor*, ſeu *exponens* rationis.

II. Quælibet ratio duobus terminis conſtat; nequit enim inter terminos duobus pauciores inſtitui comparatio. Horum primus dicitur *antecedens*, alter *conſequens*.

III. Quælibet ratio aut arithmetica eſt, aut geometrica. *Ratio arithmetica* ea eſt, in qua differentia quæritur antecedentem, & conſequentem intercedens. *Ratio geometrica* ea eſt, in qua quæritur quoties, ſeu quomodo antecedens conſequentem, aut ejus partem contineat.

IV. Dicitur *ratio ſimplex* relatio inter duas quantitates ſimpliciter intercedens. *Ratio compoſita* dicitur productum duarum rationum ſimplicium in ſe ductarum, invicem ductis ſcilicet ambarum antecedentibus, & ambarum conſequen-

quentibus. Modo de rationibus ſimplicibus tantum agimus. Primum de geometricis, ſubinde de arithmeticis rationibus agemus.

PARAGRAPHUS PRIMUS.

RATIONES GEOMETRICÆ.

156. DEFINITIO. R*Atio geometrica* eſt modus, quo quantitas quantitatem, aut ejus partem continet. Prima eſt antecedens, altera conſequens. Itaque *ratio geometrica eſt quotiens antecedentis per conſequentem diviſi*. Exempli cauſa, datur ratio geometrica inter 12, & 4: hæc ratio eſt 3; hic enim numerus exprimit quoties prima quantitas 12 alteram 4 continet. Hic quotiens 3 eſt *exponens* rationis: ejus valorem exprimit.

I. Hic nota, quantitatem ab alia aut totam, aut ex parte tantum contineri poſſe. Exempli cauſa, 8 quater 2 continent; ſed 2 partem tantum continent ipſorum 8, nempe $\frac{1}{4}$. Ratio 8 ad 2 eſt 4: ratio 2 ad 8 eſt $\frac{1}{4}$. Primæ rationis exponens eſt 4; alterius $\frac{1}{4}$

II. Rationes diverſis nominibus deſignantur pro diverſa antecedentis ad conſequentem ratione. Ratio 2 ad 1 dicitur *ratio dupla*; 3 ad 1 *tripla*; 4 ad 1, ſeu 12 ad 3 *quadrupla*; 5 ad 1, ſeu 25 ad 5 *quintupla*; 3 ad 2 *ſeſquialtera*; 1 ad 1, ſeu 12 ad 12 *ratio æqualitatis*. At ratio 1 ad 2 dicitur *ſubdupla*; 1 ad 3 *ſubtripla*, &c.

III. Ratio geometrica ita ſcribitur, 8 : 2, ſive

ſive ita $\frac{8}{2}$. Hoc ſignificat: *octo* ſunt ad *duo*. Pari modo $a : b$, ſive $\frac{a}{b}$ ſignificat: a eſt ad b.

157. COROLLARIUM I. Quum exponens rationis geometricæ ſit quotiens antecedentis per conſequentem diviſi, patet, *conſequentem ductum in exponens rationis fore antecedenti æqualem*; in quavis enim diviſione productum diviſoris in quotientem æquale eſt dividendo (48). Quare in ratione 8 ad 2, cujus exponens eſt 4; $2 \times 4 = 8$. Pari modo in ratione 2 ad 8, cujus exponens eſt $\frac{1}{4}$, $8 \times \frac{1}{4} = 2$ (67).

158. COROLLARIUM II. Quoniam in ratione geometrica antecedens ſemper æqualis eſt conſequenti ducto in exponens rationis; ſi in quavis ratione geometrica antecedens vocetur a, conſequens b, exponens m, evidens eſt, fore ſemper $a = bm$; & ſemper quantitati a ſubſtitui poſſe ſibi æqualem bm.

I. Quum antecedens a *major* eſt conſequente b, exponens m quantitatem integram refert ſive cum reſiduo, ſive ſine reſiduo; exempli gratia 2, aut 4, aut 10, aut 100, &c.

II. Quum antecedens a *minor* eſt conſequente b, exponens m fractionem refert, cujus numerator eſt unitas; puta $\frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{4}$, vel $\frac{1}{10}$ vel $\frac{1}{100}$ &c.

III. Quum antecedens a *æqualis* eſt conſequenti b, exponens m unitatem refert. Exempli gratia in ratione 10 ad 10, quotiens, ſeu exponens m æquale eſt 1. (11. VII.).

159. COROLLARIUM III. *Quum duæ rationes geometricæ ſunt æquales, earum exponentia ſunt æqualia.* Exempli gratia, in duabus hiſce rationibus æqualibus, 9 : 3, 21 : 7; exponens m primæ eſt 3; & alterius quoque exponens eſt 3. Ita in his duabus 3 : 9, 7 : 21, utriuſque exponens m eſt $\frac{1}{3}$.

160. CO-

160. COROLLARIUM IV. *Ratio geometrica eo major eſt, quo pluries antecedens conſequentem, ut ejus partem continet.*

EXPLICATIO. Exempli cauſa, ratio 8 : 2 major eſt hac 8 : 4. Ita ratio 4 : 8 major eſt hac 2 : 8; hinc ſequitur.

I. Perſeverante eodem conſequente rationem creſcere ea menſura, qua augetur antecedens.

II. Perſeverante eodem antecedente rationem minui ea menſura, qua augetur conſequens.

161. DEFINITIO I. In toto duo ſunt partium genera: aliæ aliquotæ ſunt, aliæ aliquantæ.

I. *Partes aliquotæ* ſunt, quæ aliquoties repetitæ totum accuratæ nullo exceſſu, aut defectu metiuntur. Exempli cauſa, 3 ſunt pars aliquota 12; quater enim repetita 12 accurate metiuntur; ſeu, quod idem eſt, quater exacte in 12 continentur.

II. *Partes aliquantæ* ſunt, quæ aliquoties repetitæ non accurate totum metiuntur, ſed aut excedunt, aut deficiunt. Exempli cauſa, 5 ſunt pars aliquanta 12; bis enim in 12 continentur cum reſiduo 2.

III. Numerus, qui a minori numero accurate ſine reſiduo dividi poteſt, eſt hujus *multiplex*; & numerus diviſor eſt diviſi pars aliquota. Quare 8 numerus eſt multiplex 4, & 2; ita 12 multiplex eſt 6, 4, 3, 2, qui ſunt ejus partes aliquotæ. In genere *numerus quivis integer eſt unitatis multiplex*; numerus enim, exempli cauſa, 11, aut 99, aut 100, accurate, & nullo reſiduo ab unitate dividi poteſt, quæ ſemper eſt ejus pars aliquota. At *numerus 8, aut 100 non eſt multiplex 3, aut 7*, exempli gratia; nequeunt enim hi numeri exacte, & ſine reſiduo dividi a 3, aut 7. Numerus 3 eſt ipſorum 8, & 100 pars aliquanta. Numerus integer, puta 4, infinitos habet multiplices,

ces, 8, 12, 16, 20, 24; atque ita porro in infinitum.

IV. Ex genere numerus quivis integer, qui nullius numeri unitate majoris multiplex ſit, vocatur *numerus primus*. Numeri infra 100 primi ſunt: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

162. DEFINITIO II. Quum totius partes ſive aliquotæ, ſive aliquantæ, alterius totius partibus comparantur; partes ſunt, quæ *ſimiles* dicuntur.

Partes ſimiles ſunt, quæ ſingulæ eodem modo in ſuo toto continentur. Quare 5, & 7 ſunt partes ſimiles 15, & 21; ter enim 5 in 15, & ter 7 in 21 continentur. Ita 2, & 4 ſunt partes ſimiles 5, & 10; tum 7, & 14.

Modo ad aliqua principia huic tractatui neceſſaria explicanda deſcendimus.

RATIONUM PRINCIPIA.

163. PRINCIPIUM I. *Ratio duarum quantitatum æqualis eſt rationi dimidiæ, tertiæ, quartæ, quintæ earum partis; atque ita porro.*

DEMONSTRATIO. Principium hoc eſt evidens; ſi enim prima quantitas ter alteram continet, intelligimus, dimidiam primam ter dimidiam alteram contenturam; quartam primæ partem ter quartam alterius partem; milleſimam ter alterius milleſimam; atque ita in infinitum. Q. E. D.

164. PRINCIPIUM II. *Producta ſunt inter ſe ut radices, quum in eandem quantitatem ducta ſunt.*

EXPLICATIO. Significat hoc principium, quum duæ quantitates, puta 8, & 4 in tertiam, puta 5, ducuntur, producta 40, & 20 inter ſe rationem dicere æqualem rationi primarum quantitatum ante multiplicationem; ſeu ſim-

ſimplicius, *producta eſſe inter ſe, ut multiplicandos*.

DEMONSTRATIO. Radices duæ 8, & 4 communi multiplicatore in productum mutatæ ſingulæ quinquies majores, quam antea eſſent, effectæ ſunt; ergo eandem rationem inter ſe dicent producta, quam inter ſe dicunt quinque partes, quibus conſtant. Si ergo quælibet pars primi producti ſuæ radici æqualis bis partem alterius producti continet pariter ſuæ radici æqualem; evidens eſt, totum primum productum bis totum alterum contenturum. Idem dicas de tertiis, quartis, centeſimis, milleſimis partibus, & de quacumque determinata primi producti parte reſpectu ſecundi.

Si binæ radices ductæ fuiſſent in 30, aut 100, illæ in producta mutatæ tricies, aut centies majores effectæ fuiſſent, quam ante multiplicationem eſſent; adeoque ſingula producta tricies, aut centies majora effecta fuiſſent. Q. E. D.

165. PRINCIPIUM III. *Quum duæ quantitates per tertiam dividuntur; quotientes rationem dicunt inter ſe æqualem rationi quantitatum ante diviſionem*. Seu brevius: *quotientes ſunt inter ſe ut dividendi*.

DEMONSTRATIO. Sequitur ex præcedente principio. Quotientes enim duarum quantitatum per tertiam diviſarum ſunt earum partes ſimiles. Exempli cauſa, ſi diviſor eſt 9, quotientes ſunt partes nonæ; ſi diviſor eſt 100, quotientes erunt partes centeſimæ. Ratio igitur integrarum quantitatum eadem in quotientibus perſeverat, qui ſunt quantitatum, ſeu dividendorum partes ſimiles. Q. E. D.

166. PRINCIPIUM IV. *Duæ rationes uni tertiæ æquales ſunt inter ſe æquales*. Rationes enim a ſuis exponentibus exhibentur (159); quum vero hæc ſingula exponenti tertiæ rationis

nis æqualia ſint, neceſſario & inter ſe æqualia ſunt.

I. Exempli cauſa; ſint duæ rationes *a* & *b*, *c* & *d*, quarum exponentia *m*, & *n* ſingula æqualia ſint exponenti 3 rationis 30: 10. Evidens eſt, primas duas rationes ſingulas tertiæ æquales, eſſe æquales inter ſe.

II. Quum duæ rationes æquales proportionem efficiant, ut mox dicemus, ſi duæ ſint rationes uni tertiæ æquales, illæ duæ proportionem efficient. Exempli cauſa.

Si A eſt ad B, ut M ad N
Si R eſt ad S, ut M ad N
A erit ad B, ut R ad S.

Ita quoque,

Si A eſt ad B, ut MN ad *mn*
Si RR eſt ad *rr*, ut MN ad *mn*
RR erit ad *rr*, ut A ad B.

167. PPINCIPIUM V. *Si duæ rationes ſint inter ſe æquales, tertia ratio uni ex his æqualis & alteri æqualis eſt.*

EXPLICATIO. Sint duæ rationes æquales; 3 : 6; 300 : 600, Si ratio *ab* : *cd* æqualis eſt primæ rationi, æqualis erit & alteri; tunc enim antecedens *ab* bis continebitur in ſuo conſequente *cd*, ut antecedens 3 bis continetur in ſuo conſequente 6; ut antecedens 300 bis continetur in ſuo conſequente 600.

168. PRINCIPIUM VI. *Quum duæ, aut tres rationes ſunt inter ſe equales, in ſupputatione altera alteri ſubſtitui poteſt*; quum enim ſint æquales, ſingulæ eundem valorem habent.

169. PRINCIPIUM VI. *Duæ rationes ſunt inter ſe æquales quum antecedens prima eſt ad ſuum conſequentem, ut antecedens alterius ad ſuum conſequentem.*

EXPLICATIO. Duæ itaque rationes ſemper inter ſe æquales ſunt:

I. Quum

I. Quum quivis antecedens ſuum conſequentem continet, aut in eo continetur *totidem vicibus, nullo reſiduo*. Exempli cauſa, 6 ſunt ad 3 ut 8 ad 4; ſeu 5 ad 20 ut 7 ad 28. Rationes hæ ſunt æquales; antecedentes enim ſuos conſequentes continent, aut in illis continentur totidem vicibus, nullo reſiduo.

II. Quum quilibet antecedens ſuum conſequentem continet, aut in eo continetur *totidem vicibus cum reſiduis, quæ ſunt inter ſe ut reſpectivi antecedentes*. Exempli cauſa; 5 ſunt ad 12 ut 10 ad 24. Quilibet conſequens totidem vicibus ſuum antecedentem continet; & utrobique reſidua ſunt, 2, & 4, quæ inter ſe ſunt, ut antecedens primæ rationis ad antecedentem alterius.

Pari modo, 16 ſunt ad 5 ut 48 ad 15. Quivis antecedens totidem vicibus ſuum conſequentem continet; & utrinque reſidua ſunt, 1, & 3, quæ inter ſe ſunt ut duarum rationum reſpectivi antecedentes. Reſiduum 1 in reſiduo 3 toties continetur, quoties antecedens, cujus 1 reſiduum eſt, in antecedente, cujus reſiduum ſunt 3, continetur.

Æque dicere poſſemus, *reſidua debere eſſe inter ſe ut reſpectivi conſequentes*.

§. II.

PROPORTIONES GEOMETRICÆ.

170. DEFINITIO. DUæ rationes æquales proportionem efficiunt; quare *proportio* eſt duarum rationum æqualitas, ſeu duarum rationum æqualium comparatio.

I. *Proportio geometrica* itaque eſt duarum rationum geometricarum comparatio. Exempli gra-

gratia; ratio geometrica 15 ad 5 quum æqualis ſit rationi 21 ad 7, hæ duæ rationes proportionem geometricam efficiunt, quæ ſæpius ita ſcribitur, $\frac{15}{5} = \frac{21}{7}$; ſed paſſim ita; 15 : 5 : : 21 : 7.

Quum proportio enuncianda eſt, puta ſuperius allata; dicitur: 15 ſunt ad 5, ut 21 ad 7; ſeu 15, & 5, 21, & 7 ſunt propotionalia. Ita quoque in literis: A : B : : C : D; & quoque dicitur: A eſt ad B, ut C ad D; vel A, & B, C, & D ſunt proportionalia.

II. Proportio quatuor habet terminos; nempe antecedentem, & conſequentem primæ rationis, & antecedentem, & conſequentem alterius. Primus, & ultimus terminus dicuntur *extrema*; ſecundus, & tertius *media*. In proportione A : B : : C : D, A, & D extrema ſunt, B, & C media.

III. Aliquando idem terminus eſt conſequens primæ rationis, & antecedens ſecundæ: tunc hic terminus dicitur *medius proportionalis*, & proportio dicitur *continua*; uti 5 : 10 : : 10 : 20; & A : B : : B : C.

IV. Proprietas præcipua proportionis geometricæ eſt *æqualitas* roducti extremorum, & producti mediorum. In univerſa matheſi nulla fortaſſe propoſitio eſt hac magis uſitata. Hanc pulcherrimo ſequenti theoremate demonſtramus.

THEOREMA.

171. *In quavis proportione geometrica productum extremorum producto mediorum æquale eſt.*

DEMONSTRATIO. Sit proportio quævis numerica 8 : 4 : : 6 : 3. Demonſtrandum eſt, productum ex 8 in 4 æquale eſſe producto ex 8 in 3; *extremorum* ſcilicet productum æquale eſſe producto *mediorum*. Itaque:

Si 8, & 4 ducantur in 3, productum ex 4 erit *dimidium* producti ex 8; 4 enim ſunt dimi-

midium 8 (164). Sed ſi 4 non jam in 3, ſed in numerum ducantur duplum 3; productum erit *duplum producti* 4 in 3; adeoque æquale producto 8 in 3. Atqui ſecundus medius eſt duplus 3; quum enim primus antecedens 8 duplus ſit ſui conſequentis 4; debet quoque ſecundus antecedens 6 eſſe duplus ſui conſequentis 3; ceterum proportio non daretur. Ergo productum 4 in 6 æquale eſt producto 8 in 3; ergo productum mediorum producto extremorum æquale eſt.

Evidens eſt eodem modo idem demonſtrari poſſe de alia quavis proportione, mutatis tantum terminis dimidii, & dupli pro rationis antecedentis ad conſequentem exigentia. Exempli cauſa in hac proportione; 2:6::3:9; ſi 2, & 6 in eundem numerum 9 ducantur, productum ex 6 *triplum* erit producti ex 2. Si vero 6 non in 9, ſed in numerum triplo minorem ducantur, productum erit *triplo minus* præcedente, adeoque æquale producto 2 in 9.

II. Demonſtratio hæc ita œcumenica fieri poteſt. In quavis proportione exponens primæ rationis æquale eſt exponenti ſecundæ. Ergo ſi $a:b::c:d$, habebimus $a = bm$, $c = dm$ (158).

Itaque in hac proportione ipſi a ſubſtitui poteſt bm, & ipſi c dm; tunc proportio $a:b::c:d$ erit $bm:b::dm:d$.

Atqui in hac proportione productum extremorum bmd evidenter æquale eſt producto mediorum bdm; Q. E. D.

THEOREMA II.

172. *Quum productum extremorum æquale eſt producto mediorum, quatuor quantitates ſunt proportionales.*

DEMONSTRATIO I. Sint numeri 8, 4, 6, 3, in quibus productum extremorum 8 × 3

æquale ſit producto mediorum 4 × 6. Demonſtrabimus, $8 : 4 :: 6 : 3$.

Quum multiplicandus 8 duplus ſit alterius multiplicandi 4, jam ut producta ſint æqualia debet multiplicator ipſorum 4 duplus eſſe multiplicatoris ipſorum 8. Si ergo producta ſunt æqualia, debet primus multiplicandus 8 eſſe ad alterum 4, ut ſecundus multiplicator 6 ad primum 3. Si ergo productum extremorum æquale eſt producto mediorum, inter quatuor quantitates datur proportio.

Idem oſtendetur quoties duo producta erunt æqualia. Tunc enim ſi primus multiplcandus eſt triplus, aut centuplus, aut ſubdecuplus, aut ſubmillecuplus ſecundi; ſecundus multiplicator erit triplus, aut centuplus, aut ſubdecuplus, aut ſubmillecuplus primi; atque ita de ceteris. *Secundus multiplicator* intelligitur eſſe tertius multiplicationis terminus ſecundum multiplicans; & *primus multiplicator* intelligitur eſſe quartus terminus primum multiplicans.

DEMONSTRATIO II. Œcumenica. Si quatuor quantitates quælibet a, b, c, d ſint hujuſmodi, ut productum extremarum ad æquale ſit producto mediarum bc, erunt illæ proportionales; ſecus enim exponens rationis $\frac{a}{b}$ primarum *diverſum* eſſet ab exponente rationis $\frac{c}{d}$; quod fieri nequit. Sit enim m exponens primæ rationis, & n exponens ſecundæ: habebimus $a = bm$, & $c = dn$ (158); tunc quatuor quantitates a, b, c, d erunt bm, b, dn, d; & productum extremorum bmd non amplius erit æquale producto mediorum bdn; contra hypotheſim. Si ergo productum extremorum æquale eſt producto mediorum debet ratio m primarum quantitatum eſſe æqualis rationi n duarum reliquarum, Q. E. D.

173. CO-

173. COROLLARIUM I. *Ex duobus productis æqualibus ſemper proportio haberi poteſt.*

EXPLICATIO. Sint duo producta æqualia $ad = bc$. Dico haberi poſſe $a:b::c:d$; vel $a:c::b:d$; quod eſt evidens; productum enim extremorum æquale eſt producto mediorum; tunc vero ſemper habetur proportio.

Variæ mutationes in proportione.

174. COROLLARIUM II. Quoniam inter quatuor quaſcumque quantitates ſemper habetur proportio quotieſcumque producta extremorum, & mediorum ſunt æqualia, ſequitur inter has quantitates 8:4::6:3 adhuc ſtare proportionem.

I. Si invertantur extrema, intactis mediis, 3:4::6:8.

II. Si invertantur media, intactis extremis, 8:6::4:3. Duplex hæc mutatio dicitur *alternando*.

III. Si in utraque ratione antecedentes fiant conſequentes, & conſequentes antecedentes, 4:8::3:6. Hæc mutatio dicitur *invertendo*.

IV. Si in utraque ratione addantur antecedentibus conſequentes, vel conſequentibus antecedentes, 12:4::9:3, & 8:12::6:9. Mutatio hæc dicitur *componendo*.

V. Si in utraque ratione conſequentes ab antecedentibus, aut a conſequentibus antecedentes ſubducantur, 4:4::3:3; & 8:4—8::6:3—6; Mutatio hæc dicitur *dividendo*.

Quiſque videt, eam mutationem, quæ in numerica proportione fit, æque in algebrica fieri poſſe, puta in $a:b::c:d$; rationes enim eædem utrinque ſunt. Tantum harum mutationum ratio eſt oſtendenda.

DEMONSTRATIO. Quum demonſtratum ſit, inter quatuor quantitates dari proportionem quoties extremarum producta mediarum productis æqualia ſint;

H 2 Evi-

I. Evidens eſt, primas tres mutationes intacta proportione fieri poſſe; in his enim extrema invicem, & media quoque invicem multiplicantur. Porro nihil in duarum quantitatum multiplicatione intereſt utra in utram ducatur (93).

II. In duabus poſtremis mutationibus cuinſrac rationis multiplicandus, & multiplicator quum proportionaliter augeantur, aut minuantur, extremorum, & mediorum producta æqualia eſſe debent æqua; ſi hæc ſunt æqualia, proportio non tollitur. Q. E. D.

Horum theorematum uſus.

175. NOTA. Bina hæc theoremata frequentiſſimi ſunt uſus in arithmetica, in algebra, in geometria, in omnibus phyſico-mathematicis diſciplinis, in vita civili; ut in progreſſu apparebit.

I. *Primò theoremate*, datis tribus proportionis terminis invenitur quartus, qui eſt alterutrum extremum, aut medium. Ex terminis igitur notis duos, qui ſint aut extrema, aut media invicem duco; per tertium terminum notum productum divido; quotiens erit quartus terminus quæſitus. Terminus ignotus indicatur litera x.

Exempli cauſa: habeam proportionem $97 : 19 :: 64 : x$. Duco 19 in 64; productum 1216 divido per 97: invenio terminum ignotum eſſe $12 + \frac{52}{97}$. Innoteſcit itaque tota proportio $97 : 19 :: 64 : 12 + \frac{52}{97}$.

II. Altero theoremate innoteſcit num quatuor quantitates ſint proportionales. Quum hoc ſcire volo invicem duco extrema, & invicem media: ſi producta æqualia ſunt, quantitates ſunt proportionales. Secus, ſi ſecus.

III.

III. *Proportionibus* quantitatum rationes innoteſcunt. Evidens eſt, exempli gratia, pollicem eſſe ad leucam, ut duo pollices ad duas leucas, ut decem, aut mille pollices ad decem, aut mille leucas.

Evidens eſt, ſi duas lineas habeam, alteram pollices duodecim, alteram leucas duodecim longam, ſi utriuſque dimidium abſcidero, ab una me ſex pollices, ab altera ſex leucas ablaturum: ſi ambas duplicavero, alteri duodecim pollices, alteri duodecim leucas additurum. Quare ſi detur proportio A : B : : C : D, & A valeat decem pollices, B decem leucas, C vigintiquinque pollices, inferam, D vigintiquinque leucas valiturum. Æque proportionibus temporum, velocitatum, ponderum rationes innoteſcunt.

Pro pollicibus, quos exemplo uſurpavimus, quævis menſura ſumi poteſt. Paſſim linea utimur, ſeu *ſcala*, quæ in æquales partes circino dividitur (411). Evidens eſt, duos hujus ſcalæ gradus eſſe ad duas leucas, ut viginti ſcalæ gradus ad leucas viginti, ut mille ad mille, atque ita porro. Quod de leucis dicimus, de quavis alia menſura dicas, puta, de pedibus, de paſſibus geometricis, de telluris radiis aut diametris.

RATIONES DIRECTÆ, ET INVERSÆ.

176. DEFINITIO. Quatuor quantitates eſſe poſſunt in ratione directa, aut inverſa.

I. Sunt *in ratione directa* quum prima eſt ad ſecundam, ut tertia ad quartam; ut 12:3::8:2.

II. Sunt *in ratione inverſa*, ſeu reciproca, aut indirecta (hæc idem ſonant), quum prima eſt ad ſecundam, ut quarta ad tertiam; ut 12:3::2:8.

III. Hinc apparet *quomodo ratio inverſa in directam mutetur*. Satis eſt duos proportionis

terminos loco mutare. Exempli gratia; Si A: B :: C : D in ratione inverſa; erunt A : B :: D: C in ratione directa.

IV. Conſtat ex theoria combinationum, quatuor quaſcumque quantitates *a*, *b*, *c*, *d* poſſe 24 diverſis modis diſponi (113); & ſi hæ ſint geometricæ proportionales, octo ex his modis erunt in ratione directa, octo in inverſa, octo nec in directa, nec in inverſa.

REGULA AUREA, VULGO TRIUM.

177. DEFINITIO. Datis tribus proportionis terminis ſemper quartus invenitur, qui aut unus ex extremis eſt, aut unus ex mediis (175). Methodus hæc quartum terminum proportionalem inveniendi vocatur *regula trium*; ex tribus ſiquidem notis terminis hac quartus invenitur. Dicitur quoque *regula aurea* ex maxima ejus utilitate tum in ſcientiis, tum in vita civili. Hæc modo *directa* eſt, modo *inverſa*.

Regula trium directa.

178. DEFINITIO. *Regula trium eſt directa*, quum quartus terminus *x* ignotus tanto major aut minor tertio eſſe debet, quanto ſecundus primo major, aut minor eſt. Exempli cauſa; 10 : 5 : : 30 : *x*. Regula hæc eſt directa: in quæſtione enim duo poſtremi termini eodem ordine inter ſe ſunt, quo primi.

Fiat quoque hæc quæſtio. Si quindecim operæ viginti terræ hexapedas effoderunt, quot hexapedas eodem tempore effodient operæ quadraginta quinque? Termini ſunt in ratione directa, ſi ita diſponantur.

15 *operæ*: 20 *hexapedæ* : : 45 *operæ*: *x hexapedæ*. Vel

15 *operæ* : 45 : : *operæ* : : 20 *hexapedæ*: *x hexapedæ*.

La-

Magis conſona eſt poſtrema hæc diſpoſitio ; termini ſiquidem homogenei invicem comparantur. Ad habendum quartum terminum, duco duos medios invicem ; horum productum 900 divido per primum, quotiens 60 erit quartus terminus.

Quum uno intuitu apparet ratio primi termini ad ſecundum, a multiplicatione, & diviſione ſuperſedere poſſumus in quarto termino inveniendo. In propoſito exemplo video, primum antecedentem 15 eſſe tertiam partem ſui conſequentis 45; hinc infero, ſecundum antecedentem 20 eſſe tertiam partem ſui conſequentis *x*; adeoque hunc fore triplum 20=60 hexapedis.

Regula trium inverſa.

179. DEFINITIO. *Regula trium eſt inverſa*, quum ex quæſtione apparet, quartum terminum ignotum tanto majorem eſſe debere tertio, quanto ſecundus minor eſt primo; ſeu tanto minorem tertio, quanto ſecundus major eſt primo. Hujuſmodi eſſet hæc quæſtio. Tres operæ horis decem datum opus expleverunt, quot horis ſex operæ illud expleviſſent?

Ut dignoſcamus, num quæſtio rationem exprimat directam, an inverſam, termini homogenei ſimul comparandi ſunt hoc pacto:

3 *operæ*: 6 *operæ*: 10 *horæ*: *x horæ*.

Statim apparet, poſtremos terminos non eo ordine eſſe, quo primos; ſeu quartum terminum eſſe non debere tanto majorem tertio, quanto ſecundus primo; ſex enim operæ idem opus breviori tempore, quam tres, explere debent. Ut ergo apta proportio ſervetur, terminus ignotus *x* tertio loco ſtatuendus eſt.

3 *operæ*: 6 *operæ*:: *x horæ*: 10 *horæ*.

Regula hæc *inverſa* dicitur, ſeu *reciproca*, ſive *indirecta*; in proportione enim, ut pri-

mum prolata fuit, duo poſtremi termini homogenei ordine duorum priorum inverſo ſunt diſpoſiti.

Regula trium uſus.

180. NOTA. *Regula trium* arithmeticæ, algebræ, & geometriæ facem præfert. Unico exemplo ejus in geometria utilitas ſatis indicabitur. Quum demonſtratum eſt, duas figuras, puta duo triangula, habere latera homologa proportionalia; tria latera menſuris nota, quartum, quod menſura obtineri nequeat, regulæ trium miniſterio indicabunt. (*Fig.* 45).

I. Si noverim, duo tiangula *abc*, ABC eſſe ſimilia, & habere latera homologa proportionalia, hanc proportionem, ſeu regulam trium inſtituo: baſis *ab*, quam metior, eſt ad baſim AB, quam metior, ut latus *ac*, quod metior, ad latus AC, quod metiri non poſſum. Ponamus baſim *ab* eſſe linearum 86, baſim AB hexapedarum 86, latus *ac* linearum 359; habebo analogiam.

86 *lineæ*: 86 *hexapedæ* :: 359 *lineæ*: *x hexapedæ*. Sive alternando.

86 *lineæ*: 359. *lineæ* :: 86 *hexapedæ*: *x hexapedæ*.

Ductis invicem duobus mediis, & producto per extremum notum diviſo, quotiens dat ipſam menſuram lateris ignoti AC, quod quærebatur.

II. Eodem modo alterum latus BC ignotum majoris trianguli invenietur, quod dimetiendo obtineri non poſſet. Ad hoc hanc proportionem inſtituo. Baſis *ab*, quam dimetior, eſt ad baſim AB, quam dimetior, ut latus *bc*, quod dimetior, eſt ad latus BC, quod metiri non poſſum. Ponamus adhuc, baſim *ab* continere partes 86 ſcalæ partium æqualium (141), baſim AB hexapedas 86; latus *bc* ejuſdem ſcalæ partes 497. Habebo proportionem:

ab:

ab : AB :: bc : BC

In numeris 86 : 86 :: 497 : x

Sive alternando 86 : 497 : : 86 x = 497 hexapedis.

III. Si notæ in duabus rationibus diverſæ eſſent, facta multiplicatione, & diviſione, quotiens lateris menſuram exprimet.

§. III.

RATIONES ARITHMETICÆ.

181 DEFINITIO. R*atio arithmetica* eſt differentia antecedentis a conſequente.

I. Subductione innoteſcit quo quantitas quantitatem excedat. Quare *rationis arithmeticæ valor* innoteſcit antecedentem a conſequente, aut hunc ab illo ſubducendo. Exempli gratia; valor rationis arithmeticæ 6 ad 2 innoteſcit 2 a 6 ſubducendo; differentia, ſeu valor hujus rationis eſt 4.

II. Duæ rationes arithmetice æquales *proportionem arithmeticam efficiunt*. Exprimitur numeris, & notis; 6 . 2 : 12 . 8; $a . b . c . d$.

II. Primus, & poſtremus proportionis arithmeticæ terminus ſunt ejus extrema; ſecundus, & tertius ejus *media*.

THEOREMA I.

182. *In proportione arithmetica ſumma extremorum æqualis eſt ſumma mediorum.*

DEMONSTRATIO I. In quavis proportione arithmetica; 5 . 8 : 9 . 12 ; ſumma extremorum 5, & 12 æqualis eſt ſummæ mediorum 8, & 9. Si enim primum extremum 5 exceditur 3 a primo medio 8 ; ſecundum medium 9 exceditur quoque 3 a ſecundo extremo 12 ; ceterum non daretur proportio arithmetica. Er-

go *defectus* primi extremi compenſatur ab *exceſſu* ſecundi; ergo ſumma extremorum $5+12$ æquare debet ſummam mediorum $8+9$.

II. Evidens eſt idem de alia quavis arithmetica proportione dici poſſe, ſive antecedentes a conſequentibus deficerent, ſive hos excederent; ſemper enim primi extremi defectus, aut exceſſus ab alterius exceſſu, aut defectu compenſaretur.

III. Hoc æque de proportione arithmetica literis indicata dici poteſt. Si $a.b:c.d$; jam $a+d=b+c$; ceterum inter has quantitates proportio arithmetica non daretur. Q. E. D. (*a*).

THEOREMA II.

183. Inverſa præcedentis adhuc vera eſt. *Si ſumma extremorum æqualis eſt ſummæ mediorum, quatuor quantitates ſunt arithmetice proportionales.*

DEMONSTRATIO. Si $a+d=b+c$ erit $a.b:c.d$. Quum enim ſumma $a+d$ æquet ſummam $b+c$;

I. Patet, ſi b excedit a quantitate x, etiam d excedere debere c eadem quantitate x; ceterum utraque ſumma non eſſet æqualis; quare habebitur proportio; $a.b:c.d$; quandoquidem conſequens b excedit ſuum antecedentem ea

(a) *Theorema algebrice ita evidentius demonſtrabis. Sit proportio arithmetica* a.b:c.d. *Differentia terminorum ſit* m. *Erit ergo* $b=a\pm m$, $d=c\pm m$. *Quare proportio erit* $a.a\pm m:c.c\pm m$. *Porro extremorum ſumma* $a+c\pm m$ *æquat mediorum ſummam* $a\pm m+c$. *Literis ſuffice numeros quoſvis arithmetice proportionales; idem ſemper invenies.* Q. E. D. *Interpres.*

eà quantitate, qua conſequens d ſuum antecedentem excedit.

II. Evidens quoque eſt, ſi b deficit ab a quantitate x, etiam d deficere debere ab ipſo c eadem quantitate x; ceterum ſumma $a+d$, ſummam $b+c$ non æquaret. Quare adhuc habebitur proportio $a.b:c.d$; conſequens enim b a ſuo antecedente deficit quantitate, qua conſequens d a ſuo antecedente deficit. Q.E.D.

184. COROLLARIUM. *In proportione arithmetica duo antecedentes, aut duo conſequentes loco mutari poſſunt, ſalva proportione.* In his enim mutationibus quatuor termini adhuc ita diſpoſiti ſunt, ut extremum extremo, medium medio addantur. Si $a.b:c.d$; jam $d.b:c.a$; atque adhuc $a+b.b:c+d.d$; vel $a-b.b:c-d:d$; atque ita de ceteris.

185. DEFINITIO. In proportione arithmetica dicitur *medium proportionale arithmeticum* terminus, qui ſit conſequens primæ rationis, & antecedens ſecundæ. Quare in proportione 6.9:9.12 numerus 9 eſt medium proportionale arithmeticum.

Proportio dicitur *continua*, quæ ita paſſim ſcribitur ÷ 6.9.12. Ita in hac ÷ 9.6.3 numerus 6 eſt medium proportionale arithmeticum; & bis ſumptum duos alios terminos æquat 9+3.

ARTICULUS II.

ARITHMETICA FRACTIONUM.

186. OBSERVATIO. *Scientia fractionum* in arithmetica, in geometria, in phyſica, in uſu civili maxime neceſſaria eſt; ſæpius enim quantitates, quæ pertractandæ ſunt numeris integris non exprimuntur, & reſiduorum valorem

noſcere oportet. Hæc arithmeticæ pars diviſioni, & theoriæ proportionum admodum affinis eſt.

187. DEFINITIO. *Fractio* eſt quantitas exprimens rationem partis ad totum. Numerator ſuperius partem, aut partium numerum exprimit; Denominator inferius ſcriptus totum in ſuas partes diviſum. Quare fractio, ratio geometrica, diviſio tria ſunt, quæ ad idem ſpectant.

I. Fractio re ipſa ratio geometrica eſt, & diviſio. Quod in hac ratione dicitur antecedens & conſequens, in diviſione dividendus, & diviſor, in fractione dicitur *numerator*, & *denominator* (13). Quare fractio, ut $\frac{2}{4}$, ut ratio geometrica exprimi poteſt, 2: 4, & reciproce ratio geometrica 2: 4 exprimi poteſt diviſione, aut fractione $\frac{2}{4}$.

II. Ut *nitidam fractionis ideam* habeamus, animadvertendum eſt, numerum quemvis integrum 24 exprimere quot partes æquales, quę ſingulæ unitas dicuntur, contineat; quæcumque hujus *unitatis natura* ſit, quæ eſſe poteſt aut linea, aut hexapeda, aut pes, aut libra, aut unica, aut hora, aut aliud. Exempli cauſa; 24 pedes indicant quantitatem 24 partes continentem, quarum ſingulæ ſunt unitas, quæ eſt pes. At datæ quantitatis nulla eſt unitas, ſeu pars numeris expreſſa, quæ concipi nequeat compoſita dato quodam minorum partium numero: harum partium una, aut plures hujus unitatis portionem, ſeu fractionem efficiunt. Exempli gratia; dimetienda ſit extenſio pedum decem inter, & undecim. Invenire poſſum pedes 10, & præterea partes tres pedis duodecim pollicibus æqualis. Partes hæ tres efficient fractionem ita: pedes $10 + \frac{3}{12}$ unius pedis. Si de hexapedis ageretur, haberemus hexapedas $10 + \frac{3}{6}$ hexapedæ: hujus enim in pedes

pedes diviſæ unitas eſt pes, quorum ſex continet.

III. *Fractio propria* eſt ſemper quantitas unitate minor; in hac enim fractione numerator ſemper denominatore minor eſſe debet, ſeu unitate in partes diviſa. Sæpius tamen *quantitates* dantur *more fractionum expreſſæ*, in quibus numerator eſt denominatori æqualis, aut illo major.

FRACTIONIS VALOR.

188. OBSERVATIO I. *Quum numerator eſt denominatori æqualis, fractio unitati æqualis eſt.* Exempli cauſa $\frac{12}{12}=1$. Totum enim omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis æquale, ſemper ſemel in ſe ipſo, aut in omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis continetur.

II. *Quum numerator major eſt denominatore, fractionis valor unitatem ſuperat.* Exempli cauſa, fractio valet duo, ſi numerator denominatoris duplus eſt, quatuor, ſi quadruplus; atque ita porro. Quare $\frac{4}{4}=1$; $\frac{8}{4}=2$; $\frac{12}{4}=3$; $\frac{24}{4}=6$; $\frac{100}{4}=25$.

III. *Quum numerator denominatore minor eſt fractio minus unitate valet.* Exempli cauſa $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$; $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$; $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$; $\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$; $\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$.

189. NOTA. Sicuti valor, ſeu exponens rationis geometricæ eſt quotiens antecedentis per conſequentem diviſi; *ita valor, ſeu exponens fractionis eſt quotiens numeratoris per denominatorem diviſi.* Unde ſequitur:

I. Quum duæ fractiones eundem denominatorem habent, eam eſſe majorem, cujus numera-

merator major eſt; tunc enim fractio magis ad unitatem accedit, aut illam magis excedit.

II. Quum duæ fractiones eundem habent numeratorem, eam majorem eſſe, cujus denominator minor eſt.

Sint duæ fractiones $\frac{9}{10}$, & $\frac{8}{10}$ *eundem denominatorem* habentes; prima major eſt altera; prima enim minor toto, ſeu unitate eſt parte tantum decima; quum $\frac{10}{10} = 1$; altera vero toto ſeu unitate duabus decimis partibus minor eſt.

Sint quoque fractiones $\frac{2}{3}$, & $\frac{4}{8}$ *eundem* habentes *numeratorem*. Prima major eſt altera; prima ſiquidem valet duas tertias unitatis, altera dimidiam tantum unitatem.

Duarum fractionum valores comparati.

190. COROLLARIUM. A principiis ſtatutis ſequitur:

I. *Quum duæ fractiones eundem denominatorem habent, earum valores eſſe ut numeratores.*

Fractiones $\frac{5}{10}$, & $\frac{4}{10}$ inter ſe ſunt ut 5, & 4.

II. *Quum duæ fractiones eundem numeratorem habent, earum valores ſunt in ratione reciproca, ſeu inverſa denominatorum.* (*a*) Fractio $\frac{1}{50}$

(a) *Exempli cauſa*; r *valeat* 4; R 12. *Fractio* $\frac{1}{r}$ erit $\frac{1}{4}$; *fractio* $\frac{1}{R}$ erit $\frac{1}{12}$. *Hæ fractiones ſunt inter ſe ut* 12 *ad* 4. *Fractio* $\frac{1}{rr}$ *erit* $\frac{1}{16}$; *fractio* $\frac{1}{RR}$ *erit* $\frac{1}{144}$. *Prima eſt ad ſecundam ut* 144 *ad* 16.

$\frac{5}{10}$ eſt ad $\frac{5}{12}$, ut 12 ad 10. Fractio $\frac{1}{4}$ eſt ad $\frac{1}{8}$ ut 8 ad 4. Fractio $\frac{1}{r}$ eſt ad fractionem $\frac{1}{R}$ ut R ad r. Fractio $\frac{1}{rr}$ eſt ad fractionem $\frac{1}{RR}$ ut RR ad rr.

III. *Quum duæ fractiones numeratores, & denominatores diverſos habent, earum valores eſſe inter ſe ut quotientes.* Fractio $\frac{3}{6}$ eſt ad fractionem $\frac{6}{18}$, ut quotiens primæ $\frac{1}{2}$ ad quotientem ſecundæ $\frac{1}{3}$.

THEOREMA.

191. *Fractio per eundem numerum quemvis multiplicata, aut diviſa valorem non mutat.*

DEMONSTRATIO I. Sit ſumma quævis, puta, aureorum 100, cujus dimidium, ſeu $\frac{1}{2}$ ad me ſpectet. Hanc fractionem in numerum quemvis *ducendo*, fractionis valor non mutabitur. Ambos fractionis terminos duc in 5; productum erit $\frac{5}{10}$; duc in 50; productum erit $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$; duc quoque in 1000; productum erit $\frac{100}{2000} = \frac{1}{2}$.

II. Sit alia quævis ſumma, cujus ad me ſpectent $\frac{2000}{8000}$; hoc eſt *quarta pars ſummæ*. Fractionem per numerum quemvis *dividendo* ejus valor non mutabitur. Exempli cauſa dividatur fractio hæc, ſcilicet numerator, eſt denominator per 2; quotiens erit $\frac{1000}{4000} = \frac{1}{4}$; per 200; quotiens erit $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$; adhuc per 1000; quotiens erit $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Q. E. D.

192 COROLLARIUM. Hinc ſequitur, *infini-*

finitas dari fractiones ejuſdem valoris, etſi diverſis terminis expreſſas.

Fractiones iis operationibus obnoxiæ ſunt, quibus numeri integri; at ut pertractentur, aliquando præviis operationibus duabus, *transformatione*, & *reductione* præparari debent.

FRACTIONUM TRANSFORMATIO.

193. DEFINITIO. *Fractionum transformatio* importat fractionem in aliam fractionem mutare, ſeu integrum in fractionem, ſeu fractionem in integrum.

194. PROBLEMA I. *Fractionem in alteram ejuſdem valoris mutare.*

SOLUTIO. Hoc obtineri poteſt:

I. *In eandem quantitatem fractionis numeratorem, & denominatorem ducendo.* Exempli cauſa, utrumque fractionis $\frac{1}{2}$ terminum in 2 ducendo habebimus $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{16}{32}$, $\frac{32}{64}$, atque ita porro; quæ fractiones diverſa ſpecie eundem valorem obtinent (192).

II. *Per eandem quantitatem utrumque fractionis terminum dividendo, quum diviſio ſine reſiduo fieri poteſt.* Exempli cauſa, utrumque fractionis $\frac{32}{64}$ terminum per 2 dividendo habebimus $\frac{16}{32}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$; quæ fractiones omnes æque valent.

195. NOTA. Poſtrema hæc operatio ſimpliciorem exhibet fractionem; propterea dicitur *reductio fractionis ad minimos terminos*. De hac nota ſequentia.

I. *Ut ad minimos terminos fractionem reducas*, utrumque terminum per numerum divide, quo uterque dividi poſſit ſine reſiduo; puta 2, hoc numero uterque terminus dividi poterit; deinde per 3, aut per 5 quoties diviſio jam reducta per

2, po-

2, poterit adhuc ſine reſiduo dividi per 3, aut per 5; atque ita porro.

In genere ut fractio reducatur ad minimos terminos, uterque ejus terminus per *maximum communem diviſorem*, qui ſine reſiduo haberi poſſit, dividendus eſt.

II. *Ad maximum communem diviſorem inveniendum duarum quantitatum*, major per minorem dividenda eſt. Si diviſio ſit ſine reſiduo, minor quantitas eſt maximus diviſor quæſitus. Si quid ſupereſt, (neglecto quotiente) minor quantitas per hoc reſiduum dividi debet: tunc ſi nihil ſupereſt, hoc erit maximus communis diviſor. Si vero alterum reſiduum datur, primum reſiduum per hoc alterum dividendum eſt; & ſemper (neglectis quotientibus) præcedens reſiduum per poſtremo inventum dividendum eſt. Illud vero ex his, quod præcedens reſiduum accurate dividet erit maximus communis diviſor quæſitus. Etenim ambæ quantitates erunt ſemper hujus poſtremi reſidui producta exacta; hoc enim datis vicibus repetitum utramque quantitatem æquabit, quæ ejus *multiplices* erunt.

Exempli cauſa velim egomet invenire duarum quantitatum 96, & 44 maximum communem diviſorem: majorem per minorem divido; quotiens eſt 2, quem negligo; & per reſiduum 8 divido 44. In altera hac diviſione quotiens eſt 5, quem negligo; & per reſiduum 4 divido præcedens reſiduum 8; poſtremus hic diviſor 4 dividendum 8 accurate dividit. Ergo diviſor 4 eſt *maximus communis diviſor* quantitatum 96, & 44. Pari modo numerus 5 eſt maximus communis diviſor numerorum 25, & 20.

III. Si poſtremum reſiduum ſit 1, indicio eſt, datas quantitates non niſi unitatem communem diviſorem habere; & hæ dicuntur *numeri primi*; ita quippe vocantur numeri, qui non niſi

per

pe ſe ipſos, & per unitatem accurate dividuntur. Hujuſmodi ſunt numeri 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, &c. (161).

Quoties itaque fractionis numerator, & denominator ſunt numeri primi, ad minores terminos reduci non poterunt; tunc enim numerator, & denominator communem diviſorem unitatem tantum habebunt.

196. PROBLEMA II. *Integrum in fractionem ejuſdem valoris transformare.*

SOLUTIO. Hoc obtinetur integrum in denominatorem illi dandum ducendo. Exempli cauſa; ſi 4 ad fractionem reducere velis, habebis $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{16}{4} = \frac{32}{8}$, atque ita porro. Evidens eſt, quamvis ex his fractionibus eſſe æqualem 4.

Pari modo, ſi quantitatem integram r ad modum fractionis exprimere velis, habebis $r = \frac{r}{1} = \frac{r^2}{r} = \frac{r^3}{r^2} = \frac{rx}{x}$. Quum enim quantitas r per eandem quantitatem multiplicata, & diviſa ſit, diviſio deſtruit quod multiplicatio compoſuit; & vice verſa. Quare in his omnibus expreſſionibus r ſuum valorem ſervat.

197. PROBLEMA III. *Fractionem in integrum ejuſdem valoris transformare.*

SOLUTIO. Hoc obtinetur numeratorem per denominatorem dividendo, quum fieri poteſt ſine reſiduo. Exempli cauſa $\frac{12}{3} = 4$. Ita $\frac{100}{10} = 10$; $\frac{a}{a} = a^0 = 1$.

Si diviſio accurate fieri nequeat, ut in fractione $\frac{14}{3}$, valor hujus fractionis erit integrum 4, plus reſiduum numeratoris, cui idem denominator relinquendus. Itaque $\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$.

RE-

REDUCTIO FRACTIONUM.

199. PROBLEMA I. *Fractiones ad communem denominatorem reducere.*

SOLUTIO I. Si duæ tantum fractiones ad eundem denominatorem reducendæ ſint, *reductio fit ambos utriuſque fractionis terminos per alterius denominatorem multiplicando.* Exempli cauſa; fractiones $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{4}$ ad eundem denominatorem 12 reducentur, ſi in prima 1, & 3 in 4 ducantur, & in altera 1, & 4 in 3. Nam $\frac{1\times4}{3\times4} = \frac{4}{12}$; deinde $\frac{1\times3}{4\times3} = \frac{3}{12}$.

Evidens eſt, has fractiones ad eundem denominatorem reductas valorem non mutaſſe. In prima numerator, & denominator per eandem quantitatem 4 multiplicati fuerunt; in altera per eandem quantitatem 3; ergo fractionum valor non fuit mutatus (191).

II. Ut *ad unicam fractionem reducatur integrum cum fractione*; exempli gratia $6 + \frac{3}{4}$, numerus integer in denominatorem fractionis ducendus eſt, fractionis numerator producto addendus, & ſumma novæ fractionis numerator efficienda, ſervato primæ fractionis denominatore. Quare $6 + \frac{3}{4}$ reducitur ad fractionem $\frac{27}{4}$; ita $3 + \frac{1}{2}$ reducitur ad $\frac{7}{2}$; ita $13 + \frac{2}{20}$ ad $\frac{262}{20}$; ita tandem $1 + \frac{4}{10}$ ad $\frac{14}{10}$. Reductio hæc in fractionum ſupputatione ſæpius neceſſaria eſt, quum integrum & fractum per integrum, & fractum multiplicandum, vel dividendum eſt. Tunc multiplicandus hinc ad fractionem unicam, inde multiplicator ad unicam fractionem reducendus eſt.

III. Si fractiones plures, quam duæ, ad eundem denominatorem reducendæ ſint, hoc fit *ſingularum numeratorem, & denominatorem ducendo in productum denominatorum aliarum fractionum.* Sint tres fractiones $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ ad eundem

dem denominatorem reducendæ. Primum ambos primæ fractionis $\frac{5}{6}$ terminos duco in productum 15 denominatorum 3, & 5; & habeo fractionem transformatam in ſibi æqualem $\frac{75}{90}$. Deinde duos terminos alterius fractionis $\frac{2}{3}$ duco in productum 30 denominatorum 6, & 5, & habeo fractionem transformatam in ſibi æqualem $\frac{60}{90}$. Tandem ambos tertiæ fractionis $\frac{4}{5}$ terminos duco in productum 18 denominatorum 6, & 3; & habeo fractionem transformatam in ſibi æqualem $\frac{72}{90}$. Itaque hac methodo habebis datas fractiones transformatas in $\frac{75}{90}$, $\frac{60}{90}$, $\frac{72}{90}$.

Eadem methodo utimur in fractionibus algebricis. Duæ fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ad eundem denominatorem reductæ ſunt $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$. Ita tres fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$ ad eundem denominatorem reductæ ſunt $\frac{adn}{bdn}$, $\frac{cbn}{bdn}$. $\frac{mbd}{bdn}$.

200. PROBLEMA II. *Fractionem ad quemvis denominatorem reducere, ſeu fractionis valorem invenire.*

SOLUTIO. Ut fractio, puta $\frac{4}{12}$ ad denominatorem quemvis, puta 6, reducatur; oportet:

I. Utrumque fractionis terminum in datum denominatorem ducere; ex quo habebimus $\frac{24}{72}$.

II. Utrumque novæ fractionis terminum dividere per primum denominatorem; unde habebimus fractionem reductam $\frac{2}{6}$, cujus denominator eſt 6.

Ita fractionem reducere dicitur *fractionis valo-*

lorem invenire ; quoniam ita fractiones habentur in partibus notis; exempli gratia, hexapedæ partes aut fractiones in pedibus, ſeu partibus ſextis, quæ ſunt partes notæ; pes enim eſt $\frac{1}{6}$ hexapedæ; quod obtinetur hexapedæ fractionem reducendo ad denominatorem 6.

Pari modo ſi habeantur fractioner $\frac{5}{17}$ horæ, aut $\frac{17}{44}$ ſummæ librarum; fractionum harum valor invenitur primam reducendo ad denominatorem 60 minuta, alteram ad denominatorem 20 ſolidos; quæ ſunt partes notæ horæ, & libræ.

Evidens eſt, hac duplici operatione fractionis valorem non mutari; in his enim transformationibus tantum per eandem quantitatem multplicatio fit, aut diviſio, quibus fractionis valor non mutatur (191).

FRACTIONUM ADDITIO.

201. REGULA I. Ad addendas fractiones ejuſdem denominatoris; ſumma numeratorum capienda eſt, & ſummæ communis denominator ſubſcribendus. Exempli cauſa, evidens eſt, $\frac{5}{8}+\frac{2}{8}+\frac{7}{8}+\frac{4}{8}=\frac{18}{8}$; tum $\frac{6}{10}+\frac{11}{10}+\frac{7}{10}=\frac{24}{10}$.

202. REGULA II. *Ad addendas fractiones diverſi denominatoris illa ad eundem denominatorem reducenda ſunt. Tum ſumma fractionum reductarum, qua erit novus numerator, ſubſcribendus denominator fractionum reductarum.* Regula hæc in primam recidit. Exempli gratia ad addendas fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, eas ad has reduco $\frac{16}{24}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{18}{24}$ (199); ſumma numeratorum eſt 46. Habeo igitur fractionem $\frac{46}{24}$; quæ reducta ad minimos terminos eſt $1 + \frac{11}{12}$.

FRA-

FRACTIONUM SUBDUCTIO.

203. REGULA I. *Ut fractio a fractione ejuſdem denominatoris ſubducatur, ſumenda eſt numeratorum differentia, & ea efficienda numerator novæ fractionis, cui ſubſcribatur denominator communis.* Exempli cauſa; ſi ſubducere velis $\frac{7}{10}$ a $\frac{15}{10}$ patet te habiturum $\frac{8}{10}$.

204. REGULA II. *Ut fractio a fractione diverſi denominatoris ſubducatur, utraque ad eundem denominatorem reducenda eſt, & differentia numeratorum reductorum capienda, quæ novæ fractionis numerator erit, denominatore communi ſubſcripto.* Exempli cauſa; ſubducere oporteat $\frac{1}{4}$ a $\frac{2}{3}$;fractiones has reduc $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$. Patet differentiam eſſe $\frac{5}{12}$.

205. NOTA. Si fractio quantitatis ſubducendæ major eſt; ſeu *ſi fractio a numero integro ſubducenda ſit;* tunc ad fractionem numeri hujus integri unitas reducenda eſt. Exempli gratia; ut $3+\frac{2}{3}$ ſubducantur a $6+\frac{1}{4}$, quantitatem $6+\frac{1}{4}$ reduco ad quantitatem $5+\frac{5}{4}$; & deinde reducens $\frac{2}{3}$, & $\frac{5}{4}$ ad eundem denominatorem, habebo $\frac{8}{12}$, & $\frac{15}{12}$; $\frac{8}{12}$ a $\frac{15}{12}$ ſubduco: remanent $\frac{7}{12}$. Deinde 3 a 5 ſubduco: remanent 2. Quare differentia quæſita eſt $2+\frac{7}{12}$.

FRACTIONUM MULTIPLICATIO.

206. DEFINITIO. *In fractionum multiplicatione* vel fractio per integrum, vel fractio per fractionem, vel integrum per fractionem multi-

ti-

tiplicabitur; vel demum integrum cum fractione per integrum cum fractione.

207. REGULA I. *Ad multiplicandam fractionem per integrum ſatis eſt numeratorem fractionis in integrum ducere.* Exempli cauſa, ad multiplicandum $\frac{3}{5}$ per 4, duc numeratorem 3 in 4, & retento eodem denominatore habebis ractionem $\frac{12}{5}$, quæ eſt productum $\frac{3}{5}$ in 4.

Ratio hujus eſt, quia ducendo $\frac{3}{5}$ in 4 queritur fractio quater major. At ſolum numeratorem in 4 ducendo fit fractio quater major; fractiones enim $\frac{3}{5}$, & $\frac{12}{5}$ eundem denominatorem habentes ſunt inter ſe ut denominatores (190).

Poteſt quoque numerus integer in fractionem converti unitatem illi pro denominatore tribuendo; tunc hæc regula in ſequentem recidet.

208. REGULA II. *Ad fractionem multiplicandam per fractionem, duo numeratores, & duo denominatores invicem ducendi ſunt.* Exempli cauſa; fractiones $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{8}$ invicem multiplicantur ducendo 3 in 4, & 5 in 8. Habebis productum $\frac{12}{40}$, quod erit fractionum multiplicatio.

Ut hujus vim intelligas adverte, ad multiplicandam primam fractionem $\frac{3}{5}$ per numerum integrum 4, tantum numeratorem 3 in 4 ducendum eſſe; & habebitur fractio $\frac{12}{5}$, quæ eſt verum productum, ut oſtendimus. At productum $\frac{3}{5}$ in $\frac{4}{8}$ octies minus eſſe debet, quam $\frac{12}{5}$, multiplicator enim $\frac{4}{8}$, (ſeu 4 diviſa per 8,) eſt octies minor multiplicatore integro 4; debet ergo fractio $\frac{12}{5}$ fieri octies minor. At ad

fra-

fractionem $\frac{12}{5}$ octies minorem reddendam ſatis eſt ejus denominatorem in 8 ducere; habebitur enim fractio $\frac{12}{40}$ octies minor fractione $\frac{12}{5}$; duæ ſiquidem fractiones ejuſdem numeratoris ſunt inter ſe in ratione inverſa denominatorum (190).

209. REGULA III. *Ad multiplicandum integrum per fractionem, integrum ad fractionem reducere oportet. Tunc in præcedentem regulam recidimus*. Exempli cauſa; ad multiplicandum 7 per $\frac{6}{10}$, integrum 7 transforma in $\frac{7}{1}$; & invicem numeratores, & denominatores fractionum ducito; productum erit $\frac{42}{10}$, quod reſultat ex fractionibus invicem ductis.

Ad multiplicandum *integrum cum fracto* per integrum cum fracto, reduc multiplicandum ad unicam fractionem (199); tunc has duas fractiones invicem duces juxta regulam præcedentem (208).

FRACTIONUM DIVISIO.

210. DEFINITIO. In *fractionum diviſione* aut fractio per integrum, aut fractio per fractionem, aut integrum per fractionem, aut integrum cum fracto per integrum cum fracto dividenda ſunt. Fractionum diviſio eſt operatio inverſa multiplicationis.

211. REGULA I. *Ut fractio per integrum dividatur*;

I. Si fractionis numerator per integrum exacte dividi poteſt, hic numerator per integrum dividendus eſt, & fractioni ſuus denominator relinquendus. Exemplum. Ut $\frac{6}{12}$ per 3 divi-

dan-

dantur, divide 6 per 3 habebis $\frac{2}{12}$ fractionem diviſam per 3, ſeu triplo minorem effectam. Quandoquidem $\frac{6}{12} : \frac{2}{12} :: 6 : 2$ (190).

II. Si vero fractionis numerator exacte per integrum dividi nequeat; *denominator fractionis in integrum ducendus eſt, intacto numerare.* Exemplum. Ut dividas $\frac{2}{3}$ per 4, duc 3 in 4: habebis $\frac{2}{12}$ quotientem fractionis $\frac{2}{3}$ per 4 diviſæ.

Ratio hujus alterius methodi eſt, quia dividendo fractionem per 4 volumus fractionem quater minorem efficere; at quater minor fit, illi quadruplum denominatorem, intacto numeratore, tribuendo; valor enim fractionum $\frac{2}{3}$, & $\frac{2}{12}$ eundem numeratorem habentium eſt in ratione inverſa denominatorum (190).

III. *Poteſt quoque integrum ad fractionem reduci illi pro denominatore unitatem tribuendo*; tunc regula in ſequentem recidet. Exemplum $\frac{2}{3}$ diviſa per $\frac{4}{1} = \frac{2}{12}$.

212. REGULA II. *Ut fractio per fractionem dividatur, decuſſata multiplicatio facienda eſt.* Multiplicandus ſcilicet eſt numerator primæ per denominatorem ſecundæ, & denominator primæ per numeratorem ſecundæ. Exemplum. Ut dividas $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$ duc 2 in 5, & 3 in 4. Producta $\frac{10}{12}$ erunt quotiens quæſitus.

Methodi ratio eſt, quia ſi dividenda eſſent $\frac{2}{3}$ per 4, quotiens eſſent $\frac{2}{12}$, ut ſupra demonſtravimus. At non per 4 diviſio fit, ſed per numerum quinquies minorem; debet igitur quotiens eſſe quinquies major $\frac{2}{12}$.

Porro hic quintuplus fit numeratorem 2 primæ fractionis in denominatorem 5 ſecundæ ducendo. Quum enim denominatores iidem ſunt, duæ fractiones $\frac{2}{12}$, $\frac{10}{12}$ ſunt inter ſe ut numeratores (190).

213. REGULA III. *Ad dividendum integrum per fractionem, integrum ad fractionem reducendum eſt, cujus denominator ſit unitas.* Tunc diviſio in præcedentem recidit. 10, aut $\frac{10}{1}$ diviſa per $\frac{7}{12} = \frac{7}{120}$. Ita a, vel $\frac{a}{1}$ diviſum per $\frac{a}{2} = \frac{2a}{a}$.

Ad dividendum *integrum cum fracto* per integrum cum fracto, reduc dividendum ad unicam fractionem; & diviſorem quoque ad aliam fractionem unicam (199): tunc novæ fractiones juxta præcedentem regulam dividentur. (212).

FRACTIONUM ELEVATIO, ET EXTRACTIO.

214. REGULA I. *Ad habendum fractionis quadratum, numerator, & denominator ſinguli ad ſuum quadratum ſunt elevandi.* Exemplum. Quadratum $\frac{1}{2}$ eſt $\frac{1}{4}$. Quadratum $\frac{3}{5}$ eſt $\frac{9}{25}$. Ita quadratum $\frac{a}{x}$ eſt $\frac{a^2}{x^2}$.

II. *Ut habeatur cubus fractionis, denominator, & numerator ſinguli ad ſuum cubum ſunt elevandi.* Cubus $\frac{1}{2}$ eſt $\frac{1}{8}$; cubus $\frac{4}{10}$ eſt $\frac{64}{1000}$. Ratio harum operationum eſt evidens ex dictis de fractionum multiplicatione.

III. Elevatio fractionis ad quamvis potentiam fit numeratorem, & denominatorem ad datam potentiam elevando.

IV. Ex oppoſita ratione extractio fractionum fit

fit, *radicem tum numeratoris, tum denominatoris ſumendo*. Exempli cauſa $\frac{2}{3}$ ſunt radix quadrata $\frac{4}{9}$, & cubica $\frac{8}{27}$.

V. Quum radix accurate extrahi nequit, indicatur ſigno radicali. Radix quadrata $\frac{2}{5}$ eſt $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

215. COROLLARIUM I. *Fractiones quum elevantur minuuntur, in extractione augentur*. Hoc eſt: in fractionibus radix potentia major eſt; quum in numeris integris minor ſit.

EXPLICATIO. In numero integro 2, exempli cauſa, radix 2 *minor* eſt ſua ſecunda potentia, ſeu quadrato 4, ſua tertia potentia, ſeu cubo 8. At in numero fractionario $\frac{1}{2}$, exempli gratia, fractio $\frac{1}{2}$ *major* eſt ſuo quadrato $\frac{1}{4}$, ſuo cubo $\frac{1}{8}$; ut eſt evidens. Pari modo fractio $\frac{2}{3}$ major eſt ſuo quadrato $\frac{4}{9}$, & ſuo cubo $\frac{8}{27}$. Ita quoque fractio $\frac{a}{b}$ major eſt ſuo quadrato $\frac{a^2}{b^2}$, & ſuo cubo $\frac{a^3}{b^3}$.

216. COROLLARIUM II. *Numeri integri radix fractio eſſe nequit*; fractionis enim radix ſemper major eſt ſua potentia, ut oſtendimus; at in numeris integris ſemper potentia radice major eſt.

Nota tamen, in horum Corollariorum hypotheſi ſemper fractionem debere eſſe *veram*; quæ ſcilicet unam, aut plures unitatis partes exprimat; quare numerator denominatore minor eſſe debet. Exempli cauſa, $\frac{5}{4}$ ſunt $1 + \frac{1}{4}$; quare $\frac{5}{4}$ vera fractio eſt (187).

Hic apparet cur nunquam accurate inveniri poſſit radix quadrata, aut cubica numeri integri 2, aut 10, aut 67, qui non eſt quadratum, aut cubus perfectus a numero integro productus.

ARTICULUS III.

RATIONES COMPOSITÆ.

217. DEFINITIO. R*Atio compoſita* eſt productum duarum, aut plurium rationum ſimplicium. Exempli cauſa $\frac{ac}{bd}$ eſt ratio compoſita ex rationibus ſimplicibus $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Ita ratio $\frac{ace}{bdf}$ eſt compoſita ex tribus rationibus ſimplicibus $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$. Exempli cauſa in numeris duæ hæ rationes ſimplices $\frac{2}{4}$, $\frac{7}{8}$ invicem ductæ dabunt rationem compoſitam $\frac{14}{32}$.

Pari modo tres rationes ſimplices $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{3}$, ſi invicem ducantur efficient rationem compoſitam $\frac{56}{120}$.

RATIONES DUPLICATÆ.

218. DEFINITIO. Rationes ſimplices rationem compoſitam efficientes eſſe poſſunt aut æquales, aut inæquales. Quum inæquales ſunt, ratio producti dicitur ſimpliciter *ratio compoſita*; quum ſunt æquales, ratio producta dicitur *duplicata*.

Quare *ratio duplicata* eſt productum duarum rationum æqualium invicem ductarum. Exemplum. Si $\frac{4}{8} = \frac{3}{6}$, $\frac{12}{48}$ eſt ratio duplicata.

Si unica ſit ratio componens, puta $\frac{a}{b}$, *ratio*

tio duplicata hujus rationis efficitur a quadratis antecedentis, & conſequentis. Quare $\frac{aa}{bb}$ eſt ratio duplicata rationis $\frac{a}{b}$; ita $\frac{16}{25}$ eſt ratio duplicata $\frac{4}{5}$.

Hinc apparet, rationem duplicatam eſſe quid omnino diverſum a ratione dupla (156); ut apparebit, rationem triplicatam eſſe quid omnino diverſum a ratione tripla.

RATIONES TRIPLICATÆ.

219. DEFINITIO. *Ratio triplicata* eſt productum trium rationum æqualium. Si $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}$; invicem duc tres antecedentes, & tres conſequentes; habebis rationem triplicatam $\frac{24}{192}$. Ita ſi $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, ratio $\frac{ace}{bdf}$ erit triplicata.

Si unica ſit ratio componens, *ratio* hujus ſimplicis *triplicata* efficitur a cubis antecedentis, & conſequentis. Exemplum. $\frac{a^3}{b^3}$ eſt ratio triplicata rationis $\frac{a}{b}$. Ita in numeris $\frac{64}{125}$ eſt ratio triplicata rationis $\frac{4}{5}$.

Ex his definitionibus habes, rationem quamvis duplicatam, aut triplicatam eſſe rationem compoſitam; non tamen quamvis rationem compoſitam eſſe duplicatam, aut triplicatam. Rationes duplicatæ maximum uſum habent in menſura ſuperficierum, & triplicatæ in menſura ſolidorum.

In ſequentibus theorematibus rationum ſimplicium, & compoſitarum ſummas, producta, quotientes, reſpectus perpenduntur.

THEOREMA I.

220. *Si duæ quantitates per tertiam multiplicantur, aut dividuntur, producta, aut quotientes eandem inter ſe rationem dicent, quam multiplicanda, aut dividenda quantitates.*

DEMONSTRATIO. Alibi (163, 165) propoſitio demonſtrata fuit. Novam hic algebricam demonſtrationem addimus.

I. Si radices *a*, *b* in tertiam quantitatem *m* *ducantur*; producta *am*, *bm* in eadem erunt ratione, in qua radices *a*, *b*; habebitur ſcilicet proportio; $am : bm :: a : b$. Productum quippe extremorum producto mediorum æquale eſt. $abm = abm$.

II. Idem ſequetur, ſi duæ quantitates *a*, *b* per tertiam *m dividantur*. Patet enim, $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: a : b$; quoniam $\frac{ab}{m} = \frac{ab}{m}$ (207); patet quoque $\frac{12}{3} : \frac{36}{3} :: 12 : 36$; atque ita de ceteris. Q. E. D.

221. COROLLARIUM. Plures hinc ſequuntur veritates alibi in hoc opere ſtatutæ, quas hic indicamus. Sequitur quippe:

I. *Tota eſſe inter ſe ut eorum partes ſimiles*; nempe ut eorum dimidia, ut partes tertias, centeſimas, &c. Et partes ſimiles, dimidias, quartas, centeſimas, &c. *eſſe inter ſe ut eorum tota.*

II. *Producta habentia radicem communem eſſe inter ſe ut radices inæquales*. Exempli cauſa; producta *am*, *bm* habentia radicem communem *m* ſunt inter ſe, ut radices inæquales *a*, *b*; ſi enim termini communes deleantur *m*, & *m*, *remanent a*, & *b* (206).

III. Poſſe in proportione per eandem quantitatem multiplicari, aut dividi duos antecedentes, vel duos conſequentes, ſalva proportio-

tione. Exempli cauſa; poteſt alteruter cujuſque rationis terminus per eandem quantitatem *multiplicari*, aut *dividi*. Si $a : b :: c : d$; etiam $am : b :: cm : b$; quum enim $ad = bc$, etiam $adm = bcm$. Pari modo, ſi $a : b :: c : d$; etiam $\frac{a}{m} : b :: \frac{c}{m} : d$; deleta enim in antecedentibus quantitate communi, remanent a, & c (106).

THEOREMA II.

222. *In ſerie rationum æqualium ſumma antecedentium eſt ad ſummam conſequentium, ut unus antecedens ad ſuum conſequentem.*

DEMONSTRATIO. Sint rationes æquales $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7}$. Summa antecedentium $6 + 8 + 10 + 14 = 38$ eſt ad ſummam conſequentium $3 + 4 + 5 + 7 = 19$ ut unus quilibet antecedens 6 ad ſuum conſequentem 3.

Concipi enim poteſt antecedens totalis 38 diviſus in eaſdem partes, quæ ante additionem ſejunctæ invicem erant. Atqui pars quævis antecedentis totalis dupla eſt partis efficientis ſuum conſequentem; ergo antecedens totalis, qui eſt ſumma antecedentium peculiarium, bis continet conſequentem totalem, qui eſt ſumma peculiarium conſequentium. Ergo ſumma antecedentium eſt ad ſummam conſequentium, ut unicus antecedens ad ſuum conſequentem.

Eodem ratiocinio oſtendes, ſi quilibet antecedens centies continetur in ſuo conſequente, etiam ſummam antecedentium centies contentum iri in ſumma conſequentium. Q. E. D.

223. COROLLARIUM. *In ſerie rationum æqualium, nota ratione unius antecedentis ad ſuum conſequentem, innoteſcit ratio ſummæ omnium antecedentium ad ſummam omnium conſequentium.* Etenim hæ duæ ſummæ ſunt duo

tota conſtantia æquali numero partium ſimilium, quæ ſunt inter ſe ut tota; & duarum ex his partibus ſimilibus ratio innoteſcit.

THEOREMA III.

224. *Si quivis proportionis terminus per ſimilem proportionis alterius terminum multiplicetur producta erunt proportionalia.*

DEMONSTRATIO. Sint duæ proportiones quælibet $a:b::c:d$; & $r:s::t:u$. Demonſtrandum eſt ducto a in r, b in s, c in t, d in u, adhuc producta fore proportionalia. Ut hoc demonſtrem.

I. Voco m exponens primæ proportionis $a:b::c:d$; & habeo $a=bm$, $c=dm$ (158). Poſſum itaque ipſi a ſubſtituere quantitatem æqualem bm, & ipſi c dm; tunc habebitur proportio allatę æqualis $bm:b::dm:d$; quæ eſt eadem proportio aliis notis expreſſa.

II. Voco n exponens alterius proportionis $r:s::t:u$; quod exponens ab exponente primæ proportionis diverſum eſſe poteſt; & habeo $r=sn$, $t=un$; quibus, ut ſupra, ſubſtitutis habebitur æqualis proportio $sn:s::un:u$.

Proportiones $\begin{cases} a:b::c:d=bm:b::dm:d \\ r:s::t:u=sn:s::un:u \end{cases}$

Producta $ar:bs::ct:du=bmsn:bs::dmun:du$

III. Quatuor quantitates ſunt proportionales quum productum extremorum æquale eſt producto mediorum (172): at in quatuor poſtremis quantitatibus productum $bdmnsu$ extremorum producto $bdmnsu$ mediorum æquale eſt; ergo quatuor hæ quantitates ſunt proportionales.

At quatuor quantitates præcedentes his ſunt æquales, ſingulæ ſingulis; ergo & hæ ſunt pro-

proportionales, quæ primæ proportionis in ſecundam ductæ producta ſunt. Q. E. D.

225. COROLLARIUM I. *Quum quatuor quantitates ſunt proportionales; ſi ſingula ad quadratum, aut ad cubum efferantur, quadrata, aut cubi adhuc erunt proportionales.*

DEMONSTRATIO I. Quum quatuor quantitates a, b, c, d ad quadratum elevantur, idem eſt, ac ſi termini proportionis $a : b :: c : d$ ſinguli per ſingulos alterius proportionis $a : b :: c : d$ multiplicarentur. Atqui tunc producta ſunt proportionalia, ut modo demonſtratum eſt: ergo hæc quadrata, quæ hujuſmodi producta ſunt, ſunt proportionalia.

Proportiones.	($a : b :: c : d$
	($a : b :: c : d$
Quadrata.	$a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$
Radices.	$a : b :: c : d$
Cubi.	$a^3 : b^3 :: c^3 : d^3$

II. Si quadrata hæc per ſuas radices multiplicentur, termini unius proportionis per terminos alterius multiplicantur. Atqui tunc producta, quæ cubi ſunt, ſunt proportionalia: ergo quum quatuor quantitates ſunt proportionales, etiam proportionem ſervant earum quadrata, & cubi.

III. Nota tamen, quadratorum proportionem non eam eſſe, quæ radicum; nec cuborum, quæ quadratorum, aut radicum. Ratio radicum modo major eſt, modo minor ratione quadratorum, & cuborum. Res in numeris ob oculos ponitur.

Radices.	Quadrata.	Cubi.
1 : 2 :: 3 : 6 ..	1 : 4 :: 9 : 36	1 : 8 :: 27 : 216.
2 : 1 :: 6 : 3 ..	4 : 1 :: 36 : 9	8 : 1 :: 216 : 27.

226. COROLLARIUM. II. *Si quatuor quantitates ſunt proportionales: earum dupla, tripla, omnes æque multiplices ſunt adhuc propor-*

tionales. Hoc enim eſt illas ſingulas ducere in 2, 3, &c. quod earum rationem non immutat (220).

THEOREMA IV.

327. *Si ſinguli proportionis termini per analogos alterius proportionis terminos dividantur, quotientes erunt proportionales.*

DEMONSTRATIO. Sint duæ quævis proportiones, quarum exponentia ſint m, & n, ut in præcedente theoremate.

$$\text{Proportion.} \left\{ \begin{array}{l} a : b :: c : d = bm : b :: dm : d \\ r : s :: t : u = sn : s :: un : u \end{array} \right.$$

$$\text{Quotientes.} \frac{a}{r} : \frac{b}{s} :: \frac{c}{t} :: \frac{d}{u} = \frac{bm}{sn} : \frac{b}{s} :: \frac{dm}{un} : \frac{d}{u}$$

Si in poſtrema proportione dividatur utrinſque rationis antecedens per ſuum conſequentem, exponens utrinque eſt $\frac{m}{n}$; ergo prima ratio ſecundæ æqualis eſt (159). Quare in poſtrema hac proportione primus antecedens eſt ad ſuum conſequentem, ut ſecundus antecedens ad ſuum; quare quantitates ſunt proportionales.

At quantitates $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{s}$, $\frac{c}{t}$, $\frac{d}{u}$ ſunt quantitatibus ſequentis proportionis æquales; quum itaque hujus termini ſint proportionales, etiam termini illius erunt proportionales. At hi ſunt quotientes terminorum duarum proportionum invicem diviſorum; ergo iſti quotientes ſunt proportionales. Q. E. D.

228. COROLLARIUM I. *Quum quatuor quantitates ſunt proportionales, earum radices quadrata, aut cubica ſunt proportionales.*

DEMONSTRATIO. Quandoquidem quadratorum

torum proportionalium radices ſunt proportionales (225):

I. Si proportionis cujuſvis $a : b :: c : d$ termini conſiderentur ut quadrata, patet eorum radices fore proportionales; quare habebimus $\sqrt{a} : \sqrt{b} :: \sqrt{c} : \sqrt{d}$.

II. Si termini proportionis cujuſvis $a : b :: c : d$ conſiderentur ut cubi, patet eorum radices cubicas adhuc fore proportionales (225). Quare habebimus $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} :: \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}$.

III. At hic, ut in primo præcedente corollario, nota, rationem cuborum non eam eſſe, quæ radicum quadratarum; neque hanc eam, quæ radicum cubicarum. Proportiones hæ inter ſe diverſæ ſunt, at veræ tamen proportiones. Ita tres hæ proportiones $2 : 4 :: 6 : 12$, $3 : 10 :: 6 : 20$; $10 : 3 :: 20 : 6$ inter ſe diverſæ, tamen ſingulæ ſunt vera proportio (172).

229. COROLLARIUM II. Si quatuor quantitates ſunt proportionales, omnes earum partes æque ſubmultiplices ſunt proportionales. Sumptis enim earum dimidiis, tertiis, quartis, partibus demum quibuſvis ſubmultiplicibus idem præſtamus, ac ſi ſingulas per 2, 3, 4, aut alium quemvis numerum divideremus; quod earum rationem non immutat (220).

ARTICULUS IV.

PROGRESSIONES.

230. DEFINITIO. *Progreſſio* dicitur ſeries rationum æqualium, in qua quiſque terminus eſt ſimul conſequens rationis præcedentis, & antecedens ſequentis. Datur *progreſſio arithmetica*, & *progreſſio geometrica*. Utraque aut finita eſt, aut infinita.

Progreſſio finita dicitur, quæ finito conſtat terminorum numero; *infinita* quæ infinitis terminis conſtat. Progreſſiones hæ quoque vocantur ſeries.

Progreſſio arithmetica ita paſſim indicatur ÷ 2, 3, 4, 5, 6 &c ÷ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.

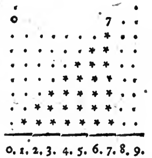
Progreſſio geometrica paſſim alia hac ratione indicatur ∺ 3, 6, 12, 24, 48, 96; & ∺ *a*. *b*. *c*. *d*. *e*. *f*. *g*. &c.

PARAGRAPHUS PRIMUS.

PROGRESSIONES FINITÆ.

231. PROBLEMA. S*eriei finitæ numerorum naturalium a zero incipientis valorem invenire.*

SOLUTIO. Sit progreſſio arithmetica numerorum naturalium, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Omnium terminorum ſumma illico invenietur, *ultimum terminum in quantitatem ſe unitate majorem ducendo, & producti dimidium ſumendo.*



Exprimatur enim ſeries numerorum naturalium aſteriſcis in columnas diſpoſitis, nempe + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, atque ita porro. Ad complendum rectangulum regrediendo, columnis poſtremam, puta 7, præcedentibus ſcribendus erit æqualis aſteriſcorum numerus, nempe + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, tunc poſtrema columna regrediendo cadet ſub columna 0.

Por-

Porro integra aſteriſcorum ſumma hoc rectangulum 0770 efficientium haberetur altitudinem 7 in altitudinem 8 ducendo, quæ præterea exprimit columnam oo, quam regrediendo addere oportet. Ergo habebitur aſteriſcorum ſumma creſcens juxta ſeriem numerorum naturalium ſi ſumatur dimidium productum ex ultimo termino ducto in terminum unitate majorem; ſumma hæc ſiquidem æqualis eſt dimidio producto & rectangulo. Q. E. D.

232. COROLLARIUM. *Quum ſeries numerorum naturalium incipit ab unitate, ſumma omnium terminorum æqualis eſt dimidio producto ultimi termini ducti in numerum illo unitate majorem*. Exempli cauſa:

Si ſeries ſex terminos habeat 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, ſumma horum omnium eſt dimidium productum ultimi termini 6 in 7, numerum illo unitate majorem.

Si terminos habeat 336, omnium terminorum ſumma eſt dimidium productum poſtremi termini 336 in 337, numerum illo unitate majorem; 336 × 337 = 113232: hujus dimidium eſt ſumma omnium terminorum ſeriei numerorum naturalium ab unitate incipientis, & cujus ultimus terminus ſit 336; & hæc ſumma eſt 56616.

NOTA. Simili theoria *inveniri poterit ſumma omnium terminorum ſeriei geometricæ finitæ, cujus termini ab unitate incipientes rationem duplam ſequantur* ∺ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. &c.

Ponamus enim, quemlibet hujus ſeriei terminum exhiberi a columna totidem punctorum quot habet unitates, apparebit, primum terminum, plus 1, eſſe æqualem ſecundo; duos primos terminos + 1 eſſe æquales tertio; tres primos terminos + 1 eſſe æquales quarto; & ſic deinceps in infinitum. Quare perpetua dupli-

catio-

catione poſtremum terminum 25, exempli gratia, quærendo, invenietur valor poſtremi hujus termini 25; & valor hic duplicatus dempta unitate erit ſumma omnium terminorum datæ progreſſionis ad terminum uſque 25 incluſive.



Indus quidam Seſſa nomine invento latrunculorum ludo, omnium ſcilicet ludorum pulcherrimo, regi ſuo inventum ſuum obtulit, & explicavit. Rex inventi pulcritudinem, & ingenium miratus, Seſſam percontatur quo ſibi præmio gratificari ſe velit. Tritici granum dabis mihi, inquit Seſſa, in primo abaci hujus quadrato, duo in ſecundo, quatuor in tertio, atque ita porro grana mihi duplicabis ad quadratum uſque ſexageſimum quartum. Riſit rex poſtulatum ignorans quo adduceret. At re maturius inſpecta, novit & in petitione Seſſam ludere, & novam ſibi ingenii laudem promereri; & immenſam Indorum regionem vix annis octo aut decem millibus tantam tritici copiam producturam. In hypotheſi ſiquidem, quod grana 72 dracmam pendant (7. V.), & quod *tritici modius* Indicus quintalia Gallica pendat 36; ad quadratum vigeſimum quintum inveniemus Seſſæ deberi grana bis 16, 777, 216, quæ modium quintalium 36 aliquanto excedunt; & ad quadratum quinquageſimum illi deberi modios ſimiles ultra 16, 777, 216; progreſſionem vero ad quadratum ſexageſimum quartum producendo modiorum ſummam fore immenſam,

233. PROBLEMA II. *Valorem ſeriei finitæ numerorum imparium* 1, 3, 5, 7, 9, 10, *&c. invenire*.

SO-

SOLUTIO. Sit ſeries finita numerorum imparium ab unitate incipiens, & quivis terminus exprimat ſtatutum aſteriſcorum numerum, quos in quadrata diſtribuas, ſi fieri poteſt:

Primo termino 1 aſteriſcum præfige. Secundo termino 3 hujus ſeriei duos aſteriſcos præfige. Unus remanebit primo termino præfigendus, & quadratum habebis. Tertio termino 5 tres aſteriſcos præfige; duo remanebunt, alter ſecundo, alter primo termino, prefigendi; & adhuc quadratum habebis. Quarto termino 7 quatuor aſteriſcos præfige: tres remanebunt tribus præcedentibus terminis præfigendi; & adhuc quadratum habebis. Quinto termino 9 quinque aſteriſcos præfige: quatuor remanebunt quatuor precedentibus terminis præfigendi; atque ita in infinitum.

.	.	.	.	.	.
o	o	o	o	*	.
o	o	o	*	*	.
o	o	*	*	*	.
o	*	*	*	*	.
*	*	*	*	*	.
1,	3,	5,	7,	9,	11
1.	2.	5.	4.	5.	6

Hinc ſequitur, noto numero terminorum ſeriei cujuſque, *ſummam habitum iri, ſumpto producto ultimi termini in ſe ducti*. Exempli gratia; ſumma omnium terminorum ad quartum incluſive eſt quadratum $4 = 16$. Ita ſumma omnium terminorum ad ſextum incluſive eſt quadratum $6 = 36$; atque ita de ceteris. Q. E. D.

THEOREMA.

234. *In quavis progreſſione geometrica primus terminus eſt ad tertium, ut quadratum primi ad quadratum ſecundi; & primus ad quartum, ut cubus primi ad cubum ſecundi:*

DEMONSTRATIO. Sit progreſſio ∺ *a*. *b*. *c*. *d*. *e*. *f*. *g*., in qua primus terminus *a* eſt ad ſecundum *b*, ut hic ad tertium *c*, ut hic ad

quar-

quartum d; atque ita porro. Ex hypotheſi rationes hæ omnes æquales ſunt. Primus terminus a eſt ſemel id, quod eſt; poteſt ergo unitate exhiberi, ſive ſuo conſequente b major ſit, ſive minor. His poſitis:

I. Dico, $a:c::a^2:b^2$. Si enim primus terminus a, qui unitate exhiberi poteſt, continet, puta, ter ſecundum terminum $b=\frac{1}{3}$; & ſecundus ter continet tertium $c=\frac{1}{9}$ evidens eſt in primo novies tertium contentum iri. Quare quadratum aa primi termini æque novies quadratum ſecundi bb continebit. Siquidem $1\times 1=1$; & $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

Eadem demonſtratio valet quoque ſi primur terminus eſſet, exempli cauſa, ſecundo quate minor. Nam ex hypotheſi haberemus $\frac{1}{4}:1::1.4$. Ergo quadratum primi $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ eſt ad quadratum ſecundi $1\times 1=1$; ut $\frac{1}{4}$ ad 4; adeoque ut 1 ad 16.

Si ratio primi termini ad ſecundum eſſet numeris incommenſurabilis; puta, ſi primus terminus a bis, & aliquanto plus ſecundum terminum b contineret, & hoc *plus*, *reſiduum hoc ſurdum* nullo numero integro, aut fracto exprimi poſſet (6); eadem quoque demonſtratio valeret; tunc enim tertius terminus c bis cum ſimili ſurdo reſiduo quartum terminum d contineret; atque ita de reliqua progreſſione.

II. Dico, $a:d::a^3:b^3$. Si enim primus terminus a, quem adhuc $=1$ ſupponere poſſum, quater in ſecundo $b=4$ continetur; & hic ter in tertio $c=16$; evidens eſt, quartum terminum fore 64; & primum tertium 64 vicibus in quarto contentum iri; atqui cubus primi $1\times 1\times 1=1$ quoque 64 vicibus continebitur in cubo ſecundi $4\times 4\times 4=64$. Q. E. D.

235. NOTA. Eodem ratiocinio oſtenderem, quadratum cujuſque termini progreſſionis geometricæ, puta duodecimi, quem dicemus m, eſſe

eſſe ad quadratum immediate ſequentis, ut *m* ad tertium incluſive poſt *m*; & cubum *m* eſſe ad cubum ſequentis, ut ipſe *m* ad quartum poſt *m* incluſive.

236. COROLLARIUM. Hinc ſequitur in quavis progreſſione geometrica ∺ 1. 2. 4. 8. 16. 32, 64, &c. rationem primi termini ad tertium eſſe *duplicatam* rationis primi ad ſecundum; & rationem primi ad quartum eſſe *triplicatam* rationis primi ad ſecundum. In hac progreſſione pro primo termino ſumi poteſt aut numerus 2 aut 4, aut alius quilibet. Tunc ſecundus terminus ille eſt, qui numerum pro primo aſſumptum immediate ſequitur.

§. II.

PROGRESSIONES INFINITÆ.

237. LEMMA. Q*Uantitas natura ſua admittit magis, & minus*. Ergo plus, & minus admittendo naturam non mutat; ergo utrovis ex his admiſſo adhuc quantitas eſt; ergo adhuc magis, & minus admittit; ergo ſemper admittit. Ergo in infinitum.

I. Exempli cauſa in ſerie creſcente numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, &c. in infinitum *quantitas evidenter creſcit in infinitum*. Ad quantumvis enim magnum numerum aſcendat numerus aliquis hujus ſeriei, non propterea magis fini appropinquat. Porro hoc ſeriei, cujus termini numero finiti ſint, convenire nequit.

II. Pari modo in ſerie ab unitate decreſcente $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}$ &c.; *quantitas diviſa, aut imminuta ad nihilum non redigitur*; ergo poſt quamvis diviſionem adhuc quantitas eſt;

eſt; atqui diviſio in infinitum fieri poteſt; ergo quantitas in infinitum dividi, & minui poteſt. Q. E. D.

238. NOTA I. Etſi nihil in natura, præter Deum, infinitum ſit, *plurima tamen quantitates ſunt, quæ veluti infinita a mathematicis conſiderantur*; pro ratione veluti infinite magna, quam dicunt ad alias quantitates, quibus comparantur. Exempli gratia, longitudo hexapedæ eſt veluti infinite magna puncto mathematico comparata; infinita enim ex his punctis requiruntur ad hexapedam efficiendam. Deinde hexapedæ longitudo eſt veluti infinite parva ſtellarum diſtantiæ comparata; immenſus enim, & veluti infinitus hexapedarum numerus requiritur ad ſtellarum diſtantiam adæquandam. (*a*)

II. Generatim mathematici ut *infinite parvam* conſiderant quantitatem quamvis, quæ alteri addi, aut ab ea tolli poteſt, quin hæc augeri, aut minui cenſeatur; eam vero quantitatem ut *infinite magnam* conſiderant, quæ neque hac additione augeri cenſeatur. Exempli gratia, linea infinitis punctis conſtans neque major, neque minor cenſebitur, ſi illi aut centena, aut decies centena millia punctorum auferantur. Eſt hoc *infinitum primi ordinis*. Superficies infinitis lineis conſtans neque major, neque minor cenſebitur, ſi illi aut centena, aut decies centena millia punctorum, aut linearum addantur. Eſt hoc *infinitum ſecundi ordinis*. Solidum infinitis ſuperficiebus conſtans invicem ſuperpoſitis neque majus, neque minus cenſebitur, additis, aut ademptis centenis aut

(a) *Hexapeda ſtellarum diſtantiæ comparata neque in phyſicis, neque in mathematicis infinite parva habetur. Habet enim ad eam diſtantiam rationem finitam*. Interpres.

aut decies centenis millibus linearum; aut ſuperficierum. Eſt hoc *Infinitum tertii ordinis*. De infinitis ordinum ſuperiorum; puta de infinito quarti ordinis, quod eſt productum cubi in radicem ſuam infinitam, nihil dicemus.

III. Mathematici ſæpius, *infinite parvam* quantitatem conſiderant, quæ ſine ſenſibili errore negligi poteſt (*a*). Exempli gratia, una aut altera hexapeda in radii terreſtris longitudine tamquam nulla cenſetur: uncia eſt quantitas veluti infinite parva in pondere librarum quindecim, aut viginti millium; atque ita de ceteris. Poſtremus hic quantitates conſiderandi modus in rigore geometrico verus non eſt; at omnem veritatem obtinet, quæ in phyſico rerum ſtatu ſperari poſſit. Hac ratione quantitates conſiderant mathematici accuratiſſimi, uti Volfius egregio ſuo opere mathematico, tom. I.

INFINITA. INFINITE PARVA.

239. DEFINITIO I. *Quantitas infinita* dicitur, quæ omne, quod obtinere poteſt, augmentum aſſequuta eſt. (*a*)

I. Quantitas infinita, quæ per aliam quantita-

(a) *Mathematici nullam omnino quantitatem ut infinite parvam habent, niſi qua ſit quacumque finita data minor. Phyſici aliquando minimam quantitatem negligunt, non quod eam infinite parvam ducant; ſed quod, adſit, aut, deſit, quod intendunt aque aſſequuntur. Volfius in infinite parvorum definitione, & explicatione, vir ceteroqui ſummus, geometrarum cenſuram ſubiit.* Interpres.

(a) *Non omnibus hac definitio adridebit, qua ſaltem cavillationibus locum dare poteſt. Infinitum quantitatem dicerem*, quæ ſit omni finita data major. Interpres.

titatem nec multiplicata, nec diviſa eſt, eſt *infinitum primi ordinis*. Ita ſcribitur. ∞.

II. Quantitas infinita in infinitam quantitatem ducta eſt *infinitum ſecundi ordinis*. Ita ſcribitur ∞^2.

III. Infinitum ſecundi ordinis in quantitatem infinitam ductum eſt *infinitum tertii ordinis*. Ita ſcribitur: ∞^3.

Evidens eſt, quantitates infinitas, ut & finitas ſimul addi, ſubduci, multiplicari, dividi poſſe. Exempli cauſa; $\infty + \infty + \infty + = 3\infty$. Ita $3\infty + 2\infty - 4\infty = 1\infty$. Ita quoque $2\infty^2 \times 3\infty = 6\infty^2$. Ita $\infty \times \infty^2 = \infty^3$. Ita ∞^2 diviſum per $\infty = \infty$. Ita pariter ∞ diviſum per $2 = \frac{\infty}{2}$; & ∞^2 diviſum per $3 = \frac{\infty^3}{3}$

240. DEFINITIO II. Quantitas *infinite parva* dicitur, quæ decrementum quodvis, cui ſubeſſe poſit, paſſa eſt. Scribitur: $\frac{1}{\infty}$ (a).

Quantitas infinite parva in infinite parvum ducta eſt *infinite parvum ſecundi ordinis*. Scribitur $\frac{1}{\infty^2}$; ducta in infinite parvum ſecundi ordinis eſt *infinite parvum tertii ordinis*; & ſcribitur $\frac{1}{\infty^3}$.

PRINCIPIA DE INFINITIS.

241. PRINCIPIUM I. *Quantitas finita quantitati finita addita, aut ablata, illam nec majorem efficit, nec minorem*. Hoc eſt: quantitas finita infinitæ comparata nulla eſt, & in calculo negligi poteſt; eſt enim ad infinitum, ut o ad 1. Quare $\infty + 2$, vel $- 2 = \infty$.

(a) *Idem dicas de hac altera definitione. Infinite parva quantitas eſt* omni finita data minor. Idem.

242. PRINCIPIUM II. *Infinitum ordinis inferioris infinito ordinis ſuperioris comparatum nullum eſt*, Hoc enim ad illud eſt, ut finitum ad infinitum. Quare $\infty^2 + \infty = \infty^2$. Ita $\infty^3 - \infty^2 = \infty^3$.

243. PRINCIPIUM III. Quantitas infinita in quantitatem infinitam ducta fit infinitum ordinis ſuperioris, cujus ordo ab exponentium ſumma exprimetur. Exempli cauſa; $\infty^2 \times \infty^3 = \infty^5$; ita $\infty \times \infty = \infty^2$.

244. PRINCIPIUM IV. Quantitas infinita dviſa per quantitatem infinitam fit infinitum ordinis inferioris, cujus ordo ab exponentium differentia indicabitur. Exempli cauſa, $\frac{\infty^4}{\infty^2} = \infty^2$; $\frac{\infty^2}{\infty} = \infty$; $\frac{\infty}{\infty} = 1$.

245. PRINCIPIUM V. Idem dicas de quantitatibus infinite parvis. Infinite parvum tertii ordinis infinite parvo ſecundi ordinis comparatum nullum eſt; & infinite parvum ſecundi ordinis infinite parvo primi ordinis comparatum nullum eſt. Infinite parvum ſecundi ordinis ductum in infinitum ſecundi ordinis fit infinitum primi, atque ita de ceteris.

246. NOTA. Hujus infinitorum theoriæ uſus eſt in *ſeriebus in ſummam colligendis*; exempli cauſa; ſerie infinita numerorum naturalium, ſerie infinita ſuorum quadratorum, cuborum, &c.

Summa infinita unitatum *linea infinita*, ſeu infinitis punctis conſtante exhiberi poteſt. Summa infinita numerorum naturalium *triangulo infinito* rectangulo exhiberi poteſt infinitis lineis juxta hanc ſeriem a vertice ad baſim creſcentibus compoſito. Series infinita quadratorum numerorum naturalium exhiberi poteſt *pyramide infinita*, ſeu pyramide quadrangula infinitis quadratis conſtante invicem ſuperpoſitis, & juxta hanc ſeriem a vertice ad baſim decreſcentibus.

bus. Quomodo hæc in geometria uſuveniant mox innoteſcet.

THEOREMATA NONNULLA.

247. THEOREMA I. *Summa unitatum infinities ſumpta eſt infinitum primi ordinis, ſive* $=\infty$.

DEMONSTRATIO. Unitas infinities ſumpta quantitas eſt, quæ omne, quod obtinere poteſt, augmentum aſſequuta eſt. Ergo infinita eſt.

248. THEOREMA II. *Summa terminorum ſeriei infinitæ numerorum naturalium* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 .... ∞, *eſt infinitum ſecundi ordinis*, & $= \frac{\infty^2}{2}$.

DEMONSTRATIO. Series hæc punctis expreſſa triangulum efficiet, quorum poſtrema columna erit numero infinita; & cujus trianguli ſuperficies erit dimidium quadratum, cujus quatuor eſſent latera ſingula poſtremæ huic columnæ æqualia (231, & 246).

249. THEOREMA III. *Summa terminorum ſeriei infinitæ numerorum quadratorum* 1, 4, 9, 16, 25, 36 .... ∞^2 *eſt infinitum tertii ordinis*, & $= \frac{\infty^3}{3}$.

DEMONSTRATIO I. In ſerie numerorum naturalium corollarii præcedentis concipe terminum quemvis elevatum ad quadratum: habebis ſeriem infinitam quadratorum, de quibus ſermo.

II. Concipe terminum quemvis quadratum hujus ſeriei numerorum naturalium punctis expreſſum. Primus terminus 1 erit punctum unum; ſecundus terminus 2 erit ſuperficies quadrata 4 punctis conſtans; tertius terminus 3 ſuperficies quadrata conſtans 9 punctis; poſtremus ∞ ſuperficies quadrata conſtans punctis infinitis. Si

omnes

omnes hæ ſuperficies invicem ſuperpoſitæ eſſent poſtremæ æquales, evidens eſt, numerum punctorum, quibus conſtant, effecturum cubum infinitum, adeoque $= \infty^3$ (*fig.* 74.).

III. At vero omnes hæ ſuperficies a prima $= 1$ uſque ad poſtremam $= \infty^2$ quum creſcant; evidens eſt, ſummam punctorum, quibus conſtant, non jam cubum AB, ſed pyramidem quadrangulam AGCFD efficere, cujus baſis eſt poſtrema ſuperficies infinita DF (246): At cubus, de quo ſermo, eſt æqualis tribus ex his pyramidibus (595): ergo pyramis hæc eſt tertia pars cubi: ac propterea $= \frac{\infty^3}{3}$.

Hæc infinitorum arithmeticæ principia, aut elementa ſunt, qua recentiores geometræ præſertim in geometria tranſcendente mirifice uſi ſunt. His tractatui de rationibus, ac propotionibus finem faciemus, & ad tractatum de æquationibus progrediemur.

ARI-

ARITHMETICÆ, ALGEBRÆ, ET GEOMETRIÆ PRINCIPIA SIVE MATHESEOS ELEMENTA

TRACTATUS IV.

ANALYSIS.

250. DEFINITIO I. Analyſis ſcientia eſt, quæ *quantitates ignotas* ex earum ad nota relatione detegere, & cognoſcere docet. Analyſis ab analogia differt, quatenus analogia quantitatum relationes dignoſcere, & expendere docet; analyſis vero ex his relationibus, quas notas, & expenſas ſupponit, ſaltem ex parte, ad quantitates ignotas inveſtigandas procedit (2).

251. DEFINITIO II. Duabus methodis veritatem aſſequimur, quarum altera ſyntheſis, altera analyſis nuncupatur. Utraque aut theorematis alicujus demonſtrationem, aut problematis alicujus ſolutionem reſpicit. Sive theorema demonſtrandum ſit, ſive problema ſolvendum:

I. *Syntheſis* a ſimplicioribus, notioribuſque principiis exorditur; & per plures veritates inter ſe nexas ad eam uſque, quam inquirit, aſcendit. In methodo ſynthetica plures verita-

tes

tes ſimul ligantur, & connectuntur, ex quarum nexu *nova veritas* exoritur, quæ eſt demonſtratio theorematis, aut ſolutio problematis. Hinc illi ſyntheſis nomen inditum, ſeu methodi compoſitionis; ſyntheſis enim, græce *ἀναλυσις*, compoſitionem ſignificat, a *ἀνά cum*, & *δέσις poſitio*; ſive a *τίθημι poon*.

Methodus hæc dicitur *methodus doctrinæ*; hac enim ad alios veritates nobis notas docendos paſſim utimur.

II. Contra *analyſis* ab iis, quæ in quæſtione ſunt, veris ſupponendis exorditur; ſeu tamquam reſolutum conſiderat problema ſolvendum. Hinc conſectaria deducit inde fluentia, atque ex his alia; donec ad aliquid devenerit manifeſte verum, aut falſum, ſi hoc theorema ſit; ad aliquid, quod fieri poſſit, aut nequeat, ſi ſit problema. *Poſtremi* hujus *conſectarii* natura propoſitionis pertractatæ veritatem, aut non repugnantiam definit. In methodo analytica propoſitio adhuc incerta in ſuas partes diſſolvitur, quæ omnes neceſſario veræ ſunt, & invicem nexæ, ſi propoſitio vera eſt; omnes falſæ, & repugnantes, ſi falſa ſit. Hinc analyſis nomen, a voce Græca *ἀναλυσις*, quæ diſſolutionem ſignificat, ſeu decompoſitionem; a *λύω diſſolvo*, & a præpoſitione *ἀνά in, per, inter*: totius ſcilicet in ſuas partes diſſolutionem.

Methodus hæc vocatur quoque *methodus inventionis*; hac enim complures veritates deteguntur, quæ ſæpius methodo ſynthetica detegi omnino non poſſent. Tractatus decurſu videbimus quomodo peculiaria problemata analytice reſolvendo *genericæ quantitatis proprietates* detegantur; & quomodo hæ proprietates quum ſemel inventæ fuerint, & demonſtratæ fiant theoremata, aut corollaria, quæ veluti lucis fontes ſunt in mathematicis.

III. Etſi ſyntheſis, & analyſis admodum di-

verſæ videantur; earum tamen principia eadem ſunt; nempe, totum eſſe æquale ſuis partibus ſimul ſumptis: quantitates æquales æqualiter auctas, aut imminutas æquales remanere; ſi duæ quantitates *a*, & *x* æquales ſint, unam pro altera ſumi poſſe, aut unam alteri ſubſtitui; atque ita de ceteris. In methodo ſynthetica a ſimplici ad compoſitum, a noto ad ignotum, a trunco ad ramos progredimur. In methodo analytica a compoſito ad ſimplex, ab ignoto ad notum, a ramis ad truncum pergimus. Diſceſſus diverſus eſt, via, & meta re ipſa eadem.

IV. Analyſi veteres geometræ utebantur; at illa a recentiori admodum diverſa erat. Vetus analyſis, quam Archimedes, Euclides, Apollonius uſurparunt, in eo ſita erat, quod totum in ſuas partes, in ſuas radices, in ſuas potentias diſſolveretur; in rationibus inſpiciendis verſabatur partium inter ſe, & ad totum; totius, & partium ad datæ quantitatis radices, & potentias quaſcumque, & per longos, & laborioſos ratiociniorum explicite evolutorum anfractus in inquirenda aut *aliqua peculiari veritate*, aut *aliqua generica quantitatis proprietate*. Hinc analyſis hæc ardua admodum erat, ne dicam inepta in quibuſdam ſublimioribus, magiſque implicatis quæſtionibus. Si non niſi labore improbo prolixam hanc evolutorum ratiociniorum ſeriem ſequi poſſumus; multo majore mentis contentione, ac conatu, tum memoriæ, ac phantaſiæ defatigatione ſumma opus eſt ad illa efficienda. Quod primo faciendum erat, ut analyſis aſperitates has ſupergredi poſſet, erat igitur ejus rationem mutare, & mentem hac non ferenda ratiociniorum ſarcina exonerare. Nihil propterea elegantius, quam quod poſtremis hiſce temporibus ante, & poſt Carteſium clariſſimis viris in mentem venit; ut

ut ſcilicet algebræ miniſterio ratiocinia hæc ad *technicum* (*a*) *quoddam formularum algebricarum artificium* adducerent; in quibus, veluti in tabula, quidquid mechanica veluti arte peragetes, pictum videas; & in quibus poſt primas nullo ferme ingenii labore opus eſt. Rei hujus arithmetica nobis patens exemplum præbet. Quid enim eſt operatio arithmetica, niſi mechanica quædam methodus, pleriſque ſaltem? indicat illa tamen quanto labore, ſine ejus ope, quod intendimus aſſequeremur. Pari modo algebrica analyſis, ſive quantitates diſcretas pertractet, ſive lineas, & ſuperficies, quæ æque, ac quantitates diſcretæ, ejus calculo perpendi poſſunt (74), eſt tantum ratiociniorum compendio ſcriptortm ſeries, quæ nulla contentione, & ferme mechanice eo adducunt, quo ratiociniis his ingenio excogitatis, & ſucceſſive deductis pertingeremus.

V. Analyſim Plato invenit annis ante æram Chriſtianam ferme 370. Illam immortalis Carteſius ſæculo proxime ſuperiore perfecit, novis objectis, noviſque veritatibus inquirendis adhibuit, & ferme novam creavit. Plato analyſi veteri inventa geometriæ faciem immutavit. Carteſius nexu inter geometriam, & analyſim algebricam ſtatuto illam præclare, & feliciter amplificavit. Analyſis ſublimia quædam theoremata protulit, quibus geometria a mediocritate, in qua ad ea uſque tempora jacuerat, educta fuit. Eaſdem poſtrema hac ætate ab analyſi geometria amplificationes aſſequuta eſt; & ejus ope plura ſibi ſubjecit, quæ nondum attingere potuerat. Sicuti Plato invento ſuo Archimedis, Euclidis, Apollonii Pergæi inventis

K 2 viam

(a) ETIMOLOGIA. *Technicum: artificiale*; *a* τεχνή, Ars, aut methodus artificis.

viam ſtravit; ita Carteſius illorum, quibus modo recentiores geometræ clareſcunt, fundamenta jeciſſe dici poteſt. A Carteſio veluti electrica ſcintilla tacti fuerunt Neutonus in Anglia, Bernullii in Helvetia, Leibnitius in Germania, Hoſpitalius in Gallia, omnes ſæculo ſuperiore, atque hoc ipſo in diverſis Europæ regionibus analyſis doctrina celebres.

Quod Chriſtophorus Columbus recentioribus navigantibus, id recentiori geometriæ Carteſius fuit. Viam indicavit, & patefecit, quam ceteri tantum ſequi debent, planiorem reddere, producere; quare de Carteſii ingenio dici poterit, quod de ſtrenui Judæ Machabæi militari virtute ſcripſit auctor ſacer: *& transfretavit primus ... & viderunt eum viri, & tranſierunt poſt eum.*

PARAGRAPHUS PRIMUS.

GENERICA DE ÆQUATIONIBUS.

252. DEFINITIO I. Medium quo analyſis ad ignotas quantitates detegendas utitur, eſt *duplex* ejuſdem quantitatis *expreſſio*. Duplex hæc expreſſio dicitur *æquatio*. Exempli cauſa, quantitas *octo* exprimi poteſt per 8, aut per $5 + 3$ expreſſionem æqualem primæ; unde oritur æquatio $8 = 5 + 3$; in qua quantitates ſigno $=$ connexæ dicuntur *membra*.

Omnes termini ſiniſtri huic ſigno dicuntur *primum membrum*; omnes dexteri *ſecundum membrum*. Æquationum uſus ampliſſimus eſt. Iis innumeras *quæſtiones*, ſeu *problemata* ſolvere poſſumus, quæ ſine hac arte ſolvere nunquam ſperaſſemus.

252. NO-

253. NOTA. In quovis problemate quantitates ſunt aliæ notæ, aliæ ignotæ. *Notæ* paſſim primis alphabeti literis a, b, c, d indicantur; *ignotæ* poſtremis x, y, z; *æquales* iiſdem literis.

Sæpius tamen initiales nominum literæ uſurpantur ad quantitates ſives notas, ſive ignotas indicandas ab his nominibus ſignificatas: quare motus indicatur litera m, velocitas v, tempus t, pondus p, atque ita de reliquis.

254. DEFINITIO II. Æquationes *diverſos gradus* obtinent, primum ſcilicet, ſecundum, tertium, quartum; atque ita deinceps; pro incognitæ elevatione ad primam, ſecundam, tertiam, quartam poteſtatem.

Æquationis gradus, quum plures ſunt incognitæ, deſumitur a termino, in quo quantitas ad majorem potentiam evecta eſt. Æquatio $x+y=a^2$ eſt primi gradus. Æquatio $a+y^2=a$, ſeu $x-y^2=a$ ſecundi; æquatio $x^3+a^2-3x=ab$ tertii, atque ita porro.

Hoc tractatu æquationibus præſertim primi gradus reſolvendis immorabimur, quæ *æquationes ſimplices* dicuntur; hinc facile *æquationes ſecundi gradus* reſolventur, quarum quoque principia, & canones trademus (298). Theoria æquationum primi gradus ſufficit ad omnia elementaris geometriæ problemata ſolvenda: illa æquationum ſecundi gradus ſufficit in geometria tranſcendente, in ea parte univerſa, quæ ad ſectiones conicas ſpectat; quare theoriam hanc ulterius non protrahemus (*a*).

(a) *Errat hic profecto auctor noſter. Plurima enim ſunt elementaris geometriæ problemata, quæ non niſi æquatione ſecundi gradus reſolvi poſſunt. Quæ vero ad ſectiones conicas ſpectant fere omnia æquationem tertii gradus poſtulant. Geometris omnibus hæc notiſſima ſunt.* Interpres.

255. DEFINITIO III. Ad problema ſolvendum, ſeu ad ignotas quantitates ex notis detegendas, neceſſario datæ rationes inter notas, & ignotas haberi debent. Rationes hæ dicuntur *conditiones problematis*. Porro rationes hæ, ſeu conditiones accuratiſſime conſiderandæ ſunt, ab his enim ſemper pendet problematis ſolutio. Rationes hæ, ſeu conditiones dicuntur etiam *data problematis*.

Apparet jam, *problema proponere* idem eſſe, ac petere, ut unius, aut plurium incognitarum valor inveniatur. Invento hoc valore problema ſolutum eſt, ſeu quum oſtenditur, hunc valorem obtineri non poſſe; quod contingit, quum conditiones datæ contradictionem involvunt.

256. DEFINITIO IV. Inter problemata alia determinata ſunt, alia indeterminata. *Problema determinatum* dicitur, in quo tot conditiones ſunt, quot incognitæ. *Indeterminatum* dicitur, in quo pauciores ſunt conditiones, quam incognitæ. Problema determinatum primi gradus unicam ſolutionem admittit; ſecundi gradus binas. Problema indeterminatum plures ſolutiones admittit. Duobus exemplis horum diſcrimen patefiet.

I. Detur problema: *numerum* 24 *in duas partes dividere, quarum una ſit alterius tripla*. Duæ partes quæſitæ erunt 18, & 6; & hi duo numeri tantum problematis conditionibus ſatisfaciunt. Hoc eſt problema determinatum.

II. Detur hec aliud problema: *duo heredes quandam aureorum quantitatem inter ſe diviſerunt, & unius pars eſt partis alterius tripla. Quota ſunt iſta partes?* Poſſunt hæ eſſe 2, & 6, quæ æquabunt ſummam 8; vel 4, & 12 $=$ 16; aut infiniti alii numeri; neque enim numerus eſt, qui ſuo triplo additus ſummam non efficiat, cujus quantitas nec in toto,

nec

nec in ſua ulla parte determinata fuit. Problema hoc eſt indeterminatum.

Scientia æquationum in duobus ſita eſt: *in æquatione ſtatuenda*, *& in æquatione reſolvenda*. Modo de utraque.

ÆQUATIONUM FORMATIO, ET RESOLUTIO.

257. DEFINITIO I. *Formatio æquationum* eſt algebrica problematis expoſitio; nempe expreſſio *ſtylo algebrico* quantitatum, & rationum quantitatum, quæ in quæſtione ſtylo communi proponuntur.

Pro æquationibus formandis regulæ tradi nequeunt. Omnia ingenio, & ſagacitate obtinenda ſunt, quibus datæ problematis conditiones exponendæ ſunt.

258. DEFINITIO II. *Æquationum reſolutio* eſt valoris cujuſque incognitæ inventio. Valor hic ex rationibus notarum ad ignotas deprehenditur. Rationes hæ æquationi incluſæ ſunt, atque abditæ ex incognitarum numero & commixtione tum inter ſe, tum notis ipſis. Hæ rationes educendæ, & ſeparandæ ſunt. In hoc potiſſimum ars analytica ſita eſt.

I. *Incognitæ valorem invenire* eſt illam ita a ceteris ſeparare, ut ſolitaria unum æquationis membrum efficiat, alterum ſolis notis conſtet. Exemplum. Si $x = 12 + 20 - 18$, valor incognitæ x innoteſcit, & eſt 14.

II. *Incognitæ valorem ſumere* eſt illam in uno æquationis membro ſolitariam ſtatuere, quibuſvis quantitatibus alterum æquationis membrum conſtet ſive notis, ſive ignotis. Exemplum. Si $x = a + y$, ipſi x ſubſtituto $a + y$, incognitæ x valor ſumetur; etſi nondum hic valor inventus ſit.

III. Æquationibus ſtatutis problematis conditiones continentibus illas ad ſolutionem diſ-

ponere oportet. Præparatio hæc ſita eſt *in variis transformationibus*, quibus ſimpliciores, & reſolutioni opportuniores fiunt. Transformationes hæ fiunt tranſpoſitione, multiplicatione, diviſione, elevatione, radicum extractione. Quænam ex his præcipuis operationibus in quovis problemate adhibenda ſit uſus docebit.

ÆQUATIONUM TRANSFORMATIO.

259. DEFINITIO. Transformationes fiunt aut additione, utrique membro eandem quantitatem addendo; aut ſubductione, ab utroque membro eandem quantitatem ſubducendo; aut multiplicatione, utrumque membrum in eandem quantitatem ducendo; aut diviſione, utrumque membrum per eandem quantitatem dividendo; aut extractione radicis quantitatum utriuſque membri. De his transformationibus agere aggredimur, quæ tamen nunquam utriuſque membri æqualitatem tollere debent; quare nihil in uno faciendum, quod in altero quoque non fiat.

Evidens eſt, nullam mutationem, aut transformationem membrorum æqualitatem ablaturam; in his enim omnibus æqualia æqualibus aut adduntur, aut auferuntur. Exempla.

260. EXEMPLUM I. Incognita ſeparatur *additione*. In æquatione $x - b = ac$, ſalva æqualitate poſſum utrinque addere quantitatem b. Habebo $x - b + b = ac + b$; & reducendo (90), $x = ac + b$.

Hinc canon. *In æquatione quantitas negativa a membro ad membrum traduci poteſt mutato ſigno — in +.*

261. EXEMPLUM II. Incognita ſeparatur *ſubductione*. In æquatione $x + b = ac$, auferre utrinque poſſum quantitatem b, & habebo $x + b - b = ac - b$; & reducendo $x = ac - b$.

Hinc

Hinc canon. *In æquatione quantitas poſitiva a membro ad membrum traduci poteſt mutato ſigno* $+$ *in* $-$.

Incognitam additione, aut ſubductione transferre dicitur *tranſponere*; ſive quantitas poſitiva, aut negativa a primo membro ad ſecundum, ſive a ſecundo ad primum traducatur. Ita *poſitivum fieri poteſt membrum, quod eſſet negativum, aut vice verſa*. Exemplum. In æquatione $a = 10$, poſſum ſalva æqualitate bis a quovis membro ſuum valorem auferre; ſeu cuique membro ſui valoris oppoſitum apponere. Tunc æquatio $a = 10$ fiet $+ a - a - a = + 10 - 10 - 10$. Et deletis utrinque terminis ſeſe deſtruentibus habebo $- a = - 10$.

Ita, & eadem theoria tranſpoſitionis ſequentes transformationes habebimus.

Si $+ 10 - 6 = + 4$	Si $+ 8 + 12 = + 30 - 10$
Jam $- 10 + 6 = - 4$	Jam $- 8 - 12 = - 30 + 10$
Si $+ 10 + 4 = + 14$	Si $+ x^2 - ax = + a^2 - b$
Jam $- 10 - 4 = - 14$	Jam $- x^2 + ax = - a^2 + b$

262. EXEMPLUM III. Incognita ſeparatur *multiplicatione*: In æquatione $\frac{x}{a} = b$, utrumque membrum in denominatorem a ducere poſſum (207); & habebo $\frac{ax}{a} = ab$; & reducendo (106) $x = ab$.

Hinc canon. *In æquatione fieri poteſt, ut fractio evaneſcat, ceteros omnes æquationis terminos in ſuum denominatorem ducendo*.

263. EXEMPLUM IV. Incognita ſeparatur *diviſione*. In æquatione $ab + cc = bx$, ſalva æqualitate poſſum utrumque membrum per b dividere; & habebo $\frac{ab}{b} + \frac{cc}{b} = \frac{bx}{b}$; & reducendo (106) $a + \frac{cc}{b} = x$. Ita quantitates a,

& x a quantitate b, a qua multiplicabantur, fuerunt ſeparatæ.

Hinc canon. *In æquatione quantitas ab alia quantitate illam multiblicante liberari poteſt, ceteros omnes æquationis terminos per quantitatem, qua multiplicatoris munus gerit, dividendo.*

264. EXEMPLUM V. Incognita ſeparatur *elevatione*. Si detur æquatio $\sqrt{x}=a$, utrumque membrum elevo ad quadratum, & habeo $x=a^2$. Nam $\sqrt{x}\times\sqrt{x}=x$. Radix enim in ſe ducta ſui valoris quadratum exhibet.

265. EXEMPLUM VI. Incognita ſeparatur *extractione radicis*. In æquatione $x^2=a^2$ ab utroque membro radicem quadratam extraho, & habeo $x=a$. Ita ſi habeam $x^3=a$, extracta utrinque radice cubica habeo $x=\sqrt[3]{a}$.

Alibi de *transformationibus* æquationum ſecundi gradus fuſius agemus, quæ faciendæ ſunt ad earum *radicem quadratam* algebricam, & numericam extrahendam (298). Theoria hæc pro æquationibus ſecundi gradus æquationum ſimplicium reſolutionem, (de qua unica ſequenti paragrapho) non reſpicit.

ÆQUATIONUM SUBSTITUTIO.

266. DEFINITIO. *Subſtitutio analytica* eſt quantitatis æqualis loco alterius æqualis quantitatis in æquatione collocatio; qua ſubſtitutione duæ incognitæ ad unam reducuntur; & deinde ſucceſſive plures incognitæ ad unam quoque reducuntur. Exempla.

I. Sint duæ æquationes $x+y=a$, & $x=3y$. In prima æquatione, in qua duæ incognitæ ſunt, incognitam x tollere poſſum, illi ſubſti-

ſtituendo ſibi æqualem $3y$. Tunc prima æquatio fiet $3y+y=a$. Itaque in prima æquatione transformata unica erit incognita y.

Si $x+y=a$
Si $x=3y$
Jam $3y+y=a$

Pari modo ſint duæ æquationes $x+y=a$, & $x-y=b$, in quarum utraque duæ ſunt incognitæ. Incognita x evaneſcet in ſecunda æquatione per tranſpoſitionem (261); & hoc valore $a-y$ in ſecunda æquatione ipſi x ſubſtituto. Habebo ſecundam æquationem $a-y-y=b$. In ſecunda æquatione ita ſubſtitutione transformata unica eſt incognita y. Incognita x evanuit.

Si $x+y=a$
Si $x-y=b$
Jam $a-y-y=b$

II. Dentur tres æquationes: $x+y+z=a$; $x+y-z=b$; & $x-y+z=c$; in quarum qualibet duæ incognitæ ita ſubſtitutione evaneſcent.

Sumatur in prima æquatione valor ipſius x; & tranſpoſitione habebis $x=a-y-z$. Valorem hunc in duabus æquationibus ſequentibus ſubſtitue ipſi x. Fiet ſecunda æquatio $a-y-z+y-z=b$. Tertia fiet $a-y-z-y+z=c$. Duæ hæ æquationes reductæ fiunt, altera $a-2z=b$; altera $a-2y=c$; & in utraque unica ſupereſt incognita.

$x+y+z=a$
$x+y-z=b$
$x-y+z=c$

$a-y-z+y-z=b$
$a-y-z-y+z=c$

$a-b=2z$; & $a-c=2y$

Si modo primam æquationem $x+y+z=a$ reducere velis ad unicam incognitam x, ſume valorem y, & z in duabus æquationibus transformatis, & reductis; & habebis primo tranſponendo $a-b=2z$, & $a-c=2y$; deinde dividendo per 2 $\frac{a-b}{2}=z$, & $\frac{a-c}{2}=y$. Tandem valores hos in prima æquatione ſubſtituendo $x+\frac{a-c}{2}+\frac{c-b}{2}=a$.

Magnum analyſis artificium eſt omnes incognitas ad unicam incognitam reducere, quæ deinde omnibus cognitis æqualis ſit; atque ita incognita innoteſcit. Si duæ ſint æquationts, ac proinde datæ incognitæ, *duas incognitas ad unam reducere oportet* ſubſtitutione. Si tres ſint æquationes, adeoque tres incognitæ, *primo tres incognita ad duas, deinde ad unam reducenda ſunt*. Hinc apparet quid faciendum, ſi plures, quam tres, eſſent incognitæ.

Quæ diximus omnia exemplis illuſtrare pergimus, ſeu nonnullorum problematum ſolutione. At brevi compendio primum analyſis canones colligendi ſunt, ut facilius menti defigantur, & viam dirigant in problematum ſolutione ſequendam.

REGULÆ ANALYSIS.

267. COROLLARIUM. *Ad problema analyticum ſolvendum neceſſe eſt:*

I. Stylo algebrico problematis conditiones exponere.

II. Omnes incognitas ad unicam reducere; ut incognita incognitæ ſubſtitui poſſit.

III. Incognitæ valorem inventum in omnes æquationes transferre, ubi hæc incognita ſit.

Sequentibus problematibus apparebit qua ratione canones hi ad praxim adducantur transformatione, algebrica expreſſione.

§. II.

§. II.

RESOLUTIO ÆQUATIONUM SIMPLICIUM.

PROBLEMA I.

268. P*Etrus, & Paulus ſimul mille aureos expenderunt; & Petrus triplum Pauli expendit. Quid uterque expendit?*

SOLUTIO. I. Duas incognitas habet problema, expenſam Petri, quam voco x, & expenſam Pauli, quam voco y; continet quoque quantitatem cognitam, nempe 1000 aureos, quos voco a. Hinc apparet in problemate duas conditiones contineri.

Problema verbis expoſitum.	Problema algebrice expoſitum.
Quæruntur duæ expenſæ,	x, y
quarum ſumma eſt $1000 = a$;	$x + y = a$
& quarum altera x tripla eſt alterius.	$x = 3y$

Prima conditio ſtylo communi eſt, a Petro, & Paulo expenſa ſimul ſumpta eſſe aureos 1000; quod algebrice exponitur æquatione $x + y = a$.

Altera conditio ſtylo communi eſt, expenſum a Petro eſſe triplum expenſi a Paulo; ergo x triplum eſt ipſius y; adeoque ut y fiat ipſi x æquale, y in 3 ducendum eſt; ſeu y ter ſumendum. Altera igitur conditio ſtylo algebrico exprimetur æquatione $x = 3y$.

II. Statutis problematis æquationibus, *duæ incognitæ ad unicam reducendæ ſunt*, & duæ æquationes ſubſtitutione ad unicam. Quare in ſecunda æquatione video x eſſe æquale $3y$; unde

unde infero, poſſe me in prima æquatione ipſi x ſubſtituere $3y$; atque ita unicam æquationem, & unicam incognitam haberi, nempe $3y+y=a$.

Ergo ... $a=3y+y$

& reducendo $a=4y$

& dividendo per 4; $y=\frac{a}{4}=\frac{1000}{4}=250$.

III. Noto valore ipſius y, in omnibus æquationibus, in quibus eſt y, hunc valorem ejus loco ſubſtituo. Quare pono 250, valorem y, ejus loco in æquatione $x=3y$; & invenio $x=250\times3=750$; ergo ipſius x valor innoteſcit, & æquatio reſoluta eſt. Quare Petrus expendit aureos 750, Paulus 250.

PROBLEMA II.

269. *Exercitus fuſus fuit; hujus quarta pars interfecta jacuit; duæ quintæ partes captæ fuerunt; reliqui milites* 14000 *ſeſe fugæ dederunt. Quot militibus conſtabat exercitus?*

SOLUTIO. *Unicam incognitam* continet problema, nempe numerum militum exercitum componentium. Ad hunc inveniendum.

I. Milites 14000 voco a; totum exercitum voco x. Deinde dico: quarta pars x, plus duæ quintæ partes x, plus 14000 totum exercitum æquant; & ſtylo algebrico $\frac{x}{4}+\frac{2x}{5}+a=x$.

Quum unica incognita ſit, nempe x; ſecunda regula, ſubſtitutione ſcilicet hic non indigemus.

III. Primam fractionem tollo $\frac{x}{4}$ omnes æquationis terminos in denominatorem 4 ducendo (207): habeo hinc æquationem $x+\frac{8x}{5}+4a=4x$.

Alteram quoque fractionem tollo $\frac{8x}{5}$ omnes ter-

terminos in denominatorem 5 ducendo; & habeo $5x + 8x + 20a = 20x$

Et reducendo $13x + 20a = 20x$

Et tranſponendo $20a = 20x - 13x$

Et adhuc reducendo $20a = 7x$

IV. Itaque $a = 14000$; ergo $20a = 280000$; ergo $7x = 20a = 280000$; adeoque $7x = 280000$.

At exercitus eſt x, non $7x$; ergo ut exercitus milites habeam, 280000 divido per $7 = 7x$. Quotiens 40000 exprimet numerum militum, quibus exercitus conſtabat; $x = 40000$.

Numerus hic problematis conditiones implet; additis enim numeris indicatis in problemate, eorum ſumma invenitur eſſe 40000. En numeros in problemate indicatos.

10000 quarta pars 40000.
+ 16000 duæ quintæ partes
+ 14000 reſiduum exercitus
Summa 40000 = x, ſive exercitui.

PROBLEMA III.

270. *Data duarum quantitatum ſumma, & differentia, quantitates invenire.*

Problema & lineis, & numeris reſolvi poteſt. Utroque modo illud ſolvemus (*Fig.* 9).

SOLUTIO I. Sint duæ lineæ inæquales AD, & DB, quæ duas quaſcumque quantitates exprimunt: earum ſumma ſit 40 pedum, differentia pedum 8. Lineam totalem biſeca in M, & centro M radio MD ſemidifferentiæ datarum linearum æquale ſemicirculum D*d* deſcribe. Ex hypotheſi AM = MB; & utraque 20 pedibus æqualis eſt. Ab his quantitatibus æqualibus aufer quantitates æquales DM, M*d*: reſidua AD, B*d* erunt æqualia. Ergo differentia duarum linearum eſt DM*d* = 8 pedibus, quorum dimidium eſt D M = 4 pedibus.

His

His poſitis patet, majorem lineam BD eſſe BM dimidiam lineæ totius, & præterea MD dimidiam differentiæ; & minorem lineam AD eſſe AM dimidiam lineæ totius dempta DM dimidia differentia; ergo $BD = 20 + 4$, & $AD = 20 - 4$.

SOLUTIO II. Sit numerorum incognitorum ſumma 40, eorum differentia 8. Majorem numerum voco x, minorem y; ſummam 40 voco a, differentiam 8 voco b. Ex natura problematis duas habeo æquationes, quarum quælibet binas incognitas continet; nempe $x + y = a$, & $x - y = b$. Subſtitutione itaque utendum ad unius ex incognitis valorem obtinendum, puta ipſius y ad x eliminandum.

Problema algebrice expreſſum.

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$

Itaque dico. Quoniam $x + y = a$; jam transponendo $x = a - y$ & hanc quantitatem $a - y$ ſibi æquali x ſubſtituendo in altera æquatione habebo . . . . $a - y - y = b$

& reducendo . . . . . $a - 2y = b$

& tranſponendo . . . . $a - b = 2y$

& dividendo per 2 . . . . $\frac{a-b}{2} = y$.

His peractis innoteſcit valor y; æqualis enim eſt quantitati a dempta quantitate b diviſis per 2, ſeu $\frac{40-8}{2} = 20 - 4 = 16$.

Altera quantitas x quoque innoteſcit; ſiquidem $x + y = 40$; ſi ergo a 40 demam $y = 20 - 4$, remanet $x = 20 + 4 = 24$.

Simili artificio eliminari poteſt y, ut valor ipſius x habeatur; inveniemus $\frac{a+b}{2} = x$.

271. COROLLARIUM. Ex problematis ſolutione, & ex æquatione inde educta $y \frac{a-b}{2}$; vel $x = \frac{a+b}{2}$; *majorem ex quantitatibus inæqua-*

qualibus ſemper æqualem eſſe dimidiæ ſummæ cum dimidia differentia ; *& minorem ſemper æqualem eſſe dimidiæ ſummæ dempta dimidia differentia*. Veritas hæc, ac theorema ex problematis ſolutione deſcendit.

272. NOTA. Ex ſtatutis principiis, & ex problematibus ſolutis quiſque, ſi libuerit, problemata ſibi proponere, & ſolvere poterit ſequentibus ſimilia, quorum ſolutionem, ut exemplo ſint, tantum indicabimus.

I. Petri, & Joannis nummi ſimul erant 36 $= a$; ſimul ludo perdiderunt nummos $10 = b$. Petrus propriorum nummorum tertiam, Joannes quintam perdidit. Quid quiſque ante ludum habebat? quid quiſque ludens perdidit?

Problema primo intuitu quatuor incognitas continere videtur: re ipſa duas tantum continet. Nota enim ſumma x Petri ante ludum, hujus tertia pars erit deperdita; quæ proinde non eſt quantitas incognita. Ita nota Joannis ſumma y, hujus quinta pars non erit incognita. Quare *numerus incognitarum numerum quæſtionum problematis non ſequitur*; ſed antequam incognitarum numerus definiatur, videndum num unius quæſtionis ſolutio alterius quæſtionis ſolutionem præbeat.

$$x + y = a = 36$$
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = b = 10$$

Secunda æquatione a fractionibus liberata (262), habebimus $5x + 3y = 15b$. Tunc ſi tranſponendo ſumatur $x = a - y$ in prima æquatione, ut valor $a - y$ ſubſtituatur in ſecunda æquatione reducta, & transformata $5x + 3y = 15b$, habebimus $5a - 5y + 3y = 15b$; ubi unica eſt incognita. Deinde primum reducendo tum tranſponendo habebimus $2y = 5a - 15b$ & dividendo per 2 tandem $x = \frac{5a - 15b}{2}$

Poſtrema hac æquatione problema ſolvitur; factis enim ſubductionibus, diviſionibus, ſubſtitu-

tutionibus a formula in poſtrema æquatione indicatis inveniemus $y = 15$. Habebat ergo Joannes numos 15, tres amiſit, qui ſunt quinta pars quindecim. Quare Petrus numos habebat 21; ſiquidem $14 + 21 = 36$; & ſeptem amiſit, qui ſunt $\frac{21}{3}$.

Si in hoc problemate Petri, & Joannis ſumma ante ludum ſuppoſita fuiſſet $a = 236$; & communis jactura $= 40$; & eædem fuiſſent jacturæ conditiones; problema eadem æquatione $y = \frac{5a - 156}{2}$ ſolutum fuiſſet. Tunc ſolutio problematis fuiſſet oſtendere, illud *dari non poſſe*, & patens abſurdum involuere. Summa enim y Joannis fuiſſet numorum 290 major ſumma utriuſque ſimul ſumpta.

II. Aſina mulæ dixit: ſi tibi unum ex ſacci meis tradidiſſem, æquale onus haberemus; ſi tu unum mihi ex tuis traderes, ego duplum onus perferrem. *Quot ſaccos utraque geſtabat?*

Duas incognitas continet problema; numerum x ſaccorum aſinæ, & numerum y ſaccorum mulæ; duas quoque habet conditiones; nempe uno ex ſaccis aſinæ in mulam translato, ſaccorum numerum fore utrinque æqualem; & uno ex ſaccis mulæ in aſinam translato, aſinam duplum ſaccorum numerum geſtaturam. Habes hic binas has conditiones in adjectis æquationibus algebrice expreſſas, quas ſubſtitutione ad unam adduces. Subinde tranſpoſitione invenies $y = 5$, & $x = 7$.

$$x - 1 = y + 1$$
$$x + 1 = 2y - 2$$

Sumpto enim in prima æquatione valore ipſius x, habebis $x = y + 1 + 1$, ſeu $x = y + 2$; & hoc valore $y + 2$ in altera æquatione pro x ſubſtituto, habebis $y + 2 + 1 = 2y - 2$; in qua æquatione unica incognita eſt y.

Poſtea reducendo habebis $y + 3 = 2y - 2$; & tranſponendo $2y - 5 = y$; & adhuc tranſponendo $5 = 2y - y$; & reducendo $5 = y$.

Eo-

Eodem modo, ſi libuerit, invenietur $x = 7$.

PROBLEMA IV.

273. Datam ſummam inter Petrum, Paulum, & Jacobum ita partiri, ut portio primi dupla ſit portionis ſecundi; & hujus portio tripla portionis tertii.

SOLUTIO. Ponamus ſummam datam eſſe 10000 numos $= a$. Etſi problema tres incognitas continere videatur, unicam tamen continet, nempe tertii, ſeu Jacobi portionem, quæ reliquarum *minima* eſt.

I. Sit itaque x portio Jacobi portio Pauli, quæ tripla eſt, erit $3x$: portio Petri, quæ hujus dupla eſt, erit $6x$; ergo conditio problematis algebrica expreſſa erit $x + 3x + 6x = 10000$

& reducendo . . $10x = 10000$

& dividendo per 10 . $x = \frac{10000}{10} = 1000$

Ergo x portio Jacobi $= 1000$: $3x$ portio Pauli $= 3000$; $6x$ portio Petri $= 6000$.

II. Poteſt quoque problema reſolvi per *regulam falſæ poſitionis*; de qua mox, & quæ in arithmetica utilis eſſe poteſt.

Si portio Jacobi poneretur $= 10$; portio Pauli eſſet $= 30$; Petri 60; tota ſumma 100. At ſuppoſitio hæc falſa eſt; non enim 100; ſed 10000 dividenda ſunt. Hypotheſis tamen, etſi falſa, ad veritatem adducere poteſt per regulam auream dicendo; ſi 100 dant 10 pro tertii portione, quid ipſi dabunt 10000? ſeu $100 : 10 :: 10000 : x$; ergo $x = \frac{10000}{100} = 1000$; portio ſcilicet tertii eſt 1000.

III. Apparet in hoc problemate partes diſtribuendas rationem inter ſe dicere 6, 3, 1, & problema generice exprimi potuiſſe dicendo: *totum in tres partes dividere, quæ inter ſe ſint ut numeri* 6, 3, 1. Tunc incognita aſſumitur minima quantitas.

IV.

IV. Si in præcedente problemate quæſtio fuiſſet tantum *de ſumma quavis* 3000 *inter tres, Paulum, Petrum, & Jacobum dividenda*, ut portio Petri fuiſſet quarta pars portionis Pauli, & portio Pauli quinta pars portionis Jacobi; eadem methodo problema ſolutum fuiſſet incognitam x Petri portionem, quæ *trium minima* fuiſſet, aſſumendo. Tunc habuiſſemus $x + 4x + 20x = 3000$; & reducendo $25x = 3000$ & dividendo per 25, $x = \frac{3000}{25} = 120$. Quare habuiſſemus $120 + 480 + 2400 = 3000$.

REGULA FALSÆ POSITIONIS.

274. OBSERVATIO. *Regula falſæ poſitionis*, cujus notionem, & exemplum præcedente problemate exhibuimus, ſæpius ignotas quantitates detegit *falſa hypotheſi*, quæ ad veram hypotheſim veram, & notam rationem dicit.

Exemplum. Si falſæ poſitionis ratio eſt 2 ad 8 æqualis rationi 1 ad 4; & ratio x ad 100 ſit eadem, quæ 1. ad 4; patet has rationes tertiæ æquales eſſe inter ſe æquales (166), & proportionem geometricam efficere (170), nempe $2 : 8 :: x : 100$. Tunc extremorum productum per mediorum productum dividendo invenitur quotiens 25 veram quantitatem x antea ignotam exprimens. (175)

$$2 : 8 = 1 : 4$$
$$x : 100 = 1 : 4$$
$$2 : 8 :: x : 100$$

$$a : b = c : d$$
$$x : a^2 = c : d$$
$$a : b :: x : a^2$$

Pari modo in exemplo per literas, ſi duæ rationes, quarum altera eſt falſæ poſitionis eidem rationi æquales ſunt, exurgit proportio geometrica, in qua incognita x innoteſcit quum æqualis ſit quotienti extremorum per medium notum diviſorum. Quare $x = \frac{a^3}{b}$.

ALIÆ

ALIÆ REGULÆ ARITHMETICÆ.

275. OBSERVATIO. *Regula falſa poſitionis*, de qua ſupra, *regula aurea* innititur a nobis alibi explicatæ, &'demonſtratæ (178). Eidem regulæ aureæ innituntur regulæ quinque, ſeptem, novem, regula ſocietatis, mixtionis, de quibus, poſt traditas notiones genericas, ſequentibus problematibus agemus.

I. *Regula quinque*, *ſeptem*, *novem* eſt ipſa regula trium complicata, ut ſequenti problemate apparebit.

II. *Regulá ſocietatis* eſt methodus, qua duo, vel plures ſocii lucrum, aut jacturam facientes inveniunt quid cuique aut lucri, aut jacturæ contingat pro pecunia a ſingulis fœnori data.

III. *Regula mixtionis* eſt methodus, qua quæſtiones omnes ſolvuntur, in quibus aut metallorum mixtiones fiunt quibuſdam datis conditionibus. Hæc aut *directa* eſt, aut *indirecta*.

Directa eſt, quum illa invenitur *pretium medium* mixtionis factæ, aut faciendæ; *indirecta* quum *dato pretio medio* mixtionis faciendæ portiones miſcendas detegit.

P R O B L E M A V.

276. *Si 20 opera 10 diebus 100 terra hexapedas effoderunt, quot hexapedas 30 opera ſex diebus effodient?*

SOLUTIO. Quinque terminos habet quæſtio; ideo *regula quinque* nuncupatur. Ad ſolutionem quæſtio duabus propoſitionibus ita exprimitur.

Operæ		Hexapedæ		Operæ		Hexapedæ.
20	:	100	::	30	:	x
Dies				Dies		
10	:	100	::	6	:	x

Mo-

Modo operarum numerus in dies ducendus eſt, 20 in 10, unde 200; & 30 in 6, unde 180. Evidens eſt, 20 operas 10 diebus laborantes idem opus effecturas, quod 200 operæ uno die; ita 30 operas 6 diebus laborantes idem opus effecturas, quod uno die operæ 180; ſeu 100 dies eſſe ad 100 hexapedas, ut 180 dies ad x hexapedas. Duæ igitur proportiones ad unam reducuntur, quæ ſimplici regula aurea reſolvitur. $200:100::180:x$; ergo $x = \frac{180 \times 100}{200} = \frac{18000}{200} = 90$.

277. NOTA I. Si problema ita proponeretur: 20 *operæ* 10 *diebus horis* 8 *laborantes* 100 *hexapedas effoderunt*; 30 *operæ* 6 *diebus horis* 10 *laborantes quot hexapedas effodient*? Quæſtio ſeptem haberet terminos. Hæc eſt *regula ſeptem*.

Ad problema ſolvendum tres proportiones faciendæ fuiſſent, quæ multiplicatione ad unam adductæ fuiſſent. Quare 200 dies in horas 8 ductæ fuiſſent, & dies 180 in horas 10; & habuiſſemus

Horas	hexapedas	horas	hexapedas
1600 :	100 ::	1800 :	x

278. NOTA II. Si problema novem terminos habuiſſet, quod dicitur *regula novem*; quatuor proportiones faciendæ fuiſſent, quæ multiplicatione ad unam redactæ fuiſſent.

PROBLEMA VI.

279. *Tres ſummam aureorum* 1800 *fœnori dederunt*; *Petrus* 300, *Jacobus* 600, *Joannes* 900. *Hinc aureos* 9000 *lucrati ſunt*; *quid cuique lucri continget*?

SOLUTIO. Problema *regulam ſocietatis* continet (275). Patet lucrum cuique obveniens ſummæ depoſitæ a ſingulis eſſe debere propor-

tio-

tionale. Solvitur itaque problema totidem proportionibus, quot termini ignoti ſunt; dicendo: ſors eſt ad lucrum, ut ſortis portio a ſingulis expoſita eſt ad lucrum cuique obveniens. Sit ergo x lucrum Petro contingens, y Jacobo, z Joanni. Has tres proportiones habebimus.

$$\text{Proportiones; } 1800 : 9000 : \begin{matrix} 300 : x \\ 600 :: y \\ 900 : z \end{matrix}$$

$$\text{Ergo primo obveniet } x = \frac{2700000}{1800} = 1500$$

$$\text{Alteri} \ldots\ldots\ldots y = \frac{5400000}{1800} = 3000$$

$$\text{Tertio} \ldots\ldots\ldots z = \frac{8100000}{1800} = 4500$$

280. NOTA. Problema generice enunciari poteſt, proponendo *totum dividendum in partes partibus alterius totius proportionales*.

Si tres ſocii non lucrum, ſed jacturam feciſſent, puta aureorum 1000; patet cujuſque jacturam cujuſque ſorti proportionalem eſſe debere; & cujuſque jacturam eadem æquatione inventum iri, qua cujuſque lucrum invenitur.

PROBLEMA VII.

281. Miſcendæ ſunt quantitates pretio diverſæ. *Datis partibus componentibus, & pretio partium, mixtionis data menſura pretium medium invenire.*

SOLUTIO. Problema regulam mixtionis directam continet. Mixtio ſit vinorum diverſi pretii, puta quatuor amphorarum vini, quarum ſingulæ æſtimentur decem obolis, & ſex amphorarum, quæ ſingulæ æſtimentur quindecim obolis. Quæritur pretium medium, ſeu quo vendenda ſit amphora vini ita mixti.

I. Cape ſummam quantitatum, ſeu menſurarum mixturam componentium. Cape quoque omnium menſurarum ſummam.

Men-

Menſura	(4 amph. 10 obol. efficiunt obolos 40)	Pretium.
	(6 amph. 15 obol. efficiunt obolos 90)	
Summa 10 amphoræ . . . . valent obol.	130	

II. Fac proportionem: ſumma totius mixtionis eſt ad pretium totum ut unica amphora ad pretium; ſeu 10 amphoræ : 130 obolos :: amphora : $x = \frac{130}{10} = 13$.

Simplici regula aurea, ut patet, problema reſolvitur, & demonſtrationem ſuam ſecum habet.

PROBLEMA VIII.

282. Ex quantitatibus pretio diverſis mixtio facienda eſt, quæ determinato pretio medio vendatur. *Dato pretio medio mixtionis, & quantitatis cujuſque miſcendæ valore; quota cujuſque quantitatis portio miſcenda ſit, ut definito pretio vendatur, invenire.*

EXPLICATIO. Problema *regulam mixtionis indirectam* continet (275), quæ tres hypotheſes admittit. Quæri ſiquidem poteſt.

I. Ut mixtio fiat indeterminata, *non definitis* rerum miſcendarum quantitatibus.

II. Ut mixtio fiat adhuc indeterminata, *definita tantum una* rerum miſcendarum *portione*.

III. Ut mixtio fiat *data quantitatis*, non definitis rerum miſcendarum portionibus.

Pretium medium ſemper datum ſupponitur, ut & *cujuſque rei miſcendæ pretium*. Problema pro ſingulis hypotheſibus ſingulas ſolutiones poſtulat. Has ſequentibus exemplis habes.

283. EXEMPLUM I. *Stamni libra venit 16 ſolidis, libra plumbi 10 ſolidis; quota cujuſque metalli portio capienda eſt, ut mixtio fiat cuiuſque magnitudinis, cujus libra veneat 12 ſolidis?*

SOLUTIO I. Pretia ambo pretio medio compara, quod modo eſt 12, ut eorum differentias

tias habeas. Majori pretio adhibe differentiam pretii medii ab infimo; & infimo differentiam medii a ſummo, ut in tabella.

Pretia peculiaria.	*Solidi*	Differentiæ.
Pretium medium 12	(16	2
	(10	4
Summa differentiarum . . .		6

II. Nota has differentias indicare quota pars cujuſque quantitatis ſumenda ſit ad mixtionem. In propoſito exemplo duæ ſtamni partes, & quatuor plumbi ſumendæ ſunt; & quum ſumma partium mixtionem componentium ſit $2 + 4 = 6$ partes duorum metallorum ſumendæ ſunt $\frac{2}{6}$, & $\frac{4}{6}$: ſeu quod idem eſt, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

III. Si tres eſſent res miſcendæ, quæ mixtæ pretio medio, puta, 12 ſolidis æſtimentur; ſumes primo res duas, quas ad pretium medium juxta datam regulam adduces; deinde hoc inventum tertiæ rei comparabis; atque ita mixtionem pretio medio 12 æſtimandam aſſequeris.

Hinc apparet quid agendum, ſi quatuor eſſent res miſcendæ; pretia quatuor primum ad tria, deinde ad duo rediges.

DEMONSTRATIO. Ratio ita agendi eſt, quia eo major rei quantitas mixtionem ingredi debet, quo rei pretium minus a medio differt; & eo minor, quo magis differt. Sunt ergo portiones miſcendæ inter ſe reciproce ut differentiæ a pretio medio; ad has ergo portiones dignoſcendas, rei pretioſiori differentia vilioris tribuenda eſt, viliori differentia pretioſioris. Q. E. D.

284. EXEMPLUM II. *Quot amphoræ vini, quæ ſingulæ ſtant* 100 *denariis, ſumendæ ſunt, ut mixtæ amphoris* 14 *vini proſtantibus ſingulis* 60 *denariis mixtionem efficiant, cujus amphora vendatur* 72 *denariis?*

SOLUTIO I. Cape differentias pretiorum peculiarium a *pretio medio*, & eas ordine inver-

ſo diſpone, ut in exemplo præcedente. Hoc eſt, cape amphoras 12 vini melioris, & 28 vini deterioris.

Pretia peculiaria.	*Denarii.*	Differentiæ.
Pretium medium 72	100	12
	60	28
Quantitas data:	14 amphoræ.	

II. At quum quantitas ſumenda vilioris vini data ſit, nempe amphoræ 14; inſtitue proportionem: quantitas 28 inventa ex differentia a pretio medio, eſt ad quantitatem datam 14; ut quantitas 12 inventa ex differentia a pretio medio eſt ad quantitatem vini melioris; ſeu brevius; $28 : 14 :: 12 : x = \frac{168}{28} = 6$.

Sumptis ſcilicet amphoris 14 vini ſtantis 60 denariis, capiendas eſſe amphoras 6 vini ſtantis 100 denariis, ut mixtio fiat, cujus amphora ſtet 72 denariis. Patet, datis pretiis aliud ſubſtitui poſſe, & alterutri rei quantitatem quamvis a 14 diverſam, methodo generica nihil mutata.

DEMONSTRATIO. Ratio ita agendi patet ex oppoſito; nempe per regulam mixtionis directam (281) quærendo quodnam eſſet *pretium medium* amphoræ vini mixti ex 14 amphoris ſtantibus ſingulis 60 denariis, & ex 6 amphoris ſtantibus 100 denariis: invenies fore denariorum 72. Si ergo 14 amphoræ ſtantes 60 denariis, & ſex 100 denariis dant pretium medium amphoræ mixtæ 72 denarios; patet, portiones, quarum mixtio hoc pretio medio ſtare debet, eſſe 14 amphoras ſtantes 60 denariis, & ſex 100 denariis. Q. E. D.

285. EXEMPLUM III. *Quota pars tritici, cujus modius ſtat 90 ſolidis, & ſecalis, cujus modius ſtat 60 ſolidis capienda eſt, ut fiant modii 25 ſtantes ſinguli ſolidis 72?*

SOLUTIO I. Peculiaria pretia medio 72 compara;

para; iis appone differentias ordine inveſo, ut in præcedentibus exemplis. Summam cape differentiarum 30.

Pretia peculiaria.	*Solidi.*	Differentiæ.
Pretium medium 72	90 . . .	12
	60 . . .	18
Summa differentiarum.		30

$$30 : 25 :: 12 : x = \frac{100}{10} = 10$$

$$30 : 25 :: 18 : x = \frac{450}{30} = 15$$

II. Inſtitue proportionem: Summa 30 differentiarum eſt ad ſummam datam 25 omnium quantitatum, ut differentia unius ex quantitatibus a pretio medio eſt ad hanc quantitatem; habebis quartum terminum 10, & 15. Hoc eſt ſumendas eſſe tritici menſuras 10, & ſecalis 15 ad mixtionem quæſitam.

Facile intelliges, methodo hac te uti poſſe in quovis quantitatum genere, atque hac miſcere poſſe vinum, cahueum, metalla, & innumeras alias res vario pretio vendendas. Satis eſt in præcedente proportione notas mutare, quæ datas quantitates exprimunt.

DEMONSTRATIO. Ratio ita agendi patet ex oppoſito, ut in exemplo ſuperiore. Etenim 10 tritici modii ſtantes ſolidis 90 efficiunt ſolidos 900; & quindecim modii ſecalis ſtantes 60 ſolidis dant quoque ſolidos 900. Itaque juxta regulam mixtionis directam (281) capta ſumma quantitatum, nempe 25, & ſumma pretiorum, nempe ſolidorum 1800, habebis proportionem; $25 : 1800 :: 1 : x = 72$; unde habes pretium $x = 72$, quod hypotheſi cohæret, ut in præcedente demonſtratione. Q. E. D.

PROBLEMA IX.

286. *Data mixtione auri, & argenti, maſſa intacta, quotam cujuſque metalli partem contineat invenire.*

SOLUTIO. Celebre eſt hoc Archimedis problema, cujus balneum intrans ſolutionem invenit tanta captus lętitia, ut matheſeos gravitas non leve ſubierit periculum. Hiero Syracuſarum rex aurifici auri maſſam tradiderat, qua ſibi coronam elaboraret. Opere perfecto ſcire voluit rex num quid auro mixtum fuiſſet, coronam tamen vitiare nolebat, cujus opus materiam ſuperabat. Rem cum Archimede contulit, qui mathematicorum doctiſſimus, corona intacta, quantum argenti artifex auro miſcuiſſet detexit. Etſi neſciamus qua methodo Archimedes ad problema ſolvendum uſus ſit; ſupponemus ut multo veriſimile eſt, ſequenti uſum fuiſſe, quæ eſt ſimplex regula mixtionis inverſa, & innititur diverſis ſpecificis auri, & argenti gravitatibus quæ facile ope hydroſtaticæ definiri poſſunt (*Phy.* 642).

Sumpſit Archimedes, aut ſumere potuit, maſſas duas, auream unam, argenteam alteram quæ ſingulæ erant coronæ pondere æquales. Quumque animadvertiſſet, coronam aquæ immerſam plus ponderis amittere, quam maſſam auream, minus quam argenteam; hinc intulit, coronæ quid admixtum eſſe. Si enim omnino aurea fuiſſet; ut maſſa aurea, æquale pondus utraque in aqua amiſiſſet; ſi tota fuiſſet argentea, ipſa æquale maſſæ argenteæ pondus in aqua amiſiſſet. Ut cum Archimede problema ſolvamus,

I. Ponamus coronæ pondus, quam hic exemplo *mixtionis cujuſque auri, & argenti ſumimus*, fuiſſe unciarum 96, uti & duæ maſſæ comparandæ, & ejuſdem ponderis: coronam

in

in aqua pondus amiſiſſe unciarum 8; maſſam auream uncias $3\frac{3}{4}$, argenteam uncias $9\frac{1}{4}$.

Ductis in 4 ponderibus, & jacturis (194, & 207) reducemus primo pondus commune 96 trium maſſarum, & peculiares ſingularum in aqua jacturas ad fractiones, quarum denominator ſit 4; & erunt hæ $\frac{384}{4}$, & $\frac{32}{4}$, $\frac{31}{4}$, $\frac{37}{4}$.

Hæ quatuor fractiones inter ſe ſunt ut numeratores (190). Quare pondus commune, & tres peculiares jacturæ inter ſe ſunt ut 384, 32, 31, 37. Hoc eſt: ſi tria pondera ſingula unciarum 96 diviſa fuiſſent ſingula in partes 384, corona, ſeu mixtum in aqua amiſiſſet partes 32; maſſa aurea 31, argentea 37. Jactura 32 eſt *jactura media* data, aut inventa; jacturæ 31, & 37 ſunt jacturæ datæ, aut inventæ rerum, quibus mixtum conſtat. Tres hæ jacturæ æquivalent illis, quæ nos *tria pretia data* nuncupavimus in univerſa regula mixtionis indirecta (282).

II. Simul miſceo jacturas 31, & 37 maſſarum aureæ, & argenteæ, ut huic mixtioni tribuam jacturam mediam coronæ; & mutatis differentiis earum ſummam capio. Summa hæc 6 oſtendit, ad habendam mixtionem 6 unciarum, quæ in aqua tantum ponderis amitteret, quantum ſexunciæ mixtionis coronæ, ſumendas eſſe auri uncias 5, & argenti unam.

Jactur. peculiar.	Partes.	Differ.
Jactura media 32	31	5
	37	1
Summa differentiarum		6

Unciæ quinque auri ſimul ſumptæ in aqua amitterent $\frac{5}{32}$ minus, quam unciæ quinque mixtionis coronæ; at uncia argenti amitteret $\frac{5}{32}$ magis. Quare quum plus per minus compenſetur, quinque auri unciæ unciæ uni argen-

ti commixtæ id ipſum pondus amitterent, quod ſex unciæ mixtionis coronæ. Theoria hæc, ut apparet, ad primum exemplum regulæ mixtionis indirectæ nos adducit (283).

III. Age vero, quoniam corona pendebat uncias 96 ex hypotheſi; duas inſtituo regulas aureas, dicens in prima: ſi ad mixtionem unciarum ſex, quæ pondus in aqua amittat, ut corona, requiruntur auri unciæ 5; quot unciæ requirentur ad mixtionem unciarum 96? In altera: ſi ad mixtionem hanc unciarum 6 requiritur argenti uncia, quot uncias mixtio unciarum 96 poſtulabit. Regulæ hæ duæ dant auri uncias 80, & argenti 16 pro coronę mixtione; & problema ſolutum eſt.

$6 : 5 :: 96 : x = 80$. Aurum
$6 : 1 :: 96 : x = 16$. Argentum

DEMONSTRATIO. Ratio ita agendi iiſdem principiis innititur, quibus regula mixtionis inverſa; & huc recurrit demonſtratio primi exempli (283). Patet, quodvis metallum eo majori copia commiſcendum mixtioni, quæ datum pondus in aqua amittere debet, quo *minus* ſui ponderis jactura in aqua a *jactura media* data, aut inventa diſcrepat; & reciprocę. Atqui quum aurum amittat 31, & argentum 37, eorum a jactura media differentiæ ſunt 1, & 5; ergo inverſis differentiis, auri partes in mixto quinque eſſe debent, argenti una ad habendum mixtum, quod in aqua jacturam mediam faciat 32. Q. E. D.

287. NOTA. Iiſdem regulis mixtionis *innumera plurium rerum mixtiones fieri poterunt*, & num juxta præſtituta mixtiones factæ fuerint detegere licebit.

Exempli cauſa: ad probatum tormentum majus bellicum conflandum experientia docuit, tres ſtamni libras libris viginti quinque cupri rubri eſſe admiſcendas. Cuprum in aqua nonam ferme ſui ponderis partem amittit; ſtamnum ſepti-

ptimam ferme ſui ponderis partem tantum (*Phy.* 644). Itaque inveniri poterit quam ſui ponderis partem tormentum, exempli gratia, pendens 5200 pondo in aqua amittere debet; & quod amittat explorando, detegemus, ut in præcedente problemate, quidnam in illo ſit alterutrius metalli exceſſus, aut defectus.

Si hoc tormentum iterum conflandum fuiſſet, unum ejus fruſtrum in aqua pendendo inveniemus quota pars cupri, aut ſtamni præcedenti mixtioni addenda ſit, ſi mixtio vitioſa fuerit.

PROBLEMA X.

288. Mobilia duo A, & B moveri incipiunt inæqualibus velocitatibus eadem directione, & per eandem lineam indefinitam punctum C verſus, & ſeſe aſſequi debent. *Data mobilium diſtantia initio motus, & velocitatum ratione, punctum, quo ſimul erunt, invenire.*

SOLUTIO. Mobilis A velocitas ſit $= 5$; mobilis B velocitas, quæ minor eſſe debet, alterum ſiquidem hoc aſſequi debet, ſit $= 2$. Diſtantia mobilium initio motus, quam voco D, ſit hexapedarum 600.

Mobile B præcedens quoddam ſpatium percurrit antequam aliud illuc perveniat. Spatium hoc ignotum inveniendum voco x. Mobile A ut perveniat ad punctum concurſus percurret diſtantiam d duobus mobilibus interjectam, & præterea ſpatium x eo tempore, quo mobile B percurret tantum ſpatium x. Problema igitur tantum poſtulat, ut inveniatur ſpatium x ad cujus finem mobilia concurrere debent.



II. Ad hoc ſpatium x inveniendum, animadverto velocitates eſſe, ut ſpatia eodem tempo-

re percurſa (*Phyſ.* 265). Patet enim, ſi corpus aliquod duplam, puta, alio velocitatem habet, eodem tempore duplum ſpatium percurſurum. Habebitur ergo proportio; velocitas corporis A eſt ad velocitatem corporis B, ut ſpatium ab A percurſum ad ſpatium a B percurſum; ſeu; $5 : 2 :: d + x : x$

Ergo multiplicando $5x = 2d + 2x$

Et tranſponendo, $5x - 2x = 2d$

Et reducendo $3x = 2d$

Et dividendo per 3 $x = \frac{2d}{3} = \frac{1200}{3} = 400$.

Quum ſcilicet corpus A corpori B concurret, ſpatium a corpore B percurſum erit tertia pars dupli ſpatii, quo præcedebat; ſeu duæ tertiæ partes diſtantiæ inter mobilia interceptæ initio motus. Quare punctum concurſus x diſtabit hexapedas 4 a corpore B, & 1000 ab A.

289. COROLLARIUM. Ex æquatione $x = \frac{2d}{3}$ ſolutionem problematis continente apparet, *ad habendum ſpatium x a mobile lentiore percurſum, ducendam eſſe diſtantiam d in hujus mobilis velocitatem, & productum dividendum eſſe per velocitatum differentiam*. Diviſor 3 eſt velocitatum differentia.

290. APPLICATIO. Eadem methodo inveniri poteſt *in quo zodiaci puncto luna ſolem aſſequetur*, quem præcedere ſuppono orientem verſus nota quadam quantitate, ſeu dato graduum, & minutorum numero, quem voco d.

EXPLICATIO I. Sciendum, velocitates lunæ, & ſolis in zodiaco eſſe ferme ut 1484 ad 111.

Hoc poſito, ſit diſtantia d, qua ſol lunam orientem verſus præcedit, graduum 26, minutorum 56; nempe minutorum 1616. Spatium, ſeu *partem zodiaci* quam ſol percurrit quo tempore illum luna aſſequetur, voco x; ſpatium, ſeu pars zodiaci, quam eodem tempore luna

luna percurret, erit $d+x$. Habebitur ergo proportio, $1484 : 111 :: d+x : x$

Ergo multiplicando $1484x = 111d + 111x$

& tranſponendo, $1484x - 111x = 111d$

& reducendo $1373x = 111d$

& dividendo per 1373 $x = \frac{111d}{1373} = \frac{179376}{1373}$.

II. En problema ſolutum. Quare ad habendum ſpatium x, ſeu punctum, quo luna ſolem aſſequetur, divide 179376 per 1373; quotiens 130 minuta (addita minuti fractione, quæ negligitur) exprimet diſtantiam a ſole ad punctum concurſus percurſam. Deinde $d+x = 1616+130$ erunt 1746 minuta, nempe gradus 29, & minuta 6: hæc ferme eſt diſtantia inter locum lunæ, & punctum, quo ſolem aſſequetur.

NOTA. Veram hic ſupponimus apparentem ſolis in zodiaco revolutionem. Hæc, quæ eſt ejus in zodiaco revolutio annua incipiendo a primo arietis puncto uſque dum ad idem arietis punctum redibit, fit diebus 365, horis 5, minutis 48, ſecundis 44 (*Phy.* 1137). Revolutio lunæ in zodiaco incipiendo a primo arietis puncto eſt dierum 27, horarum 7, minutorum 43, ſecundorum 5 (*Phy.* 1242).

Spatium percurſum apparenter a ſole, & a luna eſt ipſe zodiacus conſtans gradibus 360. *Velocitates apparentes* horum globorum circa zodiacum ſunt igitur in ratione inverſa temporum (*Phy.* 266). Duo hæc tempora in minuta convertendo, & neglectis ſecundis, inveniemus tempus ſolis eſſe minutorum 525948, & tempus lunæ minutorum 39343; primum vero tempus ad alterum eſſe proxime ut 1484 ad 111; ut in ſolutione problematis ſuppoſuimus.

PROBLEMA XI.

291. Duo mobilia B, & C eodem inſtanti moveri incipiunt in eadem linea ſibi occurrentia. *Data eorum diſtantia initio motus, & velocitatum ratione punctum occurſus invenire.*

SOLUTIO. Diſtantia mobilium ſit BC, quam voco $d = 640$ leucis; velocitas mobilis B $= 2$; velocitas mobilis C $= 6$.



Quæritur quamnam partem Bx, quam voco x mobile B percurrerit in inſtanti occurſus. Ad hoc animadverto, mobile C eodem tempore percurſurum diſtantiam $d-x$ ſpatii, quo diſtant invicem. Habebitur ergo proportio; velocitas mobilis B eſt ad velocitatem mobilis C, ut ſpatium a primo percurſum ad ſpatium ab altero percurſum; ſeu $2 : 6 :: x : d-x$

Ergo multiplicando $2d - 2x = 6x$

& tranſponendo $6x + 2x = 2d$

& reducendo $8x = 2d$

& dividendo per 8 $x = \frac{2d}{8} = \frac{1280}{8} = 160$.

Hoc eſt; duo mobilia ſibi occurrent quum mobile B percurrerit duas octavas partes diſtantiæ BC, qua ſe uncta erant. Quare punctum occurſus x diſtabit leucas 160 à puncto B.

292. COROLLARIUM. Ex æquatione $x = \frac{2d}{8}$, qua ſolutio problematis continetur, apparet, *ad habendum ſpatium x a lentiore mobile percurſum, diſtantiam d ducendam eſſe in velocitatem hujus mobilis, & productum per ſummam velocitatum eſſe dividendum.* Diviſor 8 eſt ſumma ambarum velocitatum.

PRU-

PROBLEMA XII.

293. Duo viatores, quorum alter altero lentius graditur, ſunt in eodem loco A, & volunt ad locum B eodem inſtanti pervenire. *Data velocitatum ratione, & terminorum diſtantia, quam itineris partem tardior confeciſſe debeat antequam alter pergere incipiat, invenire.*

SOLUTIO. Sit diſtantia AB inter duos terminos $=$ 1000 hexapedis; velocitas minor $= 5$, major $= 7$.



I. Partem Ax totius diſtantiæ AB, ſeu d, voco x, quam tardior percurriſſe debet antequam velocior iter aggrediatur. Hic totam diſtantiam d percurret quo tempore alter partem $d-x$ percurret.

Quare ſemper poſitis velocitatibus in ratione ſpatiorum percurſorum (288); adhuc habebitur proportio; $7 : 5 :: d : d-x$

Ergo multiplicando $7d - 7x = 5d$

& tranſponendo $-7x = 5d - 7d$

& iterum tranſponendo $7x = -5d + 7d$

& reducendo $7x = 2d$

& dividendo per 7, $x = \frac{2d}{7} = \frac{2000}{7} = 285 + \frac{5}{7}$.

II. Hoc eſt: ſi diſtantia d eſt hexapedarum 1000, tardior percurriſſe debet ſeptimam partem hexapedarum 2000, quum velocior iter aggreditur.

294. COROLLARIUM. Ex hac æquatione $x = \frac{2d}{7}$ problema ſolvente apparet, *ad habendam incognitam x, ſeu ſpatium a tardiore præcurſum, ducendam eſſe diſtantiam d in velo-*

locitatum differentiam, & productum per majorem velocitatem eſſe dividendum. Diviſor 7 eſt major velocitas; multiplicator 2 in caſu eſt earum differentia.

NOTA. Tria præcedentia problemata indicare poſſunt proxime quot diebus, & ad quam diſtantiam concurrent duæ naves, quarum altera *melius altera velificatur* in data ratione; & quæ diverſis temporibus ab eodem portu, puta Pondicherio, ſolventes, eodem rhombo ad eundem terminum, puta Burdigalam, appellere debent, ceteris omnibus paribus ſuppoſitis; ſeu quarum altera Burdigala, altera Pondicherio ſolvens, ſibi in itinere occurrere debent. Intelliges, facile tradita methodo in præcedentibus tribus problematibus plurima alia jucunda de motu problemata proponi, & ſolvi poſſe.

PROBLEMA XIII.

295. *Dato primo, & ſecundo termino progreſſionis geometricæ decreſcentis, & infinitæ, omnium terminorum ſummam invenire.*

SOLUTIO. Sit data progreſſio ÷ 8.4.2, 1. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{\infty}$.

I. Primum terminum voco a, ſecundum b. terminorum ſummam incognitam x. Animadverto primo, in quavis progreſſione geometrica ſummam antecedentium eſſe ad ſummam conſequentium, ut unicus antecedens ad ſuum conſequentem (222). At in hoc problemate ſumma omnium antecedentium eadem eſt, quæ ſumma omnium terminorum; omnes enim termini ſunt antecedentes, dempto ultimo, qui eſt $\frac{1}{\infty} = 0$ (241): quare ſumma antecedentium eſt $x - \frac{1}{\infty} = x - 0 = x$.

Deinde quum ſumma omnium terminorum in progreſſione ſit conſequentium, dempto primo,

mo, ſumma conſequentium erit $x - a$. Habebimus ergo proportionem; ſumma omnium terminorum eſt ad ſummam eorundem, dempto primo, ut primus a eſt ad ſecundum b; ſeu $x : x - a :: a : b$; ergo $bx = ax - aa$; ſeu $ax - aa = bx$. Æquatio hæc problematis naturam exprimit, in qua eſt unica incognita x.

II. Modo incognita x a duabus notis, quibus admixta eſt, liberanda. Propterea in poſtrema æquatione $ax - a^2 = bx$, primum traduco $- a^2$ a primo membro ad alterum; & habeo $ax = bx + a^2$; ſeu $bx + a^2 = ax$.

Deinde, ut omnes terminos incognitam continentes in eodem membro ſtatuam, quantitatem bx a primo membro poſtremæ æquationis ad ſecundum transfero (261); & habeo $a^2 = ax - bx$; ſeu $ax - bx = a^2$.

III. Hic quum videam primum membrum poſtremæ æquationis eſſe incognitam x ductam in $a - b$, totam æquationem divido per $a - b$, ut incognita x in uno membro alteri tantum notis conſtanti æquale ſolitaria ſit. Habeo itaque $x = \frac{a^2}{a-b}$; & æquatio ſoluta eſt.

292. COROLLARIUM. Ex hac æquatione $x = \frac{a^2}{a-b}$ problema ſolvente apparet, *ſummam omnium terminorum progreſſionis geometricæ decreſcentis & infinitæ, eſſe æqualem quadrato primi termini diviſo per differentiam primi a ſecundo.*

In propoſito exemplo, primus terminus eſt 8; ejus quadratum 64; differentia primi termini a ſecundo eſt 4. Quare 64 per 4 dividere oportet. Quotiens 16 erit ſumma omnium terminorum datæ progreſſionis.

297. NOTÆ. I Quum termini progreſſionis infinitæ decreſcunt in ratione ſubdupla, ut in propoſito exemplo; tunc *ſumma omnium terminorum poſt primum huic primo æqualis eſt.*

Quum

Quum antecedentes ſunt tripli conſequentium; *ſumma terminorum, dempto primo, eſt tantum tertia pars primi termini*.

Quum antecedentes ſunt decupli conſequentium; *ſumma omnium terminorum, dempto primo, eſt nona pars primi*. Hæc omnia ex canone ſtatuto (296) conſequuntur.

II. *Hac ratione in toto, cujus partes geometrica proportione decreſcunt ſumma infinita decreſcens facile invenietur*.

Dimidia $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{\infty}$, ſeu $0 = 1$

Tert. partes $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \ldots 0 = \frac{1}{2}$

Quartæ $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}, \ldots 0 = \frac{1}{3}$

Decimæ $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, 0 = \frac{1}{9}$

Centeſimæ $\frac{1}{100}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100\,000}, \frac{1}{100000000}, 0 = \frac{1}{99}$

III. Ex genere *partium omnium fractionariarum ſumma invenietur, quarum ſeries ſit progreſſio geometrica infinita, unitatem a denominatore primi termini demendo*. Primus terminus in denominatore unitate minutus ſummam exprimet ſeriei infinitæ terminorum omnium ſequentium.

§. III.

ÆQUATIONES SECUNDI GRADUS.

298. OBSERVATIO. A*Equationes ſecundi gradus* illæ omnes vocantur, in quibus incognita ad quadratum elevata eſt. Quum enim in æquatione in quantitatem notam incognita ducta

ducta eſt, æquatio eſt primi gradus. Quare $ax + dx - x = b$ eſt æquatio primi gradus, poſitis notis quantitatibus a, b, d, notoque eorum valore in numeris integris, aut fractis.

Quamprimum quoque oſtendemus (301), productum xy incognitæ in incognitam in æquatione, dare æquationem ſecundi gradus, ſeu quæ re ipſa ad ſecundum gradum ſpectat. Quare $xy + y = a$ æquivalet æquationi ſecundi gradus.

Reſolutio æquationum ſecundi gradus *extractionem radicum* in utroque æquationis membro neceſſario poſtulat; & hæc ſæpius difficultates præfert, quas antevertere, & tollere opportunum eſt. Quare *quum in æquatione incognita ad quadratum elevata eſt, ad radicem extrahendam*,

I. Videndum num hoc quadratum per aliam quantitatem multiplicatum, aut diviſum ſit. In primo enim caſu a quantitate multiplicante diviſione liberandum eſt, in altero multiplicatione.

II. Videndum num quadratum ſit poſitivum. Si enim negativum eſſet, tranſpoſitione poſitivum fieri deberet; in quantitate ſiquidem ad quadratum elevata nullum quadratum negativum eſſe poteſt (152 IX.).

III. In unico æquationis membro termini omnes incognitam continentes ſtatuendi ſunt, eos tranſpoſitione alteri membro æquando.

IV. Videndum num hoc membrum ſit *quadratum perfectum*; quod non contingit, niſi cum incognita in unico termino continetur; ut $x^2 = a - b$. Quum vero præter incognitæ quadratum continet membrum aut unum, aut plura producta ex incognita in alias notas quantitates, ut $x^2 - ax = b$; membrum eſt quadratum imperfectum (152, VIII.); tunc illud complendum eſt utrique æquationis membro addendo *quadratum dimidiæ quantitatis notæ incognitam multiplicantis*.

V. Ab

V. Ab utroque æquationis membro radix quadrata extrahenda eſt. Ita incognitæ valor facile invenietur; hic enim æqualis erit radici quadratæ membri ſolis notis conſtantis (129, & 153).

EXEMPLUM I. Detur æquatio $\frac{a^2-x^2}{b}=2a-b$, cujus radix quadrata extrahenda ſit. Primum fractionem tollo omnia in b ducendo; & habeo $a^2-x^2=2ab-b^2$. Deinde poſitivum tranſpoſitione reddo x^2 (261); & habeo $a^2=x^2+2ab-b^2$. Tertio adhuc tranſpoſitione x^2 in membro ſolitarium ſtatuo; & habeo $a^2-2ab+b^2=x^2$. Quarto quoniam x^2 ſolitarium eſt, video eſſe quadratum perfectum. Quinto utriuſque membri radicem extraho (153); & habeo $a-b=x$.

EXEMPLUM II. Duæ aliæ ſint æquationes $x^2+ax=bc$; & $x^2+x=b$; quarum utraque præter quadratum incognitæ incognitam linearem continet, ſed in prima tantum potentia. Quum enim incognita in quantitatem notam ducta eſt, quantitas hæc nota a, exempli gratia coefficientis incognitæ munus gerit; & indicat quoties incognita ſumenda ſit.

$$x^2+ax=bc$$
$$x^2+x=b$$

Ad radicem quadratam harum duarum æquationum inveniendam, in unico membro omnes termini incognitam continentes ſtatuentur, & membrum hoc efficietur quadratum perfectum. Ad hoc ſumendum eſt *dimidium coefficientis*, quod incognitam linearem x multiplicat; & hoc quadratum utrique æquationis membro addendum eſt. Ita primum membrum fiet quadratum perfectum, cujus radix facile extrahi poterit. Innoteſcet igitur radix x, radice ab utroque membro extracta.

In prima æquatione $x^2+ax=bc$, coefficiens

ciens ipſius x eſt a: hujus dimidium $\frac{a}{2}$; hujus quadratum $\frac{a^2}{4}$. Hoc addito utrique membro habebimus æquationem $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = bc + \frac{a^2}{4}$; cujus radix quadrata (152) eſt $x + \frac{a}{2} = \sqrt{bc + \frac{a^2}{4}}$

In altera æquatione $x^2 + x = 6$; coefficiens ipſius x eſt 1; hujus dimidium $\frac{1}{2}$; quadratum $\frac{1}{4}$. Hoc addito utrique membro habetur æquatio $x^2 + x + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$.
cujus radix erit $x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$
Adeoque $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

PROBLEMA I.

299. *Numerum x invenire, cujus quadratum & productum in quantitatem notam nota quantitati æqualia ſint.*

SOLUTIO. Numerus ignotus ſit x, ejus quadratum x^2, productum in quantitatem notam ax. Ex unica problematis conditione habetur æquatio $x^2 + ax = b$.

I. Ex præcedente obſervatione video, problema eſſe ſecundi gradus; ignota enim ad quadratum elevata eſt; & præterea æquatio diverſos incognitæ gradus continet, nempe x^2, & ax. Ut ejus igitur valor inveniatur ab utroque membro radix quadrata eſt extrahenda.

II. Video deinde primum æquationis membrum non eſſe quadratum perfectum; duo enim tantum habet membra (152, VIII.): quare ut radix extrahi poſſit, debet primum membrum fieri quadratum perfectum. Ad hoc ſumo dimidium coefficiens a ſecundi termini, & habeo $\frac{a}{2}$, quod ad quadratum $\frac{a^2}{4}$ effero; hoc vero utrique membro addo; æquatio fit $x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ $= b$

$= b + \frac{a^2}{4}$.

III. Hac in æquatione utriuſque membri radicem quadratam extraho (153); & habeo $x + \frac{a}{2} = \sqrt{b + a^2}$.

Hac æquatione problematis ſolutio continetur; tantum ſecundi membri valor perpendendus eſt; conſtat hoc enim quantitatibus notis, quarum radix ſumenda eſt. Quare poſito $a = 8$, $b = 33$; . . . .

Habebo primo . . . . $x + \frac{8}{2} = \sqrt{33 + \frac{64}{4}}$

& reducendo . . . . . $x + 4 = \sqrt{49}$

Et ablato ſigno radicali $x + 4 = 7$

& tranſponendo . . . . $x = 7 - 4$

& reducendo . . . . . $x = 3$

Apparet, æquationem hanc $x = 3$ omnibus problematis conditionibus ſatisfacere. Etenim quadratum 3 eſt $9 = x^2$; productum 3 in 8 eſt $24 = ax$. Duo hi numeri $9 + 24$ efficiunt $33 = b$; adeoque problema ſolutum eſt.

300. NOTÆ. Notandum, (& hoc *præcipuum* eſt in theoria æquationum ſecundi gradus), in poſtrema æquatione $x = 3$, quantitatem x eſſe poſſe tum poſitivam, tum negativam. In problemate ſiquidem ſecundi gradus quantitas x ad quadratum elevata eſt; & quadratum quodvis ſemper duas poſſibiles radices habet. Exempli cauſa, quadratum x^2 quum æque procedat ex $+x$ in $+x$, atque ex $-x$ in $-x$ (152 IX.), duas habet radices, quæ æque ſunt aut $+x$, aut $-x$; neque in æquatione $x = 3$ definiri poteſt, num radix inventa ſit poſitiva $+x$, an negativa $-x$. Hinc ſequitur, *problemata determinata ſecundi gradus binas ſemper ſolutiones admittere.*

Ut hoc clarius eluceat, ponamus æquationem reſolutam procedere ab $+x + \frac{a}{2}$. Hoc bino-

nomio in ſe ducto habebimus $x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{4}$; & reducendo $x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$. Hæc eſt æquatio reſoluta, in qua quantitas generans x eſt poſitiva, & valet $+3$.

Ponamus deinde æquationem provenire ex $-x - \frac{a}{2}$. Binomio hoc in ſe ducto habebimus $x^2 + \frac{x}{2} + \frac{ax}{2} + \frac{n^2}{4}$, & reducendo $x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$: hęc eſt eadem æquatio', quam reſolvimus; in qua quantitas generatrix x negativa eſt, & valet -3.

II. Aſt æquatio $x = 3$, quæ tandem problema reſolvit, æque conditionibus problematis ſatisfacit; ſive x exprimat quantitatem poſitivam $+3$, ſive negativam -3.

Vidimus qua ratione x poſitive $+3$ ſumptum problematis conditionibus ſatisfaciat, nunc ut iiſdem negative ſumptum -3 ſatisfaciat videamus; ſunt autem hæ, quadratum ipſius x una cum producto ejuſdem x in a, ſeu 8 æquare numerum poſitivum 33. Itaque $-3 \times -3 = +9$ deinde $-3 \times -8 = +24$; tandem $+9 + 24 = +33$.

III. Si in problemate quantitates datæ a, & b, non jam 8, & 33, ſed fuiſſent 22, & 615 æque æquationem habuiſſemus $x + \frac{a}{2} = \sqrt{6 + \frac{a^2}{4}}$.

& ſubſtituendo $x + \frac{22}{2} = \sqrt{615 + \frac{484}{4}}$

& reducendo $x + 11 = \sqrt{736}$

& liberando a ſigno $x + 11 = 27$, cum aliqua fract.

& reducendo $x = 16$

Poſtrema hæc æquatio problematis conditionibus proxime ſatisfacit. Primo ſiquidem $16 \times 16 = 256$; deinde $16 \times 22 = 352$; tandem $256 + 352 = 608$. Numerus hic eſt aliquanto minor 615; quantitas enim x aliquanto 16 exſuperat. Aſt æquatio $x = 16$ aut problema re-

ſol-

ſolvit, ſi proxima ſolutio ſufficit; aut oſtendit, *problema eſſe inſolubile*, ſi accurata radix numeri 736 poſtuletur, qui quadratum perfectum non eſt (134); nec datis problematis conditionibus congruit.

IV. Si peteretur, *inveniri numerum* x *hujuſmodi, ut dempto ejus quadruplo a quo quadrato reſiduum eſſet* 96; methodo præcedentis problematis haberemus primo $x^2 - 4x = 96$; & complendo quadratum $x^2 - 4x + 4 = 96 + 4$. Deinde ſolutio eadem eſt, quæ præcedens; & invenitur $x = 12$.

PROBLEMA II.

301. *Datis duorum numerorum ſumma, & producto, illos invenire.*

SOLUTIO. Sint numeri x, & y; eorum ſumma $18 = a$, productum $65 = b$. Duas problema habet conditiones, unde æquationes duæ. Ex prima $x + y = a$; ex altera $xy = b$.

I. Quum duæ hic ſint incognitæ in utraque æquatione, ſubſtitutione utor, ut in ſecunda æquatione unam ex incognitis eliminem. Sumo itaque valorem x in prima æquatione; & habeo $x = a - y$; & $a - y$ in y ducendo habeo $ay - y^2$. Quare æquatio $xy = b$ transformata eſt in ſibi æqualem $ay - y^2 = b$.

$$x + y = a, \text{ ſeu } 18$$
$$xy = b, \text{ ſeu } 65$$
$$\overline{ay - y^2 = b}$$

II. In hac poſtrema æquatione unicam jam habeo incognitam; ſed adeſt quadratum negativum, quod poſitivum reddendum eſt; præterea adeſt quadratum imperfectum complendum (298). Primum tranſpoſitione (261) poſitivum efficio quadratum negativum; & habeo $y^2 = ay = -b$.

De-

Deinde quadratum compleo utrique membro hujus æquationis addendo quadratum dimidii coefficientis a ſecundi membri; & habeo æquationem completam $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b$.

III. Poſtrema hæc æquatio ſolutionem problematis continet; & tantum extrahenda eſt radix quadrata ab utroque membro (153, & 129), quorum alterum ſolis cognitis conſtat, Radix eſt; . . . .

. . . . . . $y - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$

& reducendo . . . $y - 9 = \sqrt{81 - 65}$

& iterum . . . $y - 9 = \sqrt{16}$

& ablato ſigno . . $y - 9 = 4$

& tranſponendo . $y = 9 + 4$

& reducendo . . . $y = 13$

Poſtrema hæc equatio $y = 13$ oſtendit alterum ex numeris quæſitis y eſſe 13, alterum vero x eſſe propterea 5; quandoquidem $13 + 5 = 18$. Numeri 13, 5 duabus problematis conditionibus ſatisfaciunt; nam $13 + 5 = 18$; & $5 \times 13 = 65$.

IV. Notandum tamen, ſive fiat $y = 13$, & $x = 5$; ſive $x = 13$, & $y = 5$, æque conditiones impleri. Unde ſequitur, numerum 13 non magis referri ad radicem y, quam ad alteram radicem x; *& utramque incognitam poſſe aque ad majorem, ac ad minorem numerum referri*; adeoque problema duas ſolutiones admittere, ut præcedens; atque ex genere quodvis problema in quo alterutra incognita major, aut minor altera eſſe poteſt, *eſſe problema duplicis ſolutionis, & ſecundi gradus*. Nota hæc re ipſa a ſecunda præcedentis parte non differt.

CONCLUSIO.

Facile eſſet tractatum ampliorem reddere, ſive hanc æquationum primi, & ſecundi gradus theo-

theoriam producere plurima ſubjiciendo problemata, quæ ubique inveniuntur, & nihil juvant. Nos tantum præcipua problemata exhibuimus, quorum ſolutio, quantum fieri potuit ſimplex, proximam, & immediatam ad præcipuas Algebræ, Geometriæ, & Phyſicæ cognitiones rationem habet.

FINIS ALGEBRÆ.

ARI-

ARITHMETICÆ, ALGEBRÆ, ET GEOMETRIÆ PRINCIPIA.

PARS ALTERA.

GEOMETRIA.

LONGIMETRIA, ſeu menſura extenſionis in longum. *Linearum origo, earum reſpectiva poſitio, conjunctio in figuras, rationes, menſura.*

PLANIMETRIA, ſeu menſura ſuperficierum planarum; *earum æqualitas, rationes, ſectiones.*

STEREOMETRIA, ſeu menſura ſolidorum; *eorum formatio, & evolutio, unde primum ſuarum ſuperficierum menſura, & rationes deducuntur; deinde ſoliditatum æqualitas, menſura, & rationes.*

TRIGONOMETRIA, ſive ars ſcientifica triangula arithmetice reſolvendi. *Chordarum, & ſinuum theoria: ſinuum uſus in triangulorum reſolutione: ſinus ſecundorum, & tertiorum. Trigonometria ſpharica notio, & uſus præcipui.*

SECTIONES CONICÆ: Introductio ad hanc ſcientiam. *Parabola, & ellipſis in plano, & in cono conſiderata. Tabula ſinuum.*

ARITHMETICÆ, ALGEBRÆ, ET GEOMETRIÆ PRINCIPIA SIVE MATHESEOS ELEMENTA.

GEOMETRIA.

PROLEGOMENA.

GEOMETRIÆ PRINCIPIA.

G*eometria* eſt ſcientia extenſionis, ſeu ſcientia, quæ quantitatem continuam metiri docet. Geometria alia ſpeculativa eſt, alia practica. *Speculativa* in demonſtrando verſatur; practica in operando. Ad primam theoremata, ad alteram ſpectant problemata. Nos geometriam ſpeculativam a practica non ſejungemus; optime enim operatio demonſtrationi, a qua regitur, & illuſtratur, proxima ſiſtitur. Quare ſimul theoremata, & problemata conjungemus.

Geometria paſſim in elementarem, & tranſcendentem dividitur. *Geometriæ elementaris* nomine vocantur omnes ſcientiæ hujus partes, in qua tantum lineæ recta, & circularis tum in demonſtrando, tum in operando uſurpantur. *Geometriæ tranſcendentis* nomine appellantur ſcien-

ſcientiæ hujus partes omnes, in quibus demonſtrando lineæ a recta, & circulari diverſæ adhibentur; cujuſmodi ſunt tres ſectiones conicæ; & plurimæ aliæ curvæ ordinis ſublimioris.

302. DEFINITIO. Quatuor in extenſione conſideranda ſunt; nempe *punctum*, *linea*, *ſuperficies*, *& ſolidum*. Corpus quodcumque integrum conſideratum eſt *ſolidum*. Solidum extrinſecus terminatur *ſuperficiebus*; quælibet ſuperficies lateribus terminatur, quæ dicuntur *lineæ*. Linea quælibet extremitatibus terminatur, quæ *puncta* dicuntur.

I. Punctum dimenſionibus caret, ſeu dimenſiones habet tantum infinite parvas, quæ negliguntur. Linea dimenſionem habet, quæ *longitudo* dicitur. Duas dimenſiones habet ſuperficies, quæ *longitudo*, & *latitudo* nuncupantur. Tres dimenſiones habet ſolidum, quæ dicuntur *longitudo*, *latitudo*, *& profunditas*.

II. Tres hæ dimenſiones primitus a puncto originem ducunt. Punctum enim fluens *lineam* deſcribit; linea *ſuperficiem*; ſuperficies *ſolidum*. Tres itaque tantum ſunt extenſionis ſpecies, linea, ſuperficies, ſolidum.

III. Linearum menſura, ſeu *Longimetria*, ſuperficierum menſura, *planimetria*, ſolidorum menſura, ſeu *ſtereometria* totidem tractatibus argumentum præbebunt, qui quidquid de tribus extenſionis dimenſionibus dicenda a nobis ſunt complectentur.

Tribus hiſce tractatibus *trigonometriæ* tractatum addemus, qui peculiarem, magiſque ſcientificam triangula dimetiendi methodum continebit; & *introductionem ad ſectiones conicas*, qua tantum præcipuæ, & in phyſica neceſſariæ parabolæ, & ellipſeos notiones tradentur.

ETYMOLOGIÆ. GEOMETRIA: telluris menſura; ſeu extenſionis terræ menſura; huic pri-

mum ſtuduerunt geometræ, ſeu qui ſcientiæ extenſionis operam dederunt; a γη, *terra*, & μετρον, *menſura*. LONGIMETRIA ſcientia extenſionis in longum, a *longum*, & μετρον. PLANIMETRIA: ſcientia extenſionis planæ; a *planum*, & μετρον. STEREOMETRIA ſcientia extenſionis ſolidæ, ſeu extenſionis in tres ſuas dimenſiones; a στερέον, *ſolidum*, & μετρον. TRIGONOMETRIA: Scientia, ſeu menſura triangulorum; a τρέις, tria, γωνία, *angulus*, & μετρον. SECTIONES CONICÆ: ſcientia ſectionum a plano in cono factarum; ſeu proprietatum, quibus hæ ſectiones donatæ ſunt; ſive ſcientia, quæ ſuperficies planas conſiderat ſectionibus ſimiles, quas planum quovis modo conum quemvis ſecans efficere poteſt.

TRACTATUS PRIMUS.

LINEÆ, SIVE LONGIMETRIA.

IN lineis earum originem, poſitionem, in figuras conjunctionem, rationes conſiderabimus. Ab earum *origine* natura, & proprietates præcipuæ deſcendunt; a *reſpectiva* earum *poſitione* anguli naſcuntur; a *conjunctione* figuræ fiunt; a *rationibus* earum menſura obtinetur, ſive longimetria. Hæc ſingula totidem hujus tractatus articulis pertractabuntur.

AR-

ARTICULUS PRIMUS.

LINEARUM ORIGO, ET PROPRIETATES.

303. HYPOTHESIS. Si punctum A ſupponatur a termino A moveri ut pergat in B, ſpatium ab hoc puncto percurſum vocatur *linea*. Quare linea eſt fluxus puncti (Fig. 13.).

I. Si punctum A fluens ſemper eandem directionem ſervat, & breviori ſemita procedit ab A in B, *lineam rectam* deſcribit.

II. Si punctum A fluens quovis inſtanti directionem mutat, *lineam curvam* deſcribit; exempli cauſa, lineam AFB, vel ADB.

III. Hic animadverti poteſt, lineam quamvis rectam eſſe, vel curvam. *Linea recta in ſpecie ſua unica eſt*; nequit enim eſſe magis, aut minus recta. *Linea curva infinite varia eſſe poteſt*; poteſt enim eſſe magis, aut minus curva. Inter curvas circularem tantum conſideramus, a qua ceteræ curvæ omnes primitus originem ducunt.

Linea recta *regula*, circularis *circino* deſcribitur. Præcipua hæc inſtrumenta ſunt, quæ in geometria practica adhibentur.

LINEA RECTA.

Nonnulla hic de linea recta ſubjicimus, quæ vel *theoremata* dicas, quoniam demonſtrantur; vel *axiomata*, quum evidentia per ſe ſint. (Fig. 13.).

304. AXIOMA I. *A puncto ad punctum unica recta duci poteſt*. Exempli cauſa a puncto A ad punctum B. Patet enim, ceteras rectas per puncta A, & B tranſeuntes habituras puncta ſua omnia ſuperpoſita punctis primæ lineæ AB; & unicam lineam cum AB facturas.

M 2 305.

305. AXIOMA II. *Linea recta eſt omnium breviſſima, quæ a puncto ad punctum duci poſſit:* quælibet alia linea ſiquidem dum incurvatur elongatur, & eo magis elongatur, quo magis curvatur. Linea A C B brevior eſt linea A E B, & alia quavis A F B, vel A D B ducta a puncto A ad punctum B. (Fig. 13.).

Eſt ergo recta a puncto ad punctum ducta menſura diſtantiæ. Recta A B eſt ipſa diſtantia puncti A a puncto B.

306. AXIOMA III. *Poſitio lineæ rectæ duobus punctis habetur.* Quare ſi duo puncta A, & C unius rectæ habeantur, rectæ A C B poſitio innoteſcet; omnia enim ejus puncta ſunt in directione punctorum A, & C, etſi in infinitum utrinque produceretur.

307. AXIOMA IV. *Duæ rectæ duo puncta communia habere nequeunt.* Si enim haberent, jam & eandem poſitionem haberent, & unicam rectam efficerent. Quantumvis proximæ fiant lineæ A B, & A C, quamdiu duæ ſunt, unicum punctum A commune habent (*Fig.* 21).

LINEA CIRCULARIS.

308. HYPOTHESIS. Si recta C A immobilis ad punctum A, & mobilis ad punctum C ſupponatur volvi circa punctum C, *extremitas A curvam deſcribet, cujus omnia puncta a puncto A æque diſtabunt* (*Fig.* 18).

Hæc eſt *circini* ſpecies, cujus crus immobile in puncto fixum eſt, dum alterum crus circa hoc punctum volvitur. Circini divaricatio lineam C A refert, ſeu C D. Hinc ſequentes definitiones, & corollaria.

DEFINITIONES.

309. DEFINITIO I. Curva a crure mobili circini deſcripta dicitur *peripheria*. Spatium a peri-

peripheria comprehenſum dicitur *circulus*. Punctum ab omnibus peripheriæ punctis æque diſtans dicitur *centrum*. Recta a centro ad quodvis peripheriæ punctum ducta dicitur *radius*. Recta per centrum tranſiens, & ad duo peripheriæ puncta utrinque terminata dicitur *diameter*. (*Fig.* 12, & 18).

Si eodem centro plures peripheriæ M N, *m n* deſcribantur *concentricæ*; ſi centra habeant diverſa, dicuntur *excentricæ* (*Fig.* 21, & 22).

310. DEFINITIO II. Quævis peripheriæ pars duobus radiis intercepta dicitur *arcus*. Quævis portio ſuperficiei circularis duobus radiis, & arcu concluſa dicitur *ſector circuli*. Quævis recta per arcus extremitates tranſiens dicitur *chorda*. Quum chorda circuli ſuperficiem in partes inæquales ſecat, major dicitur *ſegmentum majus*, altera *ſegmentum minus*. (*Fig.* 15).

Quare E C, aut A C eſt *radius*; A C B *diameter*; punctum C centrum. E G F *arcus*; C E G F C *Sector*; E F chorda; EGFE *minus ſegmentum*; EFHE *majus ſegmentum*.

311. DEFINITIO III. Quævis peripheria dividitur in partes æquales 360, quæ dicuntur *gradus*; quilibet gradus in partes æquales 60, quæ dicuntur *minuta*, quodlibet minutum in partes æquales 60, quæ dicuntur *ſecunda*; quodlibet ſecundum in partes æquales 60, quæ dicuntur *tertia*; atque ita porro.

Semicirculus gradus habet 180; *quadrans circuli* gradus 90 (*Fig.* 3). *Gradus* nomine non quantitas abſoluta intelligenda eſt, ſed pars tercenteſima ſexageſima peripheriæ cujuſcumque ſive magnæ, ſive parvæ.

COROLLARIA.

312. COROLLARIUM. I. *Omnes radii circuli ſunt æquales*; ſunt enim rectæ metientes

diſtantiam centri a peripheria (305), quæ diſtantia ubique eadem eſt. *Omnes* quoque *circuli diametri ſunt æquales*; quælibet enim eſt duplus radius. (*Fig.* 15, *&* 18).

313. COROLLARIUM II. *In duobus circulis æqualibus, radii & diametri ſunt æquales*; menſura ſiquidem ſunt magnitudinum ac diſtantiarum æqualium, ſcilicet in utriſque, diſtantia centri a peripheria, vel duplum hujus diſtantiæ.

314. COROLLARIUM III. *Linea recta circuli peripheriam in tribus punctis ſecare nequit*; tria enim puncta in recta eandem directionem habent, quam in peripheria circuli habere nequeunt, in qua punctum quodlibet a directione duorum præcedentium divertit (308).

315. COROLLARIUM IV. *Duo puncta peripheriæ poſitionem non determinant*; peripheria enim & cum recta, & cum alia peripheria duo puncta communia habere poteſt, a quibus ſecetur. Puncta A, & B tum rectæ A B, tum duabus peripheriis excentricis MM, & NN communia ſunt. (*Fig.* 11).

At tria puncta peripheriæ poſitionem determinant; in eadem enim peripheria eadem eſt in omnibus punctis curvatura; & puncta omnia a centro æque diſtant. (*Fig.* 15).

Exempli cauſa, in circulo A G B H C apparet, unicum eſſe punctum C, quod ab omnibus peripheriæ punctis æque diſtet. Punctum enim *m* propius eſt ipſi A, quam ipſi B; & punctum *n* propius eſt ipſi H, quam ipſi G; atque ita de ceteris.

Quare notis in peripheria punctis quibuſvis A, E, G reſpectu centri C, reliqua omnia peripheriæ puncta cognoſcentur, quæ eodem modo, ac tria illa inflectuntur; quum æque, ac illa, a centro C diſtent.

316. COROLLARIUM. V. *Diameter chordarum maxima eſt*; duobus enim radiis æqua-
lis

lis eſt ; nulla chorda eſt duobus radiis æqualis. (*Fig.* 15).

Ducantur radii CE, CF. Diameter ambobus æqualis eſt (212). At hi duo radii chorda EF majores ſunt; hæc enim eſt linea recta, ECF angularis: hæc diametro æqualis eſt; ergo recta EF, ſeu alia quævis in circulo ſumpta, diametro minor eſt. (305). Ergo diameter quavis chorda major eſt.

317. COROLLARIUM VI. *Omnes diametri circulum, & peripheriam bifariam ſecant.* Quum enim diameter ſit chordarum maxima omnium maximum arcum ſubtendit, nempe ſemiperipheriam; & omnium ſegmentorum maximum, quod eſt ſemicirculus. Exempli cauſa, chorda EF ſubtendit arcum EGF, & ſegmentum EFG; at diameter AB. ſubtendit ſemiperipheriam AGB, & ſemicirculum ACBGA.

Si concipiatur pars ſuperior AGBCA peripheriæ, & circuli ſuperpoſita inferiori AHBCA, patet, punctum G caſurum ſupra punctum H; cetera omnia puncta partis ſuperioris caſura ſupra puncta correſpondentia inferioris; & partes has ſuperpoſitas in omnibus punctis correſpondentibus congruere debere; quare partes hæ ſunt omnino æquales. Modus hic demonſtrandi dicitur *per ſuperpoſitionem* (10).

318. COROLLARIUM VII. *In circulo arcus æquales æqualibus chordis inſiſtunt.* Superponantur enim arcus æquales EGF, MHN; poſtrema duo puncta arcuum fiunt puncta chordas terminantia; ergo chordæ ſunt æquales. Si ergo duo arcus quicumque ejuſdem circuli ſunt æquales, eorum chordæ erunt æquales. (*Fig.* 15).

319. COROLLARIUM VIII. In circulo chordæ æquales ſubtendunt arcus æquales. Duas enim æquales chordas EF, MN invicem ſuperpone, puncta illas terminantia ſunt duo extre-

ma puncta arcuum, quos ſubtendunt; & omnia puncta ſequentia unius arcus neceſſario ſuperjacent punctis arcus alterius; ubique eadem ſiquidem eſt peripheriæ curvatura. Ergo chordæ æquales ſubtendunt arcus æquales.

PROBLEMA I.

320. *Lineam rectam deſcribere, cujus punctum quodvis ſeorſim ſumptum æque diſtet a duobus datis punctis, ut A, & B.* (*Fig.* 6).

SOLUTIO I. A duobus datis punctis A, & B, tamquam centris, eodem intervallo deſcribe arcus DRC, DSC, qui ſe interſecent in punctis D, & C. Punctum D æque diſtabit ab A, & B; diſtabit enim radium DA, vel DB circulorum æqualium. Punctum quoque C æque diſtabit ab A, & B eadem ratione.

Duc a puncto D ad C rectam. Quodvis hujus lineæ punctum ſeorſim ſumptum æque diſtabit ab A, & B; evidens enim eſt, cetera omnia hujus lineæ puncta DMC eandem habere directionem cum datis D, & C (306); & ſi a quovis hujus lineæ puncto *m*, vel *n* capitur intervallum *m* A, aut *n* A, fore hoc æquale intervallo *m* B, vel *n* D.

SOLUTIO II. A datis punctis A, & B, tamquam centris, deſcribe arcus duos H ſeſe in puncto H ſecantes. Punctum interſectionis H æque diſtabit ab A, & B; diſtabit enim radium HA, vel HC æqualium circulorum.

Deinde ab iiſdem punctis datis A, & B eodem intervallo præcedenti æquali, vel inæquali deſcribe arcus duos ſeſe interſecantes F, vel G. Punctum interſectionis F, vel G æque diſtabit ab A, & B; diſtabit enim radium circulorum æqualium.

A puncto H ad punctum F, aut G rectam lineam ducito: quodvis hujus lineæ punctum ſeorſim æque diſtabit ab A, & B, *& ſi in inſi-*

infinitum produceretur, per omnia puncta ab A, & B æque diſtantia tranſiret (306).

Hinc apparet, puncta duo æque diſtantia ab A, & B, & lineam indefinitam ADMCG directura ſumi poſſe aut ambo ad partes FG, aut alterum ſupra puncta data, alterum infra; modo ambo puncta D, & C, vel D, & H, vel H, & F eodem intervallo ſumantur, unde habeantur æquales radii HA=HB, DA=DB, CA=CB, GA=GB. Tunc enim punctum quodvis ſolitarium lineæ DMCK utrinque indefinitæ a punctis A, & B diſtabit radium æqualium circulorum. Q. E. D.

Eodem modo oſtendam, ſingula puncta lineæ *hmfgk* æque diſtare a punctis *a*, & *b*.

321. NOTA. Ex hoc problemate diſces *datam rectam bifariam ſecare*. Recta AMB bifariam ſecta eſt ad punctum M. Hoc enim punctum quatenus ſpectans ad lineam DC æque diſtat ab extremis A, & B lineæ AMB; ut ex præcedente operatione, & demonſtratione patet.

Ex hoc problemate ſoluto ſequens ſolvitur, quod ex præcipuis eſt in geometria.

PROBLEMA PRÆCIPUUM.

322. *Per tria puncta data, & non in directum A, B, C, circuli peripheriam ducere.* (Fig. 17).

SOLUTIO. Ex præcedente problemate duc rectam EF, cujus quodvis punctum ſolitarium æque diſtet a punctis A, & B. Duc rectam GH, cujus quodvis punctum ſolitarium æque diſtet a punctis B, & C. Punctum R interſectionis linearum erit *centrum circuli*; ita ut ſi centro R intervallo RA deſcribatur peripheria, hæc per tria data puncta A, B, C tranſibit.

DEMONSTRATIO. Quum circulus unicum

punctum habeat ab omnibus peripheriæ punctis æque diſtans (315); ſi hoc punctum inveniatur, problema ſolutum eſt. Oſtendo jam, *punctum interſectionis* harum linearum æque a tribus datis punctis diſtare; adeoque ab omnibus punctis peripheriæ.

I. Punctum R ut ſpectans ad lineam EF æque diſtat ab A, & B; ex conſtructione ſiquidem quodvis punctum lineæ EF æque diſtat ab A, & B.

II. Punctum R ut ſpectans ad lineam GH æque diſtat a B, & C; nam ex conſtructione quodvis punctum lineæ GH æque diſtat a B, & C.

Quoniam igitur intervallum RA æquale eſt *intervallo* RB; & intervallum RC *eidem intervallo* RB, erit RA=RC. Ergo punctum interſectionis R eſt centrum circuli, cujus peripheria tranſiret per tria data puncta A, B, C. Si ergo linea RA, vel RB, vel RC a puncto interſectionis ad unum ex datis punctis ducta ſupponatur revolvi circa punctum R; ejus extremum mobile A deſcribet curvam (308), quæ per tria data puncta tranſibit, & erit circuli peripheria. Q. E. D.

323. NOTA. In problematis ſolutione, & demonſtratione ſupponimus, tria data puncta eſſe in eodem plano, puta, in charta, aut in planitie. Alibi oſtendemus, tria quævis puncta, puta centra telluris, ſolis, & lunæ eſſe ſemper in eodem plano (530); quare ſolutio, & demonſtratio ſunt œcumenicæ.

Tria centra telluris, ſolis, & lunæ ſi ſupponantur in plano indefinito ſita in A, B, C, & ducantur mente lineæ EF, GH, earum punctum interſectionis R erit centrum circuli, cujus peripheria per centra A, B, C telluris, ſolis, & lunæ tranſiret.

234. DEFINITIO. Si in linea indefinita AB quantum opus eſt producta capiantur duo puncta

ƈa quævis A, & B, & ducatur reƈa D M, vel DC, cujus omnia punƈa ſolitaria æque diſtent a punƈis A, & B; linea D M, vel DC *erit reƈa A B perpendicularis*. (*Fig.* 6).

325. COROLLARIUM. Datis tribus punƈis M, N, R non in direƈum, ita quoque *peripheria circularis per illa duci poterit*. (Fig. 14).

Duc reƈam ab M ad N; & alteram ab N ad R. Lineam MN perpendiculari *a*C bifariam ſeca (321): alia perpendiculari *b*C lineam quoque N R bifariam ſeca. Lineæ hæ duæ convergentes ſeſe in aliquo punƈo C ſecabunt. *Punƈum hoc interſeƈionis erit centrum circuli, cujus peripheria per tria data punƈa tranſibit*.

Hoc ex duobus præcedentibus problematibus evidenter ſequitur. Linea hanc peripheriam deſcribens erit duƈa a punƈo C ad unum ex tribus datis.

Sæpius habetur circuli peripheria, nec habetur centrum. Sequens problema illud invenire docebit.

P R O B L E M A III.

326. *Peripheria, aut arcus dati centrum invenire*. (Fig. 17).

SOLUTIO. In data peripheria, aut arcu cape punƈa tria quæcumque A, B, C. Per præcedens problema quære centrum circuli, cujus peripheria tranſeat per tria punƈa A, B, C. Erit R centrum circuli quæſiti; ut conſtat ex præcedente problemate.

ARTICULUS II.

LINEARUM POSITIO RESPECTIVA.

317. OBSERVATIO. Duæ rectę invicem comparatæ eſſe poſſunt aut *parallelæ*, aut *perpendiculares*, aut *obliquæ*. Conſideratæ reſpectu circuli nonnullæ ſunt *tangentes*, nonnullæ *ſecantes*. De his ſequentibus definitionibus.

DEFINITIONES.

328. DEFINITIO I. *Lineæ parallelæ* dicuntur duæ rectæ æque diſtantes invicem in omnibus punctis correſpondentibus; ſeu duæ rectæ, quæ in eodem plano in infinitum productæ nunquam concurrunt. H *h*, D *d*, N *n* ſunt tres parallelæ. (Fig. 28).

329. DEFINITIO II. *Perpendicularis* dicitur linea recta, quæ in alteram incurrens in neutram partem inclinat (324). Linea C D eſt lineæ A B perpendicularis. (*Fig.* 24).

330. DEFINITIO III. *Obliqua* dicitur linea recta, quæ in alteram incurrens magis in unam, quam in alteram partem inclinat. Recta C A, vel C N eſt rectæ A B obliqua. (*Fig.* 24).

331. DEFINITIO IV. *Tangens* dicitur recta peripheriam tangens, & quæ ultra punctum contactus producta peripheriam non ſecaret. Linea B A eſt tangens in A. (*Fig.* 37).

DEFINITIO V. *Secans* dicitur recta a puncto extra peripheriam in circulum ducta; aut a puncto intra circulum ultra peripheriam. Linea N *n* eſt ſecans (*Fig.* 28): C N A eſt altera ſecans. (*Fig.* 38).

333.

333. NOTA. Lineæ concurrentes angulos efficiunt, quos noſcere, & metiri oportet. Ad hoc angulos aut ad centrum, aut ad peripheriam circuli ſitos conſiderare oportet. De his utroque ſequenti paragrapho, unde articuli partitio.

PARAGRAPHUS PRIMUS.

ANGULUS AD CENTRUM CIRCULI.

334. HYPOTHESIS. Si radius CA immobilis ad punctum C deſcribat peripheriam extremitate ſua A, & ubique in revolutione lineas deſignet AC, BC, DE, FC; binæ ex his lineis *ſpatium* intercipient, hiatum relinquent, erunt invicem *inclinatæ*, atque hæc inclinatio comparari poterit. Hinc ſequentes definitiones, & obſervationes.

DEFINITIONES.

335. DEFINITIO I. *Spatium*, *hiatus*, *inclinatio* hæc radiorum, ſeu linearum AC, & BC dicitur *angulus*. Radii AC, BC vocantur anguli *latera*. Punctum C, ad quod concurrunt, dicitur anguli *vertex*. Arcus AB lateribus comprehenſus, & a vertice C tamquam centro deſcriptus vocatur anguli *menſura*. (*Fig.* 18).

Quum angulus eſt ſolitarius (*Fig.* 21), unica litera A, vel *a* ad verticem poſita indicatur. Quum ſolitarius non eſt, tribus literis indicatur, quarum media ad verticem ſtatuitur. (*Fig.* 15).

I. Angulus ACG, vel BCH, cujus menſura

ſura ſit quarta pars peripheriæ vocatur *angulus rectus*. Valet gradus 90.

II. Angulus A C E, vel E C G, cujus menſura eſt arcus quadrante minor, vocatur *angulus acutus*. Valet infra gradus 90.

III. Angulus A C F, vel E C B, cujus menſura eſt arcus quadrante major, vocatur *angulus obtuſus*. Valet ultra gradus 90.

336. COROLLARIUM. *Anguli ad centrum menſura eſt arcus lateribus interceptus. Fig.* 18.

DEMONSTRATIO. Angulus ad centrum circuli generatur revolutione radii C A circa centrum C; quare patet, angulum quemvis A C B eo magis dilatari, quo majorem arcum A B radii extremitas A deſcribit; & ut angulus hic gradu uno augeatur, aut minuatur, debet radii genitoris extremitas B uno gradu progredi, aut regredi in peripheria; ſi dimidia ſui parte minuatur angulus quivis B C D, debet abſcindi dimidium ſui arcus B D; atque ita porro.

Hinc patet, *ad angulum dimetiendum ſupponi debere illum in circuli centro ſitum*, ſeu angulo in circuli centro ſito eſſe comparandum. Exempli cauſa, ut menſuretur angulus C A B (*fig.* 21), a vertice A quovis radio peripheria, ſive arcus B C eſt deſcribendus; & quota peripheriæ pars ſit hic arcus perpendendum. Quum peripheria in partes 360 æquales diviſa ſupponatur, ſi harum arcus B C duodecim continet cum dimidia; erit B A C angulus graduum 12, & minutorum 30. Anguli omnes aut recti ſunt aut acuti, aut obtuſi (*fig.* 15, & 18).

I. *Omnes anguli recti ſunt æquales*; omnium enim menſura ſunt 90 gradus, ſeu quarta pars peripheriæ.

II. *Anguli obtuſi omnes non ſunt æquales*. Angulus obtuſus graduum 179 major erit obtuſo graduum 91.

III. *Nec anguli acuti ſunt omnes æquales*. An-

Angulus acutus graduum 89 major erit acuto graduum 2.

IV. *Duo anguli æquales, quorum vertex ſit ad centrum circuli, inſiſtunt arcubus æqualibus*: anguli enim, exempli gratia, BCF, & ACE (*fig.* 30) æquales ex hypotheſi eundem hiatum habent, qui ad extrema laterum, ſeu radiorum, quibus efficitur, dimenſus menſuram habent chordas æquales (305); atque hæ ſubtendunt arcus æquales (319).

Quum de angulis agitur obtuſis, & acutis, angulorum, & arcuum complementa recenſentur, quæ noſcere oportet (*fig.* 19).

337. DEFINITIO II. *Complementum anguli acuti* eſt quod angulo addendum eſt, ut ſumma ſit recto æqualis. *Complementum anguli obtuſi* eſt quod ab illo demendum eſt, ut recto æqualis fiat. Angulus CBE eſt complementum anguli acuti ABE. Angulus CBE eſt complementum anguli obtuſi DBE.

338. DEFINITIO III. *Supplementum anguli* eſt quod illi addendum eſt, ut ſumma duobus rectis æqualis ſit. Angulus EBA eſt ſupplementum anguli DBE. Angulus DBE eſt ſupplementum anguli EBA (*fig.* 19).

339. NOTA. Idem dicas de arcubus. Arcus ſpectantis ad angulum acutum *complementum* eſt quod addendum eſt, ut quartæ peripheriæ parti æqualis fiat. Complementum arcus anguli obtuſi eſt quod ſubducendum eſt, ut quartam tantum peripheriæ partem complectatur. Ita *ſupplementum* arcus eſt quod illi addendum eſt, ut ſemiperipheriæ æqualis ſit. Arcus AE eſt complementum arcus CE, ſupplementum arcus DCE.

THEOREMA.

340. *Arcus peripheriarum concentricarum inter eoſdem radios comprehenſi ſimiles ſunt, &* æqua-

æqualem partium ſimilium peripheriæ numerum continent (*fig.* 18).

DEMONSTRATIO. Sequitur hoc ex hypotheſi præcedente (334).; dum enim radius C A in ſua revolutione deſcribit puncto A arcum A B, intelligimus, eundem radium puncto *a* deſcripturum arcum *a b*.

Patet igitur puncta A, & *a* ejuſdem radii eaſdem in concentricis peripheriis, quas deſcribunt, diviſiones efficere. Ergo arcus A B, & *a b* iiſdem radiis intercepti eundem peripheriæ partium ſimilium numerum continent, ſeu graduum, minutorum, & ſecundorum peripheriæ. Ergo radius major C A in ſua revolutione partes deſignat peripheriæ tertias, quartas, centeſimas, dum quoque radius minor C *a* in eadem ſuæ revolutionis parte deſignat ſuæ peripheriæ partes tertias, quartas, centeſimas. Q. E. D.

341. COROLLARIUM. *Ergo quilibet ex his arcubus ſimilibus A B, vel a b ſumi poteſt tamquam menſura anguli A B C.*

DEMONSTRATIO. Quum uterque arcus eundem graduum, minutorum, ſecundorum numerum contineat, & partium ſimilium, uterque aptus eſt metiri linearum C A, C B hiatum, ſeu inclinationem, quæ inclinatio eadem eſt in tota linearum longitudine. Ergo ad dimetiendum angulum A C B æque ſumi poteſt arcus A B, ac *a b*.

Major peripheria majores gradus habet, minor minores; utraque tamen eundem graduum numerum habet. Ita duo globi inæquales eundem habent numerum partium tertiarum, quartarum, centeſimarum, milleſimarum; at unius tertiæ majores ſunt tertiis alterius; atque idem dicas de ceteris earum partibus ſimilibus. Q. E. D.

PER-

PERPENDICULARES, ET OBLIQUÆ.

THEOREMA I.

342 *Recta ſuper rectam cadens angulos facit duobus rectis æquales* (*fig.* 20).

DEMONSTRATIO. Cadat recta A C ſuper rectam D E. Duorum angulorum, quos facit, menſura eſt ſemiperipheria, & duobus rectis æquales ſunt. Si enim centro C deſcribatur ſemiperipheria, recta D E, in qua centrum eſt, erit ejus diameter; adeoque peripheriam bifariam ſecabit (317). Aſt arcus A D eſt menſura anguli A C D; & arcus A E anguli ACE; ergo duo hi anguli ſimul æquales ſunt duobus rectis; ſemiperipheriam enim complectuntur. Quare (*fig.* 19):

I. *Perpendicularis ſupra rectam cadens facit duos angulos rectos*. Anguli enim C B D, CBA quos facit, ſimul ſumpti erunt duobus rectis æquales; & perpendicularis C B quum in neutram partem inclinet, angulos facit inter ſe æquales.

II. *Nequit linea lineæ perpendicularis eſſe, quin hæc quoque illi perpendicularis ſit*. Si recta AB lineæ C D perpendicularis eſt, linea quoque C D eſt ipſi A B perpendicularis (*fig.* 24) Q. E. D.

THEOREMA II.

343. *Anguli ad verticem oppoſiti ſunt æquales* (*fig.* 20).

DEMONSTRATIO. A puncto interſectionis linearum angulos efficientium deſcribe ſemiperipheriam: hæc bifariam ſecabitur a lineis A B, D E; ſunt enim ejus diametri.

I. Angulus A C E acutus angulo E C B valet duos rectos; ſimul enim capiunt ſemicirculum.

II. An-

II. Angulus DCB acutus eodem angulo EC B valet quoque duos rectos; ſimul enim capiunt quoque ſemicirculum.

III. Si modo ab his ſemicirculis æqualibus demas partem communem, angulum ſcilicet E CB, ab æqualibus æqualia demis; reſidua ergo ſunt æqualia; atqui hæc ſunt anguli ACE, & DCB ad verticem oppoſiti; ergo anguli ad verticem oppoſiti ſunt æquales.

IV. Eodem modo oſtendam, angulos ACD, ECB ad verticem oppoſitos eſſe æquales; ergo ſemper anguli ad verticem oppoſiti ſunt æquales. Q. E. D.

PROBLEMA I.

344. Ad datam rectam *ab* angulum deſcribere æqualem dato CAB (*fig.* 21).

SOLUTIO. A vertice dati anguli CAB deſcribe inter ejus latera arcum CB. Ab extremitate *a* datæ rectæ, & eodem intervallo deſcribe arcum indefinitum *b*D; ex quo cape partem *bc* æqualem arcui BC. A puncto *a* ad *c* duc rectam: efficiet angulum *cab* æqualem dato CAB.

Duo hi anguli ſunt æquales; eorum enim menſura ſunt arcus æquales BC, *bc*; & angulorum quantitas deſumitur ab arcubus laterum inclinationem in eodem circulo, vel in circulis æqualibus dimetientibus. Q. E. D.

345. NOTA. Geometræ ſemicirculo corneo diaphano utuntur in gradus, & ſemigradus accurate diviſo, qui in mathematicis pyxidibus poni ſolet, ad angulos capiendos, & a graphometro in chartam transferendos. En hujus inſtrumenti uſum ad angulos in charta deſcribendos angulis datis, aut inventis æquales (*fig.* 9).

I. In charta, aut in plano quovis PPP, ducitur linea indefinita AB; & in puncto quovis C hujus lineæ, quod ut vertex anguli ſumitur,

mitur, ponitur centrum ſemicirculi A D B, cujus ſectio debet ſuperponi lineæ ductę indefinitę.

II. In hac ſemiperipheria capitur arcus æqualis arcui anguli dati, & in ſubjecta charta notatur punctum *m* aut *n* ope ſemiperipheriæ, quod arcum terminat dato arcui æqualem.

III. Tandem a puncto C lineæ tanquam centro ducitur recta ad inventum *m* aut *n* ope quadrantis, & tunc habetur angulus *m* C B dato angulo æqualis: habent enim duo hi anguli menſuram arcus æquales.

P R O B L E M A II.

346. *Datum angulum biſariam ſecare* (*fig.*22).

SOLUTIO. A puncto A tamquam centro deſcribe arcum BC. Deinde centris B, & C eodem intervallo deſcribe arcus ſe ſecantes in D; a puncto A ad D duc rectam: hæc datum angulum biſariam ſecabit. Linea enim A D ſingula ſua puncta ſolitaria habet æquediſtantia a punctis B, & C (320); ergo punctum N hujus lineæ per arcum ſectum tranſeuntis æque diſtat a punctis C, & B; ergo arcus ab hac linea biſecatur; ergo angulus B A C, cujus arcus hic eſt menſura æque biſectus eſt.

T H E O R E M A III.

347. *A puncto ad datam lineam unica perpendicularis duci poteſt* (*fig.*25).

DEMONSTRATIO. Sit recta D C rectæ A B perpendicularis. Si a puncto D altera ipſi A B perpendicularis duci poſſet, ad alterutrum latus caderet perpendicularis D C: tunc ſupra A B caderet ad alterutram partem inclinata, neque cum hac efficeret duos angulos rectos; quod contra perpendicularis naturam eſt (329 & 342). Ergo ab eodem puncto ad lineam datam unica perpendicularis duci poteſt, Q. E. D.

THE-

THEOREMA IV.

348. *Perpendicularis minor eſt obliqua ab eodem puncto ad eandem rectam ducta (fig. 24).*

DEMONSTRATIO. Sit recta CD rectæ AB perpendicularis. Dico, CD breviorem eſſe, quam CB. Producatur enim perpendicularis in H, ita ut HD ſit ipſi CD æqualis; & ducatur obliqua HB alteri obliquæ CB æqualis. Jam vero recta CDH minor eſt linea angulari CBH (305); ergo dimidia recta brevior eſt dimidia angulari; ergo perpendicularis brevior obliqua. Quod de obliqua CB de alia quavis CN magis, minuſve a perpendiculari diſtante dici poteſt. Q. E. D.

349. COROLLARIUM I. *Perpendicularis omnium breviſſima eſt, quæ a dato puncto ad datam rectam productam, ſi opus ſit, duci poſſit.* Omnibus enim obliquis brevior eſt.

350. COROLLARIUM II. *Omnium obliquarum ab eodem puncto ad eandem rectam ductarum maxima eſt maxime a perpendiculari remota.* Obliqua CA major eſt, quam obliqua CN (*fig.* 24).

351. DEFINITIO. *Diſtantia a perpendiculo* dicitur pars DN, vel DA, vel DB lineæ inter perpendicularem CD, & obliquam intercepta.

352. COROLLARIUM III. *Si duæ obliquæ AC, CB ab eodem puncto C ductæ a perpendiculo æque diſtant; æque ad rectam AB ſunt inclinatæ; & ſi ſunt huic æque inclinatæ, æque diſtant a perpendiculo.*

Patet ſuperpoſitione. Lineam enim BD ſupra DA inverte. Si BD=DA; punctum B cadet ſupra punctum A: puncta omnia lineæ angularis DBC cadent ſupra correſpondentia puncta lineæ angularis DAC.

THE-

THEOREMA V.

353 *Recta rectæ perpendicularis eſt, quum duo quævis puncta primæ ſingula a duobus quibuſque alterius punctis æque diſtant (fig. 24).*

DEMONSTRATIO I. Si recta CD duo habet puncta quævis C, & D ſingula ab A, & B æque diſtantia, patet, puncta C, & D non magis inclinari ad A, quam ad B. Quum vero duo puncta ſatis ſint ad rectæ poſitionem definiendam (306), tota recta CDH infinite producta non magis in A, quam in B inclinatur. Quare ſi recta CD in infinitum produceretur, tranſiret per omnia puncta ab A, & B æque diſtantia (320).

II. Obliqua quævis CB nunquam duo puncta a duobus quibuſque punctis lineæ AB æque diſtantia habere poteſt. Patet enim vel ipſa figuræ inſpectione, ſi in linea CB punctum C æque diſtat ab A, & B, puncta ſequentia *m* æque diſtare non poſſe. Ergo recta, cujus duo puncta ſingula a duobus alterius lineæ punctis æque diſtantia ſint, non eſt obliqua. Ergo perpendicularis. Q. E. D.

PROBLEMA III.

354. *Ad datum in recta punctum quodvis C huic rectæ perpendicularem ſtatuere (fig. 25).*

SOLUTIO. Centro C ſemiperipheriam deſcribe rectam AB ſecantem in punctis E, & F. His tamquam centris eodem intervallo arcus deſcribe ſe ſecantes in D. Duc rectam per datum punctum C, & per punctum interſectionis D tranſeuntem. Erit hæc perpendicularis quæſita.

Recta DC duo habet puncta C, & D a punctis lineæ datæ E, & F æque diſtantia. Ergo cetera omnia puncta rectæ DC ab iiſdem li-

neæ

neæ datæ punctis E, & F æque diſtant (320); ergo recta C D eſt datæ A B perpendicularis (353).

PROBLEMA IV.

355. *A puncto C extra datam lineam dato huic perpendicularem ducere* (*fig.* 26).

SOLUTIO. Centro C arcum deſcribe datam rectam in duobus quibuſque punctis E, & F ſecantem. Centris E, & F eodem intervallo duos arcus deſcribe ſe ſecantes in aliquo puncto D. Duc rectam DC per datum punctum C, & per arcuum interſectionem tranſeuntem. Erit hæc perpendicularis quæſita; duo enim habet puncta a lineæ datæ punctis E, & F æquæ diſtantia (353).

Si recta data N E brevis ita eſſet, ut ab arcu deſcribendo in duobus punctis ſecari non poſſet, quantum ſatis producenda eſt.

LINEÆ PARALLELÆ.

356. AXIOMA. *Si alterutri ex duabus parallelis tertia recta parallela ſit, erit & alteri parallela*. Tertia hæc enim N *n* nequit ab alterutra parallelarum H *h*, D *d* æque diſtare, quin & ab altera æque diſtet (*fig.* 28).

357. NOTA *Secantem* hic appellabimus rectam ſeu perpendicularem, ſeu obliquam, quæ parallelas ſecet. E F ſecans eſt (*fig.* 27).

Plures angulos adnotandos ſecans efficit cum parallelis. Alii inter parallelas ſunt, & *interni* dicuntur, ut A, B, C, D; alii extra parallelas, & dicuntur *externi*, ut G, H ſupra, O, P infra parallelas.

Anguli hi interni, & externi bini, & bini comparati alii *alterni* dicuntur, quorum ſcilicet alter ſupra, alter infra eſt; alter ſecanti dexter, alter ſiniſter. Anguli A, D *alterni inter-*

terni ſunt, ut & B, C. Anguli H, O ſunt *alterni externi*, ut & duo G, P.

THEOREMA I.

358. Anguli a duabus parallelis effecti, alter internus, alter externus ad eaſdem ſecantis partes, & ambo aut ſupra, aut infra parallelas, ſunt æquales (*fig.* 27).

DEMONSTRATIO I. Angulorum quantitas ab hiatu pendet, & hic a laterum inclinatione. At lineæ IL, MN ad eaſdem partes eandem habent ad ſecantem EF inclinationem, ſunt enim parallelæ; ergo harum linearum hiatus, & inclinatio in H, & in D; in G, & in C; in B, & in P; in A, & in O æqualis eſt. At hi hiatus ſunt anguli in theoremate enunciati; ergo ſunt æquales.

II. Poteſt etiam *ſuperpoſitione* demonſtrari (10). Concipe lineam MN ſemper ſibi parallelam excurrere per ſecantem donec tota parallelæ IL congruat. Tunc angulus D cadet ſupra angulum H; P ſupra B; C ſupra G; O ſupra A, & congruent. Ergo anguli hi ante ſuperpoſitionem ſunt reſpective æquales; hæc enim linearum, quibus efficiuntur, inclinationem non mutat. Q. E. D.

THEOREMA II.

359. *Si recta duas parallelas ſecet*: 1. *Anguli alterni interni ſunt æquales*. 2. *Anguli alterni externi ſunt æquales*. 3. *Duo interni ad eaſdem ſecantis partes ſimul ſumpti valent duos rectos* (*fig.* 27).

DEMONSTRATIO. Parallelas IL, MN ſecet recta EF.

I. Anguli *alterni interni* A, D ſunt æquales. Angulus enim A eſt angulo H æqualis; ſunt quippe ad verticem oppoſiti (343). Angulus D eſt quoque angulo H æqualis; eundem enim hiatum habent [ex eadem ad ſecan-

cantem parallelarum inclinatione (358). Eodem modo oſtendam duos alternos internos B, C eſſe æquales; uterque enim angulo G æqualis eſt.

II. Anguli *externi* G, P ſunt æquales. Nam angulus G eſt æqualis angulo B; ſunt enim ad verticem oppoſiti. Angulus P eſt quoque angulo B æqualis; ab eadem enim parallelarum ad ſecantem inclinatione fiunt. Eodem modo oſtendam, duos alternos externos H, O eſſe æquales; uterque enim eſt angulo A æqualis.

III. Duo *anguli interni* B, & D ad eaſdem ſecantis partes valent ſimul duos rectos. Duo enim anguli ad latera H, B ſimul ſumpti valent duos rectos (342): ergo quum angulus D ſit ipſi H æqualis, etiam duo B, & D valebunt duos rectos. Eodem modo oſtendam, duos internos A, C valere ſimul duos rectos; duo enim G, A valent duos rectos. Q. E. D.

THEOREMA III.

360. *Si anguli alterni ſunt æquales, duæ rectæ ſunt parallelæ* (*fig* 27).

DEMONSTRATIO. Sit angulus A æqualis angulo D ex hypotheſi. Oſtendo, duas rectas IL, MN eſſe parallelas. Angulus A eſt æqualis angulo H; ſunt enim ad verticem oppoſiti. Angulus H, & angulus D ſunt æquales; uterque enim tertio, nempe ipſi A eſt æqualis.

At anguli D, & H æquales eſſe nequeunt, quin rectæ IL, MN parallelæ; ſi enim altera ſecanti inclinata eſſet, anguli D, & H, quos cum ſecante efficiunt punctum E verſus, inæquales eſſent. At demonſtratum eſt, illos æquales eſſe; ergo rectæ IL, MN æqualiter ſecanti inclinatæ ſunt; ergo parallelæ. Q.E.D.

361. NOTA. Æque oſtendi poſſet, *ſi anguli alterni ſunt æquales ſeu ſi interni ad eaſdem ſecantis partes valent duos rectos, lineas*

eſſe

eſſe parallelas. Eadem eſt demonſtratio cum præcedente.

THEOREMA IV.

362. *Quum duæ, aut plures parallelæ peripheriam ſecant, aut tangunt, arcus parallelis utrinque intercepti ſunt æquales* (*fig.* 28).

DEMONSTRATIO. Quum parallelæ ubique æqualiter inter ſe diſtent, arcus hic illis interceptus arcui illic intercepto æqualis eſſe debet. A centro enim circuli duc ad parallelas perpendicularem AB per centrum tranſeuntem; deinde partem parallelarum inverte ſupra ſiniſtram perpendiculari. Arcus AD, & DN dexteri congruent ſiniſtris A*d*, *dn*. Ergo AD$=$A*d*, & DN$=$D*n*, & NB$=$N*b*; atque ita de reliquis. Q. E. D.

PROBLEMA.

363. *Per datum punctum C datæ AB parallelam ducere* (*fig.* 29).

SOLUTIO. Centro C, quovis intervallo, duc arcum indefinitum BD. Centro B, eodem intervallo deſcribe alterum arcum AC. In primo arcu accipe circino partem BD$=$AC. Duc rectam CD per puncta C, D tranſeuntem. Erit hæc ipſi AB parallela.

Ducta enim recta CB, erunt anguli alterni ABC, BCD æquales; eorum enim menſura ſunt arcus æquales AC, BD. At quum anguli alterni interni æquales ſunt duæ lineæ ſunt parallelæ (360): ergo rectæ AB, CD ſunt parallelæ. Q. E. D.

364. NOTA. *Norma* inſtrumentum eſt ex pyxide mathematica duabus regulis conſtans invicem perpendicularibus. Hoc inſtrumento ABC ducuntur datæ lineæ tum parallelæ, tum perpendiculares (*fig.* 8).

I. *Ut linea data perpendicularis ope norma ducatur*, alteram ex normæ regulis applica datæ B N ita, ut altera regula punctum A, unde perpendicularis ducenda, attingat. Deinde duc B M iuxta regulam AB alteri perpendicularem: erit hæc perpendicularis quæſita, quæ duos rectos cum data B N efficiet.

II. *Ut data recta parallela ducatur*, datæ B N duc perpendicularem ut ſupra. Alteram ſtatue juxta hanc perpendicularem B M. Duc rectam in directione A O alterius regulæ datæ rectæ parallelæ. Recta A O erit parallela quæſita; duæ enim rectæ AO, & BN cum communi perpendiculari A B efficiunt duos rectos.

§. II.

ANGULUS AD PERIPHERIAM.

365. DEFINITIO. Angulus cujus vertex ad centrum peripheriç eſt, & qui a duobus circuli radiis efficitur, vocatur *angulus ad centrum*. Ejus menſura eſt arcus lateribus comprehenſus (336).

Angulus, cujus vertex eſt ad peripheriam, & cujus latera ſunt duæ chordæ, vocatur *angulus inſcriptus*, ſive *angulus ſegmenti*. Hunc dimetiamur.

THEOREMA.

366. Anguli inſcripti, cujus vertex eſt ad peripheriam circuli, & cujus latera ſunt duæ chordæ, menſura eſt arcus lateribus interceptus.

DEMONSTRATIO. Poteſt alterum anguli latus per centrum tranſire, aut centrum lateribus intercipi, aut centrum eſſe extra latera.

Sem-

ſemper anguli inſcripti arcus lateribus interceptus menſura eſt (*fig.* 30).

I. *Si latus AB anguli inſcripti BAD per centrum C tranſeat*; per centrum duc rectam EF lateri AD parallelam (363). Erunt anguli BCF, BAD æquales, quum rectæ EF, AD ſint parallelæ; & hi anguli ſint alter externus, alter internus ad eaſdem partes ſecantis (358). Atqui quum angulus BCF verticem habeat ad centrum, ejus menſura eſt arcus BF lateribus interceptus (336); ergo anguli quoque BAD illi æqualis menſura erit idem arcus BF.

Aſt arcus BF eſt dimidius arcus BFD. Arcus enim BF eſt æqualis arcui AE; ſunt enim hi arcus duorum æqualium angulorum BCF, ACE menſura, quum ſint ad verticem oppoſiti (336). Arcus quoque DF eſt eidem AE æqualis; duabus enim parallelis EF, AD continentur (362). Ergo arcus BF, DF ſunt æquales; ergo ſinguli ſunt dimidium totius arcus BFD. At oſtendimus, arcum BF eſſe menſuram anguli BAD; ergo anguli BAD menſura eſt dimidius arcus, cui inſiſtit. Ergo BAD=CAd=BCF.

II. (*fig.* 31) *Si centrum cadat inter latera anguli* BAD; a vertice A duc rectam AF per centrum C tranſeuntem; hæc dividet angulum BAD in duos BAF, FAD. Horum primi menſura eſt dimidius arcus BF propter latus AF per centrum tranſiens; ut demonſtratum eſt ſupra. Eadem ratione alter angulus FAD menſuram habet dimidium arcum FD; ergo totius anguli BAD menſura eſt dimidius BF, & dimidius FD; nempe dimidius arcus BD lateribus incluſus.

III. (*fig.* 32) *Si centrum cadit extra latera*; duc a vertice rectam AF per centrum tranſeuntem. Hæc efficiet angulum DAF, cujus menſura eſt dimidius arcus FD, ſeu dimidius FB cum dimidio BD, ut in primo caſu. Aſt

angulus F A B, qui eſt pars totius D A F, menſuram habet dimidium arcum FB, propter latus A F per centrum tranſiens. Ergo angulus B A D, qui eſt altera pars anguli totius, menſuram habet dimidium B D; ceterum totius anguli D A F menſura non eſſet dimidius arcus F B cum dimidio B D. Ergo ſemper anguli inſcripti menſura eſt dimidius arcus lateribus incluſus. Q. E. D.

COROLLARIA.

367. COROLLARIUM I. *Angulus ad centrum eidem arcui cum inſcripto inſiſtens hujus duplus eſt* (*fig.* 33).

DEMONSTRATIO. Patet ex ipſa figura, angulum C multo majorem eſſe angulo A; primus enim majorem altero hiatum habet. Angulus B C D duplus eſt anguli B A D; anguli enim ad centrum menſura eſt arcus totus B D, cui inſiſtit; anguli vero inſcripti menſura eſt arcus hic dimidius. Q. E. D.

368. COROLLARIUM II. *Angulus inſcriptus diametro inſiſtens rectus eſt.*

DEMONSTRATIO. Angulus inſcriptus B A D diametro inſiſtere nequit, quin & ſemiperipheriæ inſiſtat. At inſcriptus ſemiperipheriæ inſiſtens rectus eſt; ejus enim menſura eſt quadrans peripheriæ. Q. E. D.

369. COROLLARIUM III. *Angulus inſcriptus B A E arcui majori ſemiperipheria inſiſtens obtuſus eſt; inſiſtens B A F arcui minori ſemiperipheria eſt acutus.* Hæc ex demonſtratis evidenter ſequuntur (*fig.* 35).

TANGENS CIRCULUM.

370. HYPOTHESIS. Chorda AB ſemper radio C D perpendicularis ſibi parallela deſcendat ad extremitatem D radii, & fiat FE. Erit hæc

tan-

tangens DE, vel DF, vel FDE, &c. Idem erit ſi tangens ad extremitatem cujuſque alterius radii ſita ſit (*fig.* 36).

COROLLARIA.

371. COROLLARIUM I. *Tangens extremitati radii perpendicularis eſt*; in neutram enim radii partem inclinat.

372. COROLLARIUM II. *Tangens in unico puncto circulum tangit* (*fig.* 36).

DEMONSTRATIO. A centro C ducantur rectæ C*a*, C*b*. Erunt hæ tangenti FE obliquæ. Erunt ergo majores radio, qui eſt tangenti perpendicularis (348). Ergo habent extremitates *b*, & *a* extra circulum; quum radio majores ſint, qui ad peripheriam terminatur, & earum pars eſt. Ergo tangens extrema obliquarum C*a*, C*b* peripheriam non tangit, quæ, quantumvis illæ radio proximæ ſupponantur, extra harum extremitatem ſita eſt.

Idem dices de quovis alio peripheriæ puncto ipſi D proximiore. Ergo tangens in unico puncto D, adeoque in puncto tantum peripheriam tangit. Q. E. D.

373. COROLLARIUM III. *Sphæra planum in unico puncto tangit* (*fig.* 86).

DEMONSTRATIO. Quum tangens circulum in unico puncto tangat; ſi tangens RO rotetur circa axem PR ſemper tangens perſeverans, deſcribet planum OQR, cui inſiſtit circulus PARB. Si vero circulus hic circa ſuum axem PR rotetur ſemper plano perpendicularem; *ſphæram* deſcribet, quæ planum OQR in unico puncto tanget, nempe R; in quo circulus mobilis a tangente tangitur. Q. E. D.

374. COROLLARIUM IV. *Tangens circulum non ingreditur*; ex hypotheſi ſiquidem, & ex definitione (370) extremum radii punctum

tangit, nec circulum ingreditur, qui extremo radii puncto D terminatur (*fig.* 36).

375. COROLLARIUM V. *Inter circulum, & tangentem infinita curva tranſire poſſunt* (*fig.* 23).

DEMONSTRATIO I. Sit radius C D tangenti A B perpendicularis. Hæc circulum D M D in unico puncto D tangit. Spatium ergo inter tangentem, & aliud quodvis punctum circuli intercedit; puta inter tangentem, & puncta *a*, & *b*.

II. Si a puncto M radii D C producti radio M D deſcribatur novus circulus *m* D *m*; linea A B erit adhuc tangens hujus circuli, & illum tanget in unico puncto D. Erit ergo adhuc ſpatium inter tangentem A B, & aliud quodvis punctum a puncto D diverſum circuli *m* D *m*.

III. Si ab alio puncto N ejuſdem radii producti radio N D deſcribatur alius circulus *n* D *n*; linea A B erit adhuc tangens hujus circuli, nec illum tanget niſi in puncto D, quum ceteri omnes hujus circuli radii nimis breves ſint, ut ad tangentem pertingant.

IV. Si radius D C producatur in infinitum, & a quovis puncto lineæ D R infinite productæ radio ſemper ad D terminato deſcribatur circulus; quælibet peripheria *r* D *r* erit diverſa; diverſam quippe habebit curvaturam; & per diverſa ſpatii puncta tranſibit; punctum enim generans diverſam originem, diverſumque motum habebit; & tamen quævis peripheria inter tangentem A B, & circulum D M D tranſibit; omnium enim radius erit radius D C productus. Ergo infinitæ peripheriæ inter tangentem A B, & circulum D M D tranſibunt, nec ſe tangent niſi in ſibi communi puncto D, quum cetera puncta omnia *m*, *n*, *r* diverſa ſint. Ergo inter circulum, & ejus tangentem infinitæ curvæ tranſire poſſunt. Ergo inter circulum

lum, & tangentem infinita puncta ſunt, per quæ infinitæ hæ curvæ tranſire poſſunt. Q. E. D.

THEOREMA.

376. *Anguli a tangente, & chorda effecti menſura eſt dimidius arcus a chorda ſubtenſus* (*fig.* 37).

DEMONSTRATIO I. Sit angulus BAD. Duc rectam DE tangenti AB parallelam (363). Dico, anguli BAD menſuram eſſe dimidium arcum AFD.

Angulus BAD angulo ADE æqualis eſt; ſunt enim alterni interni inter parallelas AB, DE (358). Anguli ADE menſura eſt dimidius arcus EHA ejus lateribus incluſus; eſt enim angulus inſcriptus (366). Ergo anguli BAD æqualis angulo ADE eſt quoque menſura dimidius arcus EHA, ſeu dimidius arcus AFD illi æqualis; ambo enim parallelis continentur (362).

II. Si angulus a tangente, & chorda effectus eſſet BAG major recto; duc rectam AD. Anguli BAD menſura eſt dimidius arcus AFD, ut modo oſtendimus. Anguli DAG menſura eſt dimidius arcus DG; eſt enim angulus inſcriptus. Ergo totius BAG duabus ſuis partibus ſimul ſumptis æqualis menſura eſt dimidius arcus AFDG. Ergo anguli a tangente, & chorda effecti ſemper menſura eſt dimidius arcus ab hac chorda ſubtenſus. Q. E. D.

PROBLEMA I.

377. *A dato in peripheria puncto B tangentem ducere*. (*Fig.* 38).

SOLUTIO. Duc radium CB ad punctum B: huic ſtatue perpendicularem AB (354): erit hæc tangens ad punctum B (371).

PROBLEMA II.

378. *A dato extra peripheriam puncto A tangentem ducere.* (Fig. 38).

SOLUTIO. A puncto A ad centrum circuli duc rectam AC, quam biſeca in N. A puncto biſectionis N tamquam centro, & intervallo A N circulum deſcribe: hic alterum ſecabit in punctis B, & *b*. Si a puncto A ducatur recta A B ad alterutrum punctum interſectionis, erit hæc tangens quæſita.

Si enim ad punctum interſectionis ducatur radius C B, erit angulus A B C inſiſtens diametro A C circuli deſcripti, qui rectus eſt; eſt enim angulus inſcriptus diametro inſiſtens (368). Ergo recta A B eſt perpendicularis ad extremitatem radii C B; ergo tangens (371). Idem dicas de recta A *b*.

ARTICULUS III.

LINEARUM CONJUNCTIO IN FIGURAS.

379. DEFINITIO. Lineæ ſimul conjunctæ figuras efficiunt. *Figura* generatim dicitur ſpatium undequaque lineis rectis, aut curvis concluſum; ſeu linearum ſpatium terminantium collectio.

Figura tres ſaltem lineas rectas poſtulat, at infinitas habere poteſt. Triangulum tres habet lineas, quatuor quadrilaterum, quinque pentagonum, duodecim dodecagonum, plures polygonum in genere; circulus infinitas.

Inter figuras geometricas hic tantum *triangulum rectilineum* conſideramus; hoc enim tantum in longimetria indigemus. Hoc articulo de

de triangulorum rectilineorum natura, & æqualitate agemus.

TRIANGULORUM NATURA.

380. DEFINITIO I. Quodvis triangulum tres habet angulos, & tria latera; ex his triangulum innoteſcit. (*Fig.* 39, & 44)·

I. Unumquodvis trianguli latus vocatur *baſis trianguli*. In triangulo A B C tamquam baſim ſumere poſſumus tum latus A B, tum AC, tum B C; paſſim latus inferius A B ſumitur. Spatium tribus lateribus contentum dicitur *area trianguli*.

II. Perpendicularis a trianguli *vertice* in baſim, ſi opus eſt, productam ducta dicitur *trianguli altitudo*. Vertex anguli baſi oppoſiti dicitur *vertex trianguli*. Perpendicularis a puncto C in baſim A B ducta erit hujus trianguli altitudo. Si ſumatur tamquam baſis latus BC, perpendicularis a puncto A in latus BC ducta erit ipſa quoque trianguli altitudo.

Quum perpendicularis extra baſim cadit, baſis producitur donec perpendiculari occurrat. Exempli cauſa A D eſt altitudo trianguli ACB (*Fig*. 52).

III. Triangulum conſiderari poteſt tum in lateribus, tum in angulis. Hinc ſequentes definitiones.

381. DEFINITIO II. Si in lateribus triangulum conſideretur, triplex eſt. Vel enim tria latera ſunt æqualia, & vocatur *triangulum æquilaterum*; aut duo tantum æqualia ſunt, & & dicitur *iſoſceles*; vel omnia ſunt inæqualia, & dicitur *ſcalenum*.

382. DEFINITIO III. Si triangulum in angulis conſideretur, adhuc triplex eſt; *rectangulum*, quod angulum rectum habet; *obtuſangulum*, quod habet angulum obtuſum; *acutan-*

gulum, quod tres angulos habet acutos. (*Fig.* 16).

383. DEFINITIO IV. *Triangula ſimilia* vocantur, quorum anguli ſinguli ſingulis ſunt æquales. (*Fig.* 45).

Si in duobus triangulis ABC, *abc* angulus A = *a*, B = *b*, C = *c*, triangula ſunt ſimilia,

Si ex his angulis alter altero, puta, A ipſo *a*, major ſit, aut minor, triangula non ſunt ſimilia, nec invicem comparari poſſunt.

THEOREMA.

384. *Tres ſimul anguli cujuſcumque trianguli valent duos rectos; & eorum menſura eſt ſemiperipheria.* (Fig. 39).

DEMONSTRATIO I. Quum per tria quævis puncta peripheria duci poſſit (322); quodvis triangulum, ut ABC, circulo inſcriptum concipi poteſt. Tunc anguli A erit menſura dimidius arcus BC, anguli B dimidius CA; anguli C dimidius AB (366). At tres hi arcus ſunt tota peripheria; ergo eorum dimidia erunt ſemiperipheria; ergo tres ſimul anguli trianguli ſemiperipheriam menſuram habent. Ergo duobus rectis ſunt æquales. Q. E. D.

DEMONSTRATIO II. Per punctum C duc rectam DE baſi AB parallelam (Fig. 40). Duo anguli alterni *a*, & A a ſecante CA inter parallelas effecti erunt æquales: duo quoque alterni *b*, & B a ſecante CB effecti erunt æquales (358). Atqui tres ſimul *n*, *a*, *b* efficiunt duos rectos; complectuntur enim ſemiperipheriam. Ergo ſi duobus *a*, & *b* ſubſtituas duos æquales A, & B, tres ſimul anguli A, C, B æque duos rectos valebunt; etenim A = *a*, B = *b*, *n* = C. Valent hæ demonſtrationes in quovis triangulo. Q. E. D.

CO-

COROLLARIA.

385. COROLLARIUM I. *Angulus quivis externus trianguli valet duos internos ſibi oppoſitos. Exempli cauſa; angulus BCF valet duos ſimul B A C, A B C; ſeu d = a + b* (Fig. 42).

DEMONSTRATIO. Sit angulus quivis in triangulo externus BCF, BAN, CBM. A vertice anguli cujuſque ſuper latus productum circulum deſcribe. Angulus internus quivis *c* cum externo *d* valet duos rectos; eorum enim menſura eſt ſemiperipheria. Internus *c* cum duobus aliis internis *a*, & *b* valet quoque duos rectos ex præcedente theoremate. Dempto igitur utrinque angulo communi *c*, reſidua *d*, & *a* + *b* ſunt æqualia. Idem de quovis alio trianguli A B C angulo externo, & in quovis triangulo demonſtrari poteſt. Q. E. D.

386. NOTA. Hinc apparet, dimenſo angulo quovis interno trianguli haberi externi anguli menſuram, qui ſit angulus alterius trianguli, quod ſæpius efficere, aut effectum ſupponere opus eſt alteri proximum; & vice verſa noto angulo externo internum innoteſcere.

387. COROLLARIUM II. *In quovis triangulo notis duobus angulis tertius innoteſcit.* Hic enim eſt illorum ſupplementum ad duos rectos, qui 180 gradus efficiunt. Si igitur a gradibus 180 ſubducas ſummam duorum angulorum notorum, reſiduum anguli ignoti valor erit (*Fig.* 16).

Exempli cauſa: ſi anguli noti ſint alter graduum 25, minutorum 48, alter graduum 96, minutorum 26; eorum ſummam graduum 122 minutorum 14 ſubduco a gradibus 180.

Quum gradus 180 ſint gradus 179, minuta 60, hinc ſubduco angulorum notorum ſummam 122 + 14. Reſiduum 57 gradus, 46 minuta, eſt valor anguli quæſiti.

179 + 60	
122 + 14	
57 + 46	

388. COROLLARIUM III. *Triangulum unicum angulum rectum, aut obtuſum habere poteſt*. Suorum enim angulorum ſumma ſemper duobus rectis æqualis, duobus rectis major eſſe nequit. Si ergo angulus rectus ineſt, aut obtuſus reliqui neceſſario acuti ſunt (Fig. 16).

PROBLEMA II.

389. In quovis triangulo, quicumque ſint ejus anguli, & latera (*Fig.* 39, & 34);

I. *Si duo, vel omnia latera ſint æqualia, anguli his lateribus oppoſiti ſunt æquales*.

II. *Si anguli habeantur æquales, latera his angulis oppoſita ſunt æqualia*.

III. *Si tria latera ſint inæqualia, major angulus majori lateri opponitur, minor minori, medius medio*.

DEMONSTRATIO. Concipiatur triangulum circulo inſcriptum; quod ſemper eſſe poteſt, quum per tria quævis puncta peripheria duci poſſit (322). Jam tria latera trianguli erunt tres chordæ tres arcus ſubtendentes. Quum anguli inſcripti menſura ſit dimidius arcus, cui inſiſtit, erunt hi anguli æquales, vel inæquales pro æqualitate, aut inæqualitate chordarum arcus ſubtendentium (*fig.* 39).

Ergo I. Si latus AC eſt æquale lateri BC; *anguli B, & A erunt æquales;* eorum enim menſura ſunt dimidii arcus æquales, (366).

Ergo II. Si anguli A, & B ſunt æquales. *latera illis oppoſita erunt æqualia*; ſunt enim chordæ arcus æquales ſubtendentes, adeoque æquales (319).

Ergo III. (*fig.* 34.). Si angulus A maximus eſt, latus B D illi oppoſitum *maximum* eſt; eſt enim chorda maximum arcum ſubtendens.

Si angulus D minimus eſt, latus AB illi oppoſitum *minimum* erit; eſt enim chorda minimum arcum ſubtendens.

Si

Si angulus B magnitudine medius eſt; latus A D inter cetera *medium* erit; erit enim chorda arcum inter ceteros magnitudine medium ſubtendens. Q. E. D.

TRIANGULORUM ÆQUALITAS.

390 DEFINITIO. Duo triangula ſunt *in omnibus æqualia* quum tria unius latera, & tres anguli tribus alterius lateribus, & angulis æquantur ſinguli ſingulis (*fig.* 41).

I. Quum duo triangula omnibus lateribus, & angulis æqualia ſunt, ſi latera eorum omologa ſuperponantur, triangula omnino congruent.

II. In triangulis ſimilibus (383), æque ac in æqualibus anguli ſinguli ſingulis ſunt æquales; non item latera (Fig. 41, & 45).

III. In triangulis ſimilibus, aut æqualibus *latera omologa* dicuntur, quæ angulis æqualibus ſunt oppoſita. Exempli cauſa, ſi triangula ABC, *abc* æqualia ſunt, aut ſimilia, latera BC, *bc*, tum AC, *ac*, tum AB, *ab* ſunt omologa, nempe *ejuſdem denominationis*, ὁμός, *ſimilis*, & λόγος *ſermo*.

THEOREMA I.

391. *Si latus quodvis b c trianguli b c a æquale eſt lateri B C trianguli B C A, & duo anguli b, & c, ad primum latus æquales ſint angulis B, & C ad alterum latus, triangula in omnibus erunt æqualia* (*fig.* 41.),

DEMONSTRATIO. Concipe latus *bc* ſuperpoſitum lateri BC. Quum hæc latera ſint æqualia, punctum *b* cadet ſupra punctum B, & punctum *c* ſupra punctum C. Quoniam vero anguli *b*, & B ſunt æquales, latus *ba* cadet ſupra latus BA, & eadem ratione latus *ca* ſupra CA.

Qua-

Quare duo latera *ba*, *ca* ſibi occurrent in eodem puncto, in quo latera B A, C A; ergo triangula omnino congruent. Quare omnino lateribus, & angulis erunt æqualia. Q. E. D.

THEOREMA II.

392. *Si duo quævis latera ab, ac trianguli æqualia ſunt lateribus A B, A C alterius trianguli, & angulus a primis lateribus comprehenſus angulo A aliis lateribus comprehenſo æqualis ſit, duo triangula erunt æqualia* (*fig.* 46).

DEMONSTRATIO. Concipe latus *ab* primi trianguli ſuperpoſitum lateri A B alterius ita, ut punctum *a* cadat in punctum A, & *b* in B; propter angulos *a*, & A æquales latus *ac* cadet ſupra latus A C. Tunc punctum *c* cadet in punctum C; latera enim *ab*, & *ac* ſupponuntur æqualia lateribus A B, A C. Ergo & baſis *bc* congruet baſi BC, & tota triangula congruent; ergo in omnibus erunt æqualia. Q. E. D.

ARTICULUS IV.

RATIO LINEARUM.

393. OBSERVATIO. Lineæ aut quantitates ſunt, aut quantitates exprimunt rationem inter ſe dicentes, & geometrice proportionales. Quatuor autem lineæ proportionales ſunt quum prima eſt ad alteram, ut tertia ad quartam. Inter quatuor lineas proportio datur quum productum extremarum æquale eſt producto mediarum (172); quum vero quatuor lineæ proportionales ſunt, extremarum productum mediarum producto æquale eſt (177.

PA-

PARAGRAPHUS PRIMUS.

LINEÆ PROPORTIONALES.

394. LEMMA. Si duæ rectæ quævis E F, G H parallelis E G, F H incluſæ ab aliis quibuſque parallelis M N, *mn* ſecentur:

I. *Utraque in totidem partes ſecabitur.*

II. *Ambarum ſectiones ſimiles erunt* (*fig.* 43).

DEMONSTRATIO I. Quum ſpatium duabus parallelis E G, F H interceptum ſit ubique æquale, major parallelarum numerus ſecans ipſam G H duci nequit, quam qui ipſam E F ſecet; & idem numerus parallelarum minimæ latitudinis in omnibus æqualis ad omnia pertingens puncta lineæ E F ad omnia quoque lineæ GH puncta pertingeret; hæ ſiquidem totum ſpatium concludunt parallelis interceptum, quod ubique altitudine æquale plures parallelas alicubi, quam alibi continere nequit.

II. Si parallela *m n* ducatur, quæ ad dimidiam, aut quartam, aut milleſimam rectę EF partem pertingat, dimidia, aut quarta, aut milleſima ſpatii pars intercipietur parallelis EG, FH incluſi; linea enim E F totum hoc ſpatium amplectitur; & parallelæ MN, *m n* ubique æquale ſpatium intercipiunt. Si ergo aut dimidiam, aut quartam, aut milleſimam, aut aliam quamvis ſpatii partem intercipiam, dimidiam quoque, aut quartam, aut milleſimam, aut aliam quamvis ſimilem lineæ GH eodem ſpatio interceptæ, & ubique æqualiter inclinatæ partem intercepero. Q. E. D.

395. NOTA. Hinc apparet, *ſi linea* EF *dividitur diviſionibus æqualibus, puta partibus quatuor æqualibus; lineam quoque GH diviſum*

iri

iri in partes quatuor inter ſe æquales. Diviſiones lineæ GH ſingulæ ſingulis lineæ EF majores erunt; GH ſiquidem magis inclinata eſt, adeoque longior linea EF; at non plures in una, quam in altera diviſiones erunt.

THEOREMA.

396. *Quum duæ lineæ duabus parallelis interceptæ æque inclinatæ ſunt ac duæ aliæ duabus aliis parallelis interceptæ; duæ primæ aliis duabus ſunt proportionales* (fig. 43).

DEMONSTRATIO. Duæ rectæ AB, CD æque inclinatæ ſint inter ſuas parallelas, ac duæ EF, GH inter ſuas; ita ut AB, EF ſint æque inclinatæ; & CD, GH ſint quoque æque inclinatæ. Dico AB : EF :: CD : GH; & *alternando* AB : CD :: EF : GH.

I. Quam rationem inter ſe dicunt rectæ EF, GH, eandem inter ſe dicunt earum dimidia, tertiæ, quartæ, milleſimæ partes, omneſque ſimiles (163). Ergo partes ſimiles harum linearum ſunt duabus totis proportionales.

II. Atqui lineæ AB, CD ſunt æquales partibus ſimilibus linearum EF, GH. Superponatur enim linea AB lineæ EF, ita ut baſis BD cadat ſupra baſim FH, & parallela ſuperior AC producta rectam GH ſecet in aliquo puncto N: rectæ EF, GH ſemper ſecabuntur a recta AC in partes ſimiles, ſeu proportionales (395).

III. His poſitis dico: recta AB æqualis eſt parti rectæ EF, cui ſuperponeretur. Recta quoque CD æqualis erit parti NH ipſi correſpondenti; utraque enim æque inclinata iiſdem parallelis includitur: ergo rectæ AB, CD æquales ſunt partibus ſimilibus MF, NH rectarum EF, GH. Partes hæ ſimiles MF, NH totis EF, GH ſunt proportionales; ergo quoque AB, CD totis EF, GH ſunt proportionales.

Ergo

Ergo AB: CD:: EF: GH; & *alternando* AB: EF:: CD: GH. Ergo tribus ex his lineis notis quarta per regulam auream invenietur (177, & 180); quæcumque ſit utrobique parallelarum eas includentium diſtantia. Q. E.D.

397. NOTA I. Hinc apparet qua ratione demonſtrationes mathematicæ ſint œcumenicæ. Quum rectas CD, GH æque inclinatas invicem comparamus, concipimus, demonſtrationem æque ſtare, ſi prima CD 10 pollices, vel 100 hexapedas longa ſit, & altera GH 500 pollices, vel 1000 hexapedas, vel in immenſum longa ſit. Qui demonſtrationem mathematicam non niſi in figura oculis ſubjecta videt, matheſi æternum vale dicat.

II. Valet æque demonſtratio, ſive rectæ AB, EF ſuis parallelis perpendiculares ſint, ſive obliquæ, modo æqualiter ſint. Æque obliquæ ſunt, quum earum anguli omologi ſunt æquales, ſeu quum ABD = EFH; horum etiam angulorum æqualitas eandem illis lineæ BDFH inclinationem tribuit.

III. At ſemper duæ lineæ æque inclinatæ invicem comparandæ ſunt; ita ut una ſit primæ rationis antecedens, altera conſequens; & ut duæ aliæ quoque æqualiter inclinatæ ſint ſecundæ rationis una antecedens, altera conſequens. In theoremate lineam AB lineæ EF, non vero lineæ GH comparavimus.

Quum theorema hoc ſit univerſæ geometriæ baſis, ac fundamentum, alibi aliam ejus demonſtrationem trademus (495).

COROLLARIA.

398. COROLLARIUM I. *Si recta AB eſt rectæ EF dimidia, quarta, centeſima, milleſima pars, recta quoque CD erit rectæ GH pars dimidia, quarta, centeſima milleſima.* Idem dicas

dicas de alia quavis parte ſimili millies milleſima, millies millies milleſima, aliiſque.

399. COROLLARIUM II. *Productum linearum AB, GH æquale eſt producto linearum EF, CD*; duæ primæ ſiquidem extrema geometricæ proportionis, duæ aliæ media ſunt.

400. COROLLARIUM III. *Quum triangulum ſecat recta baſi parallela, latera ſecantur proportionaliter* (*fig.* 44).

DEMONSTRATIO. Sit triangulum ABC: duc DE baſi parallelam. Parallela DE tertiam, aut quartam, aut aliam quamvis partem ſecat ſpatii CP parallelis AB, FG incluſi: ergo æque tertiam, quartam, aut aliam quamvis ſimilem partem ſecat linearum CA, CB ſpatium hoc occupantium. Ergo

I. Habebimus CD: DA:: CE: EB; & *alternando* CD: CE :: DA: EB; Hoc eſt ſectio CD eſt ad ſectionem CE, ut ſectio DA ad ſectionem EB.

II. Quoniam CD: DA :: CE: EB; jam componendo (174) CD: CD+DA :: CE: CE+CB; & brevius CD:CA :: CE:CB, hoc eſt ſectio CD ad latus totum CA, ut ſectio CE ad latus totum CB. Aliam hujus corollarii alibi demonſtrationem tradėmus (496). Q. E. D.

§. II.

TRIANGULA SIMILIA.

401. OBSERVATIO. Duo triangula ſimilia ſunt quum utriuſque anguli omologi ſunt æquales, ita ut ſumpto alterutrius tranguli latere quovis *ab*, & omologo alterius lateri AB ſu-

ſuperpoſito angulus ſiniſter ſiniſtro, dexter dextero æqualis ſit (*fig.* 45).

Si duo triangula duos angulos duobus æquales habent, & tertius tertio æqualis erit; eſt enim utrobique ſupplementum ad duos rectos, ſeu quod utrinque deficit ad gradus 180 (387). Quare duo hæc triangula ſunt ſimilia.

THEOREMA I.

402. *Si duo inæqualia triangula angulos ad baſim ſingulos ſingulis æquales habent, ſimilia ſunt.* Tertius enim angulus ſupplementum ad duos rectos erit utrinque æqualis. Tunc vero ex definitione (383) duo triangula ſunt ſimilia quum tres unius anguli tribus alterius ſinguli ſingulis ſunt æquales. Q. E. D.

THEOREMA II.

403. *Quum duo triangula ſunt ſimilia, latera unius lateribus alterius omologis ſunt proportionalia* (*fig.* 45).

DEMONSTRATIO I. Sint ſimilia triangula *a b c*, A B C. Dico, latus *c a* eſſe ad latus C A, ut *a b* ad A B, ut *c b* ad C B; quod inter latera continuam proportionem efficit.

I. Sint latera *a b*, A B baſes. Per verticem utriuſque trianguli duc rectas *c m*, C M baſibus parallelas. Tunc latera *a c*, *b c* minoris trianguli erunt rectæ æque inclinatæ inter parallelas, ac ſint latera A C, B C majoris inter ſuas; angulorum enim quantitas linearum, quibus conſtant, inclinationem definit. Quare ex theoremate (396) habebimus *a c*: A C :: *b c*: B C.

II. Sint modo baſes latera *b c*, B C. Per verticem utriuſque trianguli duc rectas *a n*, A N baſibus parallelas. Erunt latera *a b*, *a c* mino-

ris

ris trianguli æque inclinata inter ſuas parallelas, ac ſint latera AB, AC majoris inter ſuas; ergo ex eodem theoremate; ab : AB :: ac: AC.

III. Sint tandem baſes latera ca, CA; & ductis per vertices b, B parallelis, eodem modo demonſtrabimus; ab: AB :: ac: BC.

IV. Nota, inter has proportiones ſemper rationem communem dari. Prima enim ratio primæ proportionis eſt ſecunda ſecundæ: & prima ſecundæ eſt prima tertiæ; ergo hæ rationes ſunt æquales (167).

Quare datur proportio continua ∺ ab.AB. bc.BC.ca. CA. Hoc eſt: tria latera minoris trianguli tribus lateribus omologis majoris ſunt proportionalia. Idem de duobus quibuſvis triangulis ſimilibus demonſtrari poteſt. Q. E. D.

404. NOTA. Ex hoc theoremate clariſſime triangulorum ſimilium rationes eluceſcunt, (*fig.* 45).

I. Supponatur primo baſis AB admodum extenſa, puta pollices 2000; ad ſingulos pollices duc mente parallelas lateri CB: hæ parallelæ 12, 24, 36, 48 ſingulæ latus CA in diverſis punctis ſecabunt. Ab his punctis ſingulis duc mente alias baſi AB parallelas: hæ 23, 46, 69, 812, latus AB in diverſis punctis 3, 6, 9, 12 ſecabunt.

II. Ponamus deinde in parvo triangulo baſim ab = 1 pollici, latus ca = 2 pollicibus, latus cb = 3 pollicibus. Parvum triangulum majori ſuperponatur ita ut punctum a cadat ſupra punctum A, & punctum b ſuper 1.

III. In hac hypotheſi, dum baſis ab pollicem occupabit in baſi AB, latus ca duos capiet in latere CA, & prima parallela baſi AB tres pollices in latere CB ſecabit.

Patet, quum baſis ab iterum baſi AB ſuperpoſita duos in hac pollices occupabit, parallelam 24 lateri CB quatuor pollices in latere CA ſecare, & parallelam baſi ab hoc

quar-

quarto pollice ad latus C B ductam, ſeu rectam 46 ſex pollices in latere C B ſecare.

Patet quoque, quum baſis *a b* ſucceſſive ſupra baſim A B excurrens centum pollices in ipſa occupabit, parallelam lateri C B ab hoc centeſimo pollice ductam ducentos pollices in latere C A ſecare; & parallelam baſi ab hoc ducenteſimo pollice lateris C A ductam ad latus C B tercentos pollices in hoc ſecare; atque ita porro in infinitum. Ergo nota baſi trianguli proportionalis, ejus duo latera certiſſime innoteſcunt.

THEOREMA III.

405. *Si duo latera minoris trianguli duobus lateribus majoris trianguli ſunt proportionalia, & angulus lateribus minoris trianguli comprehenſus angulo lateribus majoris trianguli comprehenſo aqualis ſit, triangula ſunt ſimilia* (*fig.* 44).

DEMONSTRATIO. Sint duo triangula *c d e* C A B. Anguli *c*, *e*, C ſint æquales, & latera hos angulos comprehendentia ſint proportionalia. Dico, angulos *d*, & A; *e*, & B ad eorum baſes eſſe æquales, & baſes quoque eſſe proportionales; ſeu *d e* : A B :: *c d* : C A :: *c e* : C B.

I. Cape in recta C A partem C D lateri *c d* minoris trianguli æqualem; & duc D E baſi A B parallelam. Anguli C D E, C A B ſunt æquales (358): pari ratione anguli C E D, C B A ſunt æquales; & D C E utrique triangulo communis eſt. Ergo triangula C D E, C A B, quorum anguli omologi ſunt æquales, ſunt ſimilia. Ergo C D : C E :: C A : C B (403).

Ergo ſi minus triangulum *c d e* triangulo C D E æquale eſſet, eſſet quoque majori triangulo C A B ſimile; ratione enim æqualitatis alterum alteri ſubſtitui poſſet (11. III.)

II. Atqui triangulum *c d e* ipſi C D E in omni-

mnibus æquale eſt. Nam . . . . .
Primo ex hypotheſi . . *cd* : *ce* :: CA : CB
Dein ex demonſtratis. . CD : CE :: CA : CB
In his proportionibus ſecunda ratio eadem eſt. Ergo duæ primæ rationes ſingulæ huic ſecundæ æquales, inter ſe æquales ſunt (166). Ergo etiam . . . . *cd* : *ce* :: CD : CE
Et *alternando* . . . *cd* : CD :: *ce* : C E

At primus antecedens *cd* poſtremæ hujus proportionis ſumptus eſt æqualis ſuo conſequenti C D; ergo ſecundus antecedens *ce* erit quoque ſuo conſequenti C E æqualis. Quum ergo latera *cd*, C D ſint æqualia, etiam *ce*, C E erunt æqualia; ceterum non ſtaret proportio; ergo triangula *cde*, C D E ſunt omnino æqualia (392): ergo alterum alteri ſubſtitui poteſt.

III. At ſupra oſtendimus, triangula C D E, C A B eſſe ſimilia; ergo triangula quoque *cde*, C A B erunt ſimilia. Ergo latus quodvis minoris trianguli *cd* eſt ad baſim *de*, ut latus omologum C A majoris trianguli ad ſuam baſim A B: ergo baſes *de*, A B ſunt & ipſæ proportionales. Ergo dimenſa baſi minoris trianguli invenietur per regulam aureum (180) baſis majoris trianguli, quæ ſæpius inacceſſa eſt & menſurari nequit. Q. E. D.

NOTA. Si recta DE baſi AB parallela triangulum A C B ad dimidiam ſuam altitudinem ſecat, recta D E erit dimidia baſis A B. Quum enim duo triangula D C E, A C B ſimilia ſint (401, & 405), baſis D E minoris trianguli erit ad baſim A B majoris, ut latus quodvis CD minoris trianguli ad latus omologum C A majoris (400, & 403).

§. III.

§. III.

SECTIONES IN CIRCULO.

406. OBSERVATIO. Diverſis modis duæ rectæ ſeſe in circulo ſecare poſſunt; ita vero ſeſe interſecantes proprietates obtinent animadverſione digniſſimas.

Quum in partes inæquales linea ſecta eſt, pars major dicitur *ſegmentum majus*, minor *ſegmentum minus*.

THEOREMA I.

407. In circulo quovis (*fig.* 47).

I. *Omnis diameter, ſeu radius chordæ perpendicularis chordam, & arcum ſubtenſum bifariam ſecat.*

II. *Omnis diameter, ſeu radius chordam bifariam ſecans eſt illi perpendicularis.*

III. *Omnis recta chordæ perpendicularis illam bifariam ſecans diameter eſt, aut radius.*

DEMONSTRATIO. Tres habet partes theorema ſingillatim demonſtrandas.

I. Diameter, ſeu radius AMC per centrum tranſit, quod ab extremis chordæ DBE, D, & E æque diſtat Si ergo hæc diameter, ſive hic radius *chordæ DE perpendicularis eſt*, cetera omnia diametri hujus, aut radii puncta a punctis D, & E æque diſtare debent (353); Ergo punctum B diametri hujus, aut radii æque diſtabit ab extremis D, & E chordæ: ergo erit BD = BE; ergo eadem ratione erit arcus CD = CE (317, 319).

II. Si diameter, ſeu radius AMC *chordam DE bifariam ſecat*; centrum M, & punctum E æque diſtant ab hujus chordæ extremis D, & E

& E, ut modo demonſtratum eſt. Ergo diameter, ſeu radius A M C duo habens puncta M, B ſingula a chordæ extremis D, E æque diſtantia, chordæ huic eſt perpendicularis (353).

III. Si recta A M C *chordam D E bifariam ſecat*, & illi *eſt perpendicularis*; punctum B æque diſtat a punctis D, E. Quum vero ſit perpendicularis, ſemper tranſit per puncta ab ipſis D, & E æque diſtantia; ergo per centrum M. Atqui linea quævis per circuli centrum tranſiens radius eſt, aut diameter; ergo recta A M C radius eſt, aut diameter, Q. E. D.

THEOREMA II.

408. *Si duæ chordæ in circulo ſe interſecant, partes unius erunt alterius partibus reciprocæ* (*fig.* 46).

EXPLICATIO. Tunc duæ quantitates *a*, *d* ſunt duabus quibuſque *b*, *c* reciprocæ, quum geometrice proportionales ita ſunt, ut duæ primæ *a*, *d* ſunt proportionis extrema, aut media; duæ alteræ *b*, *c* ſunt media, aut extrema. Quare theorematis ſenſus eſt, quum duæ chordæ inæqualiter in circulo ſe interſecant, quatuor ſegmenta (406) eſſe ita proportionalia, ut duo ejuſdem chordæ ſegmenta ſint aut extrema proportionis, aut media, duo alterius chordæ ſegmenta media, aut extrema. Quare non naturali, ſed inverſo ordine ſegmenta comparentur; exempli gratia, ſegmentum majus B E unius chordæ eſt ad ſegmentum majus D E alterius, ut ſegmentum minus E A alterius ad ſegmentum minus E C primæ; ſive $a:b::c:d$; & *alternando*, $a:c::b:d$; vel $d:c::b:a$; vel adhuc $c:a::d:b$.

DEMONSTRATIO I. Duæ chordæ quævis, B C, A D ſe ad punctum E in circulo ſecent. Habebuntur duo triangula E B A, E D C ſimilia (401). Anguli enim ad verticem oppoſiti ſunt

ſunt æquales (343). Anguli quoque D, & B ſunt æquales; inſiſtunt enim eidem arcui CA (366). Tandem anguli A, & C ſunt æquales, inſiſtunt enim arcui DB. Ergo triangula ſunt ſimilia; ergo habent latera omologa proportionalia (403). Ergo BE:DE::AE:CE; ſeu; $a:b::c:d$; in qua proportione partes BE, EC unius chordæ ſunt partibus DE, EA alterius chordæ reciproce proportionales.

II. Sint duæ aliæ quævis chordæ ſe ſecantes in quovis puncto B (*fig.* 47.

Erunt eadem ratione triangula BEA, BCD ſimilia: & habebitur proportio: latus medium AB primi trianguli eſt ad latus medium BD ſecundi, ut latus minus BE primi eſt ad latus minus BC ſecundi; ſeu AB : BD :: BE : BC; ut in theoremate. Q. E. D.

409. COROLLARIUM I. *In circulo ſi chorda quævis diametrum perpendiculariter ſecat, utrumque chordæ ſegmentum eſt media proportionalis inter ſegmenta diametri* (*fig.* 47)

DEMONSTRATIO. Diameter AMC a chorda quavis DBE perpendiculariter ſecetur. Utrunque chordæ ſegmentum DB, vel EB erit media proportionalis diametri ſegmentis BA, BC. Siquidem ex hoc theoremate AB:BD:: BE:BC. At quum chorda ſit diametro perpendicularis, partes BD, BE ſunt æquales (407). Ergo pro BE ſumi poteſt BD; & hebebimus AB:BD::BD:BC.

410. COROLLARIUM II. *In circulo linea quævis a peripheria ducta diametro perpendicularis, eſt ſegmentis diametri media proportionalis* (*fig.* 49).

Hæc enim quævis EG eſt dimidium chordæ diametro perpendicularis; ergo ex corollario primo DG:GE::GE:GF. Præcipua hæc eſt circuli proprietas diligenter notanda.

§. IV.

PROBLEMATA DE LINEIS.

PROBLEMA I.

411. L*Ineæ partium æqualium uſum explicare* (*fig.* 10).

SOLUTIO. *Linea partium æqualium*, ſeu *ſcala* dumtaxat dicitur linea indefinita AB in partes æquales accurate circino diviſa. Harum una invenitur in pyxide mathematica: diviſiones unius pedis æque poſſunt eſſe linea partium æqualium; at plerumque una pro opportunitate conſtruitur.

Exempli cauſa; ſi accurate indefinitam AB dividam in partes æquales quaſcumque, 1, 2, 3, 4, 5, atque ita porro, erit hæc linea partium æqualium: hæc in tabulis geographicis *ſcala* nuncupatur. Ejus uſus inter ceteros eſt ad minori forma majores figuras deſcribendas; ſeu vice verſa. Exempli cauſa (*fig.* 10, & 57):

I. Si *minori forma* rectangulum hexapedas 15 longum, 7 latum velim deſcribere; alterum circini crus ſtatuo in puncto A, alterum in puncto lineæ partium æqualium, & duco rectam AD huic 15 partium intervallo æqualem. Deinde circini crus alterum ſtatuo in puncto A, alterum in puncto 7 lineæ partium æqualium; & in charta in qua rectangulum deſcribendum eſt, perpendicularem AB duco huic ſeptem partium intervallo æqualem. Lineæ hæ erunt longitudo AD, & latitudo AB parvi rectanguli rectangulo reducendo ſimilis.

II. Si *duplo minores* efficere velim dimenſiones AD, AB rectanguli, unde quadruplo minor fiet ejus ſuperficies, ut ſequenti tractatu con-

conſtabit, duplo minores facio ſcalæ diviſiones 1, 2, 3, 4, 5, ceteraſque; & ſimili operatione fiet rectangulum ſimile ipſi ADBC, ſed cujus dimenſiones duplo minores erunt, & ſuperficies quadruplo minor (*fig.* 57).

III. Si *triplo majores* rectanguli dimenſiones vellem, diviſiones in ſcala efficerem triplo majores, ſive ubique unius loco tres diviſiones caperem, & ſimili operatione rectangulum efficerem ipſi ADCB ſimile, ſed cujus longitudo, & latitudo eſſet triplo major, ſuperficies vero, quæ eſt harum dimenſionum productum, ut oſtendemus, noncuplo major.

IV. Pari modo ad minorem, aut majorem formam alia quævis figura, puta triangulum, aut circulum, adduci poteſt. Hic tantum figuræ ſimiles deſcribendæ ſunt; ſequenti enim tractatu oſtendemus, omnes figurarum ſimilium dimenſiones eſſe proportionales (499).

Quum figurarum deſcribendarum longitudo, & latitudo quantitates tantum incomplexas continet, puta hexapedas, nullis pedibus, aut pollicibus; ſeu pedes nullis pollicibus, aut lineis; ſcala, de qua hactenus, his figuris proportionaliter deſcribendis inſervire poteſt.

V. At quum alterutra, aut utraque dimenſio quantitates continet heterogeneas, puta hexapedas, & pedes; ut figuræ proportionaliter deſcribantur, dimenſionibus ad minimam ſpeciem non redactis, *alia ſcala* opus eſt, qua quantitates tum omogeneæ, tum heterogeneæ ſimul capiuntur. Eſt hæc, quæ dicitur *ſcala geometrica*, ſeu *regula geometrica*, cujus uſum quinto ſequente problemate explicabimus (*fig.* 50).

Scala hac geometrica inſtrumentum eſt pyxidis mathematicæ, cujus uſus eſt in inveniendo numero partium ſimilium, & proportionalium partibus extenſionis in ſolo dimetiendæ. Quare ſcala geometrica conſiderari poteſt tamquam

regula in partes 10, aut 100, aut 1000, aut 10000, aut in alias quotquot libuerit diviſa, ut majores menſuræ recenſeri poſſint, puta hexapedis, aut leucis conſtantes, quibus partes hæ ſcalæ geometricæ notam rationem dicunt.

PROBLEMA II.

412. *Datis tribus lineis quartam illis proportionalem invenire* (*fig.* 48).

EXPLICATIO. Præcipuum hoc in geometria problema lineis, & numeris reſolvi poteſt. Ad faciliorem ejus uſum illud utroque modo reſolvemus.

SOLUTIO I. Datæ ſint tres rectæ quævis A, B, C. Quarta D invenienda eſt illis proportionalis, quæ alterutrum proportionis extremum, aut medium ſit.

I. Si *quarta proportionalis* D quæſita futura ſit quartus proportionis terminus; a puncto E duc ad angulum quemvis rectas EM, EN. In harum alterutra cape partem EF primæ datæ A æqualem; in altera linea partem EG ſecundæ datæ B æqualem; & ab F ad G duc rectam FG.

In linea EFM, ut opus fuerit producta, cape FH tertiæ datæ C æqualem; & duc rectam HK ipſi FG parallelam (363): erit GK *quarta proportionalis* quæſita D.

Si enim ſupponatur ad punctum E poſita parallela rectis FG, HK; habebitur proportio (400), EF:EG::FH:GK; ſeu hæc alia ipſi æqualis, A:B::C:D. Quatuor enim lineæ primæ proportionis ſingulæ ſingulis ſecundæ æquales ſunt (11, & 168).

II. Si quatuor linearum A, B, C, D, prima A quæreretur, duo extrema loco mutarentur, & haberemus D:B::C:A (174). Tum ſimiliter operando inveniretur *quarta proportionalis* quæſita A.

III.

III. Si in data proportione A:B::C:D linea quæſita eſſet alterum ex mediis, puta B; ſalva proportione termini ita mutari poſſent, A:C::B:D: tum C:A::D:B (174). Deinde ſimiliter operando inveniretur *quarta proportionalis* ignota B.

IV. Si duæ tantum rectæ A, B datæ ſint, & ipſa B ſit media proportionalis in proportione bis ſumenda; habebimus A:B::B:C, vel *x* (*fig.* 49).

Patet, ſimili operatione inventum iri ignotam *x* ex duabus datis A, B; tunc hæc ignota dicitur *tertia proportionalis*; etſi re ipſa quarta ſit, ſeu quartus proportionis terminus.

SOLUTIO II. Videndum quam inter ſe rationem dicant tres lineæ datæ ſive in hexapedis, ſive in pollicibus, ſive in partibus ſcalæ partium æqualium (411). Sit prima linea = 10 altera = 17, tertia = 24: quarta incognita dicatur *x*, & fiat, 10:17::24: *x* Duc invicem duo media; & eorum productum divide per primum extremum 10, ut habeatur quotiens. Hoc 30 $+ \frac{8}{10}$ exprimet *quartam proportionalem* quæſitam.

PROBLEMA III.

413. *Datam rectam in partes partibus alterius data recta proportionales dividere* (*fig.*48).

SOLUTIO I. Sit data recta *en* in partes partibus alterius rectæ *em* majoris, ſive minoris proportionales dividenda. *In linea dividenda* partes deſignandæ ſunt ſimiles partibus datæ, & diviſæ *em*; ita ut ſi prima diviſio data ſit tertia pars lineæ diviſæ, prima diviſio, quæ in dividenda fiet, ſit hujus pars tertia; atque ita porro.

Ambas rectas in plano ſtatue ad angulum quemcumque MEN; & per earum extremita-

tes M, N duc rectam MN. Tum per puncta diviſionum data in recta *em* duc ipſi MN parallelas FG, HK. Hæ in recta dividenda *en* diviſiones efficient diviſionibus 1, 2 in linea *em* datis proportionales. Quum enim triangula EFG, EHK, EMN ſint ſimilia, habebimus EF : EG :: FH : GK :: HM : KN; atque ita porro. Atqui in hac proportionum ſerie antecedentes ſunt partes datæ in recta *em*, & conſequentes partes *lineæ dividendæ*; ergo hæ illis ſunt proportionales.

SOLUTIO II. Ita quoque problema ſolvi poteſt; nec ſolutio a prima re ipſa diverſa eſt. Sit BC linea dividenda: *bc* linea data, & diviſa (*fig.* 91).

Statue lineas has in plano parallelas (363); & per earum extremitates duc rectas BA, CA, quæ ſibi occurrent in aliquo puncto A. Ab hoc per puncta diviſionis data 1, 2, 3 duc rectas: hæ proportionaliter ſecabunt lineam dividendam in *m*, *n*, *r*. Triangula enim A*b*1, ABM; tum A12, A*mn*; tum A23, A*nr* quum ſint ſimilia, erit A*b*: *b*1 :: AB : B*m*. Deinde A1: 12 :: A*m* : *mn*; atque ita porro.

Ex hac ſolutione ſequitur, *ſi a vertice cujuſque trianguli ducatur recta ad quodvis baſis punctum, rectas omnes baſi parallelas in partes ſectionibus baſis proportionales ſecari*; *adeoque foret b*1 :: B*m* :: 12 : *mn* :: 2*c* : *n*C; atque ita porro de ſectionibus quibuſcumque.

PROBLEMA IV.

414. *Duabus datis rectis mediam proportionalem invenire* (*fig.* 49).

EXPLICATIO. In hoc præcipuo problemate quantitas ignota quæritur, quæ in ſe ducta productum efficiat duarum datarum quantitatum producto æquale. Duæ datæ quantitates ſunt proportionis extrema; quantitas quæ-

ſita

ſita duo media ſufficiet. Problema ſemper lineis, aliquando numeris reſolvi poteſt. Utroque modo illud reſolvemus.

SOLUTIO I. Datæ rectæ ſint A, C. Quæritur ignota B illis *media proportionalis*, ut habentur A : B :: B : C.

Duc infinitam DF, in qua cape DG datæ A æqualem, & GF alteri datæ C æqualem. Duarum linearum ſummam DGF bifariam divide in M. Hoc tamquam centro, & intervallo MD circulum deſcribe. Tum ad punctum G ſtatue perpendicularem GE, quæ ad peripheriam pertingat. Erit hæc *media proportionalis* quæſita inter A, & C; quæ ſi dicatur B, habebimus A : B :: B : C. Hoc ex ſecundo præcedente corollario evidenter ſequitur (410).

SOLUTIO II. Datarum linearum valore ſive in hexapedis, ſive in pollicibus, ſive in lineis determinato, eas invicem duc, quæ proportionis extrema ſunt. A producto radicem quadratam extrahe (129): erit hæc linea quæſita. Exemplum. Altera data ſit = 4, altera = 25; horum numerorum productum eſt 100, cujus radix quadrata 10. Hæc 10 × 10 = 100 dat productum extremorum producto æquale; ergo recta = 10 erit inter datas *media proportionalis*.

Si extremorum productum non ſit quadratum perfectum, radix numerica non erit exacte media proportionalis (130): ſed magis magiſque ad veram radicem, quæ eſt vera media quæſita, accedemus (135). In praxi fractiones negliguntur; & radix proxima ſatis eſſe ſolet.

PROBLEMA V.

415. *Scalam geometricam conſtruere* (*fig.* 50).

SOLUTIO. Ut hanc ſcalam, de qua nonnulla ſupra, conſtruamus (411):

I. Duc rectam indefinitam ABN. In hac cape ſex partes æquales A6, 65, 54, 43, 32,

O 4 21,

21, ut lubet. Intervallum AB quoties libuerit in ipſam ABN transfer.

II. Ad punctum A eleva perpendicularem AC, quam in 12 partes æquales pro libito ſumptas divides, A1, 12, 23, 34, 45, 56, atque ita porro uſque ad duodecimam.

III. A quovis diviſionis puncto in perpendiculari AC duc parallelas 1M, 4S, 9Z ipſi ABN; & in poſtremam parallelam CDR transfer a C in D partes ſex, in quas diviſa fuit recta AB.

IV. Junge rectis partem primam ſiniſtram A ſecundæ dexteræ 6; tum 6 ad ſiniſtram ipſi 5 ad dexteram; atque ita porro. Junge ſemper diviſiones ſiniſtras dexteris ope *tranſverſarum* A6, 65, 54, 43, 32, 21.

EXPLICATIO. Si AB ſupponatur ſex pedes longa, partes A6, vel 65, vel 54 erunt ſingulæ pedem unum longæ. At partes 11, vel 22, vel 33 parallelarum 4*x*, vel *vr* perpendiculari AC, & tranſverſæ A*a* interceptarum pollices exprimemt. Pars 11 pollicem unum exprimet, pars 22 duos; atque ita porro. Quare pars poſtrema C6 pollices 12, ſeu pedem exprimet, ſiquidem C6 = A6 per conſtructionem.

DEMONSTRATIO. Ponamus, ſex partes æquales rectæ AB eſſe ſex pedes; demonſtrandum eſt, partem 11 dare pollicem, partem 22 duos, partem 66 ſex; atque ita porro. Patet. Nam triangula CA*a*, 1A1 ſunt ſimilia (401, & 413): ergo (403) erit A1:AC::11:C6, vel C*a*.

At per conſtructionem pars A1 eſt duodecima pars lineæ AC; ergo latus 11 eſt duodecima pars lateris C*a*: ergo quum latus C*a* valeat pollices 12, latus 11 pollicem valebit. Pari modo oſtendam, latus 22 pollices duos valere; latus 66 ſex; atque ita porro (413).

416. NOTA. Scalæ geometricæ ita conſtru-
ctæ ſi

ctæ uſus maxime opportunus eſt, ut mox oſtendam (*fig.* 50).

I. Si brevi ſpatio valorem pedum 5, & pollicum 4 deſcribere velis, quære in hac ſcala concurſum quartæ parallelæ 4*x*S cum ſexta tranſverſa 2*x*D; circini crus ſtatue in *x* puncto concurſus, & alterum crus transfer ad extremitatem 4 ejuſdem parallelæ *x*S. Intervallum *x*4 proportionalem pedibus 5, & pollicibus 4 extenſionem dabit.

II. Si brevi ſpatio valorem pedum 27, pollicum 9 deſcribere velis; cape AM = 12 pedibus habebis jam pedes 24: deſunt pedes 3, pollices 9. Ut hos habeas.

Quære concurſum *r* nonæ parallelæ 9*r*Z cum quarta tranſverſa 3*r*4. Statue circini crus in *r* & alterum in 9. Dabit hoc intervallum *rv* = 3 pedibus + *v*9 = 9 pollicibus. Ducta linea his omnibus æquali habebis 2AM = 24 pedibus + *rv* = 3 pedibus + *v*9 = 9 pollicibus.

III. Si recta AB exprimit 6 hexapedas, tunc diviſiones 11, 22, 33, 44, exprimens ſemipedes, ſeu hexapedæ partes duodecimas.

IV. Si recta AB exprimit 6 leucas, tunc diviſiones exprimens leucæ partes duodecimas. Idem dicas de alia quavis longitudinis menſura. Hinc omni menſuræ ſcalæ geometricæ uſus accommodatur, qua longitudo dimetienda ſit.

§. V.

PROBLEMATA DE TRIANGULIS.

PROBLEMA I.

417. *Notis alicujus trianguli duobus angulis, & latere, tertium angulum, & duo reliqua latera invenire* (*fig* 45).

SOLUTIO. Sit triangulum ABC, cujus duo quivis anguli B, & C noti ſint, tum latus C A, quod pono eſſe hexapedarum 287.

I. Datis duobus trianguli angulis tertius facile innoteſcit, quum ſit ſupplementum ad gradus 180. Summam ergo angulorum notorum ſubduc a 180; reſiduum erit valor tertii anguli ignoti A (387).

II. Latus notum CA ſume pro baſi. Ut reliqua duo latera ignota AB, BC invenias, in linea partium æqualium (411) tot partes cape, quot latus notum habet hexapedas, partes ſcilicet æquales 281; & duc rectam *ca* huic longitudini æqualem. Tum ab extremo *c* rectæ *ca* duc indefinitam *cb* facientem cum *ca* angulum *c* ipſi C æqualem. Ab altero extremo *a* ipſius *ca* duc aliam indefinitam *ab* facientem cum *ca* angulum *a* ipſi A æqualem. Rectæ *cb*, *ab* indefinite productæ concurrent in aliquo puncto *b*, & efficient triangulum *abc* ſimile triangulo ABC. Quare latera unius lateribus omologis alterius erunt proportionalia (403).

Ergo CA : CB :: *ca* : *cb*; & CA : AB :: *ca* : *ab* Unde ſequitur, latus CA totidem æquales partes continere lateris CB, vel AB, quot latus *ca* partes æquales continet lateris *cb*, vel *ab*.

III. Si ergo capias circino latus *cb*, & illud transferas in lineam partium æqualium, atque invenias indicari partes 361; certo ſcies, latus CB hexapedas 361 longum eſſe. Pari modo ſi capias circino intervallum lateris *ab*, & hoc in lineam partium æqualium traslato invenias intercipi partes 96; certus eris, latus AB hexapedas 96 continere.

PROBLEMA II.

418. *Datis trianguli lateribus, & angulo comprehenſo, tertium latus, & duos reliquos angulos invenire* (*fig.* 52).

SO-

SOLUTIO. In triangulo BAC notum ſit latus AB, quod ſuppono hexapedarum 495, & latus AC hexapedarum 257, tum angulus A his lateribus comprehenſus notus ſit.

I. Ut habeas latus BC, cape in ſcala (411) partes æquales 495, & duc rectam *ab* his partibus æqualem. Cape quoque partes 257; & a puncto *a* duc rectam *ac* hiſce aliis partibus æqualem, quæ cum *ab* angulum *a* efficiat ipſi A æqualem. Tum a puncto *b* ad *c* duc rectam. Habebis triangulum *abc* ſimile triangulo ABC; duo enim latera *ab*, *ac* ſunt ipſis AB, AC proportionalia; & angulus lateribus primi comprehenſus angulo lateribus ſecundi comprehenſo æqualis eſt (403).

II. Quare ſi in ſcalam transferas latus *bc* innoteſcet quot partes æquales illud contineat; atque hinc quot hexapedas contineat latus BC. Exempli gratia; ſi latus *bc* continet ſcalæ partes 204, latus ignotum BC hexapedas 204 longum erit.

III. Ut propoſiti trianguli angulos ignotos B, C invenias, ſemicirculo in gradus diviſo (339) omologos minoris trianguli angulos metire. Erit angulus *b* anguli B, & angulus *c* anguli C menſura.

419. NOTA. Ex utroque problemate apparet, tantum quæri ut fiat parvum triangulum majori ſimile, cujus aut latera aliquot, aut anguli quæruntur, ut ſupra docuimus. At ut res accurate fiat, triangulum quam fieri poſſit maximum eſt deſcribendum; facilius enim quo majus eſt triangulum errores magni vitantur.

GRAPHOMETRUM.

420. DESCRIPTIO. Ad angulos in ſolo dimetiendos paſſim utimur inſtrumento, quod graphometrum nuncupatur; propterea quia tum menſuræ, tum ſcriptioni inſervit; a *γραφω*, *ſcribo*, & *μετρεω*, *metior* (*fig.* 5).

I. *Graphometrum* eſt ſemicirculus ſatis magnus A M B C A accurate in gradus, minuta, minutorum dimidia, & quadrantes diviſus, cui adjecta eſt alidada pinnulis inſtructa.

Alidada eſt diameter D P ſupra centrum C verſatilis. *Pinnulæ* D, P utrique alidadæ extremo infixæ ſunt metallicæ lamellę duæ alidadæ perpendiculares, & pertuſæ ad radium viſualem in objectum quæſitum dirigendum. Aliquando pinnulæ duæ ſimiles diametri ACB extremis A, & B infixæ ſunt.

Per pinnulas B, & A collimet in objectum oculus, dum alter oculus in aliud objectum per pinnulas P, & D collimabit. Radii duo viſuales, qui ad circuli centrum C ſeſe interſecant duo latera efficient anguli ACD, quem arcus A D dimetietur. Angulus hic acutus eſſe poteſt, rectus, aut obtuſus, ut alidada D P ab A in M, & ab M ad B recedet: diametro A B interea immobili.

Planum graphometri inſiſtit *nodo* C I F, cujus ope planum hoc quamlibet poſitionem obtinet, horizontalem, verticalem, horizonti inclinatam, ad boream, ad auſtrum, ad ortum, ad occaſum. Inferior nodi pars I F eſt cylindrus cavus, cui alter cylindrus ligneus inſeritur, circa quem converti poteſt; porro cylindrus ligneus nodum ſuſtinens fulcro adhæret tribus crucibus ligneis ſolidis ferme tres pedes altis terminato.

II. Rimarum loco, quibus pinnulæ A B D P ſciſſæ ſunt, fieri poſſent quatuor circularia foramina diametro linearum ſeptem, aut octo, quorum centra *c* æque alta eſſent ſupra graphometri planum, & lineæ per hæc centra ductæ ſeſe in eodem puncto perpendicularis ad centrum C graphometri interſecarent. Cuique circulari foramini aptarentur ope canalium in ipſis pinnulis excavatorum laminæ metallicæ, quarum duæ in *b*, & *p* exiguo circulari fora-

mi-

mine, quale acu fieri poſſet, pertuſæ eſſent, ut radio viſivo aditus eſſet; aliæ duæ in *a*, & *d*, foramen circulare haberent, in cujus centro duo fila ſerica, aut metallica tenuiſſima ſeſe normaliter interſecarent. Hac ratione in objectum facilius collimaretur.

Ita conſtructum eſt graphometrum, quo aliquando uſi ſumus. Summa cura adhibenda eſt, ut centra lamellarum, quæ pinnulis alidadæ inſeruntur centris foraminum circularium ad extrema alidadæ P D, & diametri A B immobiliter extantium exacte congruant. Ut objecta diſſita apte diſtinguantur, aut lente, aut brevi teleſcopio uti poſſumus.

III. Aliquando graphometro duo aptantur teleſcopia, alterum immobile, & diametro A B parallelum, quod pinnularum A, B vices gerit; alterum alidadæ adhærens, & cum illa mobile, quod pinnularum P, D loco eſt. Ut teleſcopia alterum ſupra alterum infra graphometri planum apte collocata ſint, debet recta per centra lentium objectivæ, & ocularis ducta eſſe graphometri plano parallela, & debent lineæ hæ in perpendiculari ad graphometri centrum ducta invicem ſecari.

IV. In graphometri plano in gradus diviſo paſſim acus magnetica ſatis longa collocatur ſupra fulcrum perpendiculare verſatilis in circuli *a b m n* centro in gradus, & minuta diviſi. Eſt hæc pyxis magnetica, quæ in graphometro vitro plano ſolido, & apprime diaphano obtegitur, cujus planum paſſim in ipſius graphometri plano eſt. Hujus acus uſus eſt poſitionem loci definire, in quo operamur, & objectorum, in quæ collimamus, reſpectu quatuor punctorum cardinalium.

Ut hoc fiat declinatio actus magneticæ in loco, in quo graphometrum eſt, accurate definienda eſt; quod facile obtinetur angulum capiendo, quem cum linea meridiana loci ma-

gne-

gnetica acus efficit fulcro inſiſtens huic meridianæ lineæ perpendiculari. (*Phy.* 1356). Ponamus, angulum *a m n* a meridiana linea, & ab acu efformatum eſſe graduum 19, minutorum 45 (*Phy.* 592, & 1101, V.):

Quum acus *a b* angulum *a m n* efficiet graduum 19, minutorum 45, linea CM ab auſtro in boream dirigetur, linea AB ortum, & occaſum reſpiciet; linea P C D R gradibus 60 A D ab occaſu CA in boream CM declinabit. Quum acus lineæ boreali *m n* exigui circuli congruet, linea CM graphometri gradibus 19, minutis 45 a borea in ortum declinabit; atque ita de ceteris. Ut hæc omnia tamen accurata ſint, nihil ferreum nec in graphometro, nec prope eſſe debet.

V. Si alidadæ P C D graphometri affigatur parallelus exiguus tubus vitreus *r s* perfecte cylindricus, ſeptem, aut octo pollices longus ſpiritu vini colorato plenus, in quo ingens aerea bulla ſit; quum alidada, & tubus utrinque hermetice clauſus poſitionem horizontalem obtinebunt, bulla aerea ad cylindri medium immobilis erit. At quum alidada, & cylindrus ſemper paralleli ab horizontali poſitione recedent, bulla aerea aſcendet qua parte alidada attolletur. Cylindrus hic *r s* eſt *libella aquea*. Ejus ope facile, & ſatis accurate invenietur linea horizontalis loci, in cujus ſolo anguli capiuntur. Ad hoc tamen cylindri cavitas ubique exacte æqualis eſſe debet; & hujus cavitatis axi *r s* ſemper & alidadæ, & angulorum viſualium directioni parallela ſit oportet.

VI. Quoniam de linea horizontali ſermo incidit, præviam hic illius notionem tradere opportunum eſt.

Linea horizontalis loci ea eſt, quæ directione quavis ducta ab auſtro in boream, aut ab ortu in occaſum ſuperficiei aquæ ſtagnantis ibi

ſitæ

ſitæ eſſet parallela. Ubique libella certa quadam extenſione lineam horizontalem indicat. Alibi de libella, & de horizonte fuſius agemus (533).

QUADRANS.

421. DEFINITIO I. *Quadrantis* uſus paſſim eſt in angulis cæleſtibus accuratiſſime capiendis.

Inſtrumentum hoc A B D C A paſſim eſt planum ſolidum ex aurichalcho, cujus medium V V vacuum eſt, ſeu in quo materia ſolida non eſt præter arcum A B D, & duos radios C D, C A. Arcus A B D, qui eſt præciſe quadrans ingentis peripheriæ, cujus radius paſſim duos, tres, aliquando plures pedes longus eſt, omni diligentia in gradus, minuta, ſecunda, nonnunquam etiam in tertia dividitur. In centro C verſatilis eſt *regula ſolida* M N, quæ arcus B D, & anguli DCB quantitatem metitur; & cui affixum eſt teleſcopium M R cum ipſa mobile illique parallelum. In teleſcopii foco *m n* micrometrum objectivum eſt, de quo mox. *Perpendiculum* O P inſtrumentum horizonti perpendiculare ſtatuit (532).

Ut inſtrumentum adhibeatur, ſumma diligentia immobile ſtatuitur in opportuna directione. Exempli cauſa, ſi quadrantis directio ea ſit, in qua linea C D ſit horizontalis, linea C A verticalis, planum C A B D C in plano meridiani; tunc regula mobilis M N, vel CB, quæ eſt radius circa centrum C verſatilis, movebitur a B in D, a B in A; & angulos quoſcumque D C B dimetietur, quos in oppoſito quadrante peripheriæ cæleſtis meridiani capere voluerimus, quique inter horizontalem indefinitam C D, & verticalem indefinitam C A ad zenith terminatam intercipientur. Si arcus DB eſt graduum 46 in quadrante, erit quoque gra-

dum

duum 46 in quadrante peripheriæ cæleſtis meridiani; ſunt enim hi duo peripheriarum æquivalenter concentricarum arcus iiſdem indefinitis radiis CD, CB intercepti (340).

MICROMETRUM, TELESCOPIUM.

422. OBSERVATIO. Maxima, quæ a quadrante a nobis deſcripto, & in aſtronomia ferme a ſeculo uſurpato commoda proveniunt a duobus præclaris recentioris aſtronomiæ inventis proficiſcuntur; quorum alterum eſt micrometrum objectivum, alterum teleſcopium quadranti applicitum.

I. *Micrometrum objectivum*, quod primo celebris Hugenius excogitavit, ſumma accuratione cæleſtibus ſpatiis dimetiendis inſervit; ſicuti pendulo ſecundis vibrante (7. III.), ſumma accuratione tempus metimur, quo quædam obſervationes fiunt (*fig.* 3).

Nemo ignorat, teleſcopium aſtronomicum MR eſſe teleſcopium duabus convexis lentibus inſtructum ita diſpoſitis, ut earum foci in exiguum ſpatium concurrant (*Phy.* 1001, & 1006). In foco *mn* lentis objectivæ R exigua imago pingitur omnino objecto ſimilis, & proportionalis angulo (optico), ſub quo objectum hoc oculo inermi apparet: porro hæc imago in foco lentis ocularis M ſita ad oculum deducitur, diſtincte cernitur, & ſub angulo optico, a quo proportionaliter in omnibus ſuis partibus amplificatur. Tunc vero hac ratione objectum & nitidius, & majus, & oculo propinquius appareat, quam oculo nudo inſpectum appareat (*Phy.* 1027); ſi vero teleſcopium object diametrum, puta, quinquagies auget; objectum, quod oculo inermi inſpectum unum, aut alterum ſecundum complecteretur, adeoque percipi non poſſet (*Phy.* 921), oculo teleſcopio aſtronomico inſtructo apparebit diametro 50,

vel

vel 100 ſecundorum, & viſibile fiet. Hinc elucet, qua ratione ope teleſcopii diſtincte objectum, ſeu extenſio videri poſſit, quæ inermi oculo diſcerni nequiret, uti remotiſſimi cometæ diameter, quæ ſæpius oculo inermi non deprehenditur; ſive ut ſolis parallaxis, quæ 8 ſecunda, & ferme 24 tertia non excedit.

Imago hæc ad objectivæ lentis focum *m n* picta Hugenio modum præbuit, quo ſui objecti apparentem magnitudinem metiretur. Sic autem proceſſit. In communi foco *m n* lentis objectivæ R, & ocularis M foramen circulare ſtatuit *d v d r d*, cujus apparentem magnitudinem dimenſus eſt, minutorum ſcilicet, & ſecundorum numerum, quæ per illud in cælo detegebantur; atque hoc ope temporis, quo ſtella hujus foraminis *d d* diametrum trajiciebat (*a*). Hac apparenti cæli amplitudine per foramen illud viſa omni accuratione dimenſa, quam planetæ alicujus diſcus, aut duorum corporum cæleſtium diſtantia capienda erat, per lateralem teleſcopii rimam *m n* metallicam virgulam *v r* immittebat tantæ dumtaxat latitudinis, quanta ſatis eſſet ad hoc intervallum obtegendum; & latitudo hæc ope ſcalæ (411) totius foraminis latitudini *d d* comparata illi objecti diametrum indicabat. Exemplum. Si dia-

(*a*) *Stella revolutionem ſuam diurnam peragit horis* 23, *minutis* 56, *ſecundis* 4 *temporis medii*; *& uno temporis ſecundo percurrit gradus ſecunda* 15, *cum ferme vigeſima ſexta ſecundi parte*; *ſeu accuratius, uno temporis ſecundo percurrit gradus ſecunda* 15 $+ \frac{3540}{86164}$ *ſecundi unius. Alibi indicavimus qua ratione temporis ſecunda accurate diſtingui poſſint.*

diameter *d d* foraminis dabat gradus minuta 70, & latitudo *c* virgæ *v r* planetam occultans eſſet diametri hujus pars ſeptuageſima, inferebat, planetæ diametrum eſſe minuti unius; atque ita de ceteris. Hoc Hugenii micrometrum fuit: illud Malvaſia, Auzoutus, Bradlejus perfecerunt (*fig.* 116, & 113).

Marchio Malvaſia Bononiæ nobili genere natus reticulum in teleſcopii foco *m f n* collocavit; plura ſcilicet fila ſeſe ad angulos rectos ſecantia, & plura quadrata *d r n d* efficientia, quorum ſingulis datum cæli ſpatium reſpondebat. Quumque ſæpius contingeret, ut objectum dimetiendum unum, aut plura ex his quadratis exacte non occuparet, ex his unum in plura minora quadrata diviſit, ſicuti primis totam teleſcopii latitudinem diviſerat. Ita facile definiebat, quot præcipuorum filorum intervalla, & quot unius intervalli partes objectum obſervandum occuparet; adeoque quænam ejus eſſet apparens magnitudo (*fig.* 116).

Auzoutus illuſtris Academicus Regiæ ſcientiarum Academiæ Pariſienſis inventum hoc ulterius perfecit, & accuratiſſimis obſervationibus opportunum reddidit. Fila tantum parallela *r r* retinuit, & tranſverſum unum *d d* illa ſecans ad angulos rectos; & ut objectum dimetiendum filis ſemper parallelis includeret, ex his unum *n n* metallicæ lamellæ *n m* alligatum percurrere fecit per canaliculos in lamina cetera fila diſtenta retinente excavatos. Lamella hæc *n n m* promovetur, aut reducitur ope cochleæ, cui index *v* adjectus, cujus revolutiones indicant quanto ſpatio filum mobile *n n* a filis fixis *r r* receſſerit, aut ad illa acceſſerit. Exemplum. Ponamus fila parallela ſingula invicem diſtare intervallo, cui unum gradus minutum accurate reſpondeat, & 60 revolutiones cochleæ V requiri, ut æquali greſſu a filo ad filum procedat. Patet quamvis in-

dicis

dicis revolutionem ſecundum unum metiri. Reticulum hoc *d r d n d* tubo teleſcopii MR incluſum eſt, & in foco *m n* objectivæ lenti R parallelum ſtatuitur. Cochlea *v* exterius excedit, ut filum mobile promoveri poſſit, & in teleſcopii M R tubo rimula aperta eſt, ut noctu ope lampadis fila illuminari poſſint (*fig.* 3, 113, 116).

Quum teleſcopium reticulo *d r d n* accurate in foco *n f m* lentium objectivæ, & ocularis collocato inſtructum eſt; definienda eſt latitudo ſpatii ABA, ſeu videndum quot gradus, & minuta circulare foramen A B A complectatur. Ad hoc in cælum teleſcopium dirigitur, & foraminis amplitudo, tum fili a filo diſtantia expenditur alicujus ſtellæ trajectione, ut Hugenium feciſſe ſupra diximus; ſive teleſcopium ad parvum aliquod objectum A B dirigitur aliquot centenis hexapedis diſtans, cujus apparens magnitudo trigonometrice expenſa fuerit; a qua illa deducitur, quæ uni ex æqualibus filorum intervallis *r r*, *r r* hoc objectum includentium reſpondeat. His ita diſpoſitis micrometrum conſtructum eſt, & ad cælum converti poteſt ad apparentem cujuſque objecti magnitudinem dimetiendam. Si, exempli cauſa, apparentem ſolis diametrum metiri velis, ita inſtrumentum converte, ut ſol videatur aliquo tempuſculo directionem ſequi alicujus ex filis parallelis *r r*, & filo mobili *n n* promoto, aut reducto ſit, ut ejus diſcus illis accurate incluſus ſit. Tunc ope indicis adnotatur diſtantia fili mobilis *n n* a fixo aliquo *r r*. Hinc ſatis accurate infertur apparens aſtri diameter, ſive intervallum, quod inter aſtra duo metiri velimus. En tibi brevibus verbis micrometri deſcriptionem, & uſum. Varia ſubinde micrometra excogitata fuerunt; horum tamen optimum, ſimpliciſſimum, pluribus uſibus accom-

mo-

modatum hactenus deſcriptum eſt, quo, paucis mutatis, omnes aſtronomi utuntur. (*Fig.* 3, & 116).

II. *Teleſcopium aſtronomicum quadranti adjectum* alterum eſt præclarum recentioris aſtronomiæ inventum. Hoc Auzouto, & Picardo in Gallia debemus, in Anglia Gaſcognio, & Hookio. Quandiu veterum more pinnulis, ut in graphometro (420) collimabatur; obſervator inermibus oculis nunquam accurate objecti obſervati terminos definire poterat. Ceterum ſtellæ fixæ oculo inermi coma quadam lucida circumfuſæ apparent, quæ illi majorem vera diametrum tribuebat; unde perpetuo errore obſervator tenebatur. Teleſcopium quadranti affixum omnia hæc incommoda de medio tollit. Aſtri diameter, puta ſolis, diſtinctos exhibet limbos; & accurate inſtans definiri poteſt, quo ad fila in objectivæ lentis focum decuſſata pertingit. Stellæ incommodam illam comam exuunt, qua oculo inermi earum apparens magnitudo augetur; & tantum puncta lucida apparent, ac ferme indiviſibilia, quæ ſæpius vel a filo ſerico occultantur, a cujus umbra illico fulguris exigui inſtar emergunt; hic earum per hæc fila tranſitus multo melius definitur; unde facilius, & accuratius, quam antea fieret, earum declinatio, & aſcenſio recta obtineri poteſt (*Phy.* 1153). Quadrans demum teleſcopio, & micrometro inſtructum plurimis difficilibus obſervationibus inſervit, quæ veterum inſtrumentis fieri nequibant: quare hoc inventum aſtronomi omnes ſeduli arripuerunt.

Fruſtra in teloſcopium objicies, ita obſervando nullam haberi *lineam fiduciæ*, ſeu nullum axem viſionis; quod tamen ad objecti locum definiendum neceſſarium eſt. (*Phy.* 912). Facile enim dioptricæ legibus oſtenditur, radium per objectivæ, & ocularis lentis centra tran-

tranſeuntem lineam immutabilem deſcribere (*Phy.* 987, *&* 1006), quæ eſt axis viſionis, ſeu recta, in qua objectum videtur; quare tantum illud objecti punctum, quod in hujus lineæ directione ſitum eſt, aut quod definito angulo ab illa diſtat apparere poteſt in filorum interſectione. Quum itaque inſtrumentum obſervationibus probe expenſum fuit, nec teleſcopium in quadrante loco motum, linea habetur, quæ illi æquivalet, quæ per ambo veterum pinnularum foramina duceretur, quæque eſt radius ipſe, quo objectum cernitur. Hac de re experientia certior fieri potes, primo per teleſcopium collimans in objecti punctum ad centum, aut ducentas hexapedas poſitum, deinde in hoc ipſum punctum per pinnulas teleſcopii tubo adfixas collimans, remotis vitris, & teleſcopii tubo immoto.

III. Etſi inſtrumentum hoc per ſæculum magis magiſque perfectum fuerit, nondum tamen omnem, quam poteſt, perfectionem adeptum eſt. Quod adhuc in illo perfectionis deſideratur eſt a communium teleſcopiorum vitio (*Phy.* 1027), quæ ſatis longa eſſe debent, ut admodum objectum augeant, unde incommoda fiunt; nec diſtincte objecta referunt, niſi objectivæ lentis oræ opaca zona obtegantur; unde potiſſima vitri hujus pars oculo inutilis eſt, cui lucem non tranſmittit, niſi per circulum circa centrum (*Phy.* 1029). Hiſce vitiis accurrendi deſiderium poſtremis hiice temporibus impulit, ut teleſcopia fierent achromatica (*a*), quorum ſcilicet vitrum objectivum, nihil

(a) *Teleſcopia communia, præſertim ſi nimia lentis objectiva pars detecta relinquatur objecta iride quadam circumveſtita exhibent*; *unde confuſa*

nihil diverſa radiorum refrangibilitate (*Phy.* 866) obſtante , radios omnes æque refringeret , & in focum minus ab objectivo vitro remotum nulla perturbatione colligeret . Quare vitra materia , & denſitate diverſa elaborata fuerunt , quæ ſingula diverſam refractionem parerent ; & tali diverſa curvatura formata , qua in radiis inæqualiter refrangibilibus æqualem refrangibilitatem producerent.

Diverſis modis per hos dies *teleſcopia achromatica* conſtruuntur ; quorum elaborandorum methodum , & principia invenies in actis regiæ ſcientiarum academiæ ad annos 1756 , 1757 , 1762 paginis reſpective 380 , 524 , 572 ; vel in ſecundo volumine aſtronomiæ Lalandii, pagina 735 , & ſequentibus . Teleſcopia hæc magis magiſque fortaſſe perficientur . Interea qua ratione elaboratum a Dollondio in Anglia illud ſit , quo Lalandius utitur , paucis exponam . In his objectivum vitrum dumtaxat a communibus teleſcopiis diverſum eſt ; oculare enim a communibus nihil differt (*fig.* 113) .

Conſtat hoc objectivum vitris tribus *aa* , *bb* , *cc* ſimul zona colligatis. Vitrum medium *bb* utrinque concavum ex maſſa eſt, quam Angli

fuſa apparent , nec bene definita . Teleſcopia achromatica objecta ab hac iride , ſeu potius a perturbatione inde orta , eximunt . Hinc eorum etymologia , achromatica , ſeu ſine colore , ab α privativo , & χρῶμα color.

Non tamen hac teleſcopia colores omnes , qui in communibus teleſcopiis conſpiciuntur , adimunt , quique ab ocularibus procedunt ; plurimum tamen hos colores imminuunt , & radiorum perturbationem , qua in objectivarum lentium foco fit .

gli *flint glaſs* vocant, ex vitro ſcilicet ex arena ſilicum conflato, cui non exigua calcis plumbeæ copia admiſcetur; vitra ambo reliqua utrinque convexa ex vitro communi ſunt ipſo flint-glaſs minus denſo, minus gravi, minuſque radiis diſpergendis apto. In hoc objectivo, ut apparet, ſex ſunt curvaturæ centra (*Phy.* 1001), quarum radii inæquales ſunt. Sex hi radii (*Phy.* 1009) ab externæ ſuperficiei *d* radio incipiendo longi ſunt 315, & 450, 235, & 315, 320, & 320 lineas. Teleſcopii focus *df* eſt ferme pollicum 43, campus vero *a a* linearum 40; æquivalet teleſcopio communi viginti, & ultra pedes longo, ſeu cujus focus ſit ad pedes 20. Teleſcopia hæc achromatica vel unicum habent vitrum oculare *rs*, & tunc objecta apparent inverſa, vel tria, & tunc objecta recto ſitu conſpiciuntur. (*Phy.* 1027, & 1028).

Quum teleſcopia achromatica majorem perfectionem adepta fuerint, obſoleſcent teleſcopia (*Phy.* 1032): hoc enim his præſtabunt, quod æque brevia erunt, tractabilia, efficacia; nec vitio laborabunt opacitatem, & rubiginem actione aeris humidi contrahendi, quo ſpecula metallica atteruntur; at quo lædi vitra non timent.

PROBLEMA III.

423. *Angulum in ſolo, puta angulum CBA, metiri (fig. 51)*.

SOLUTIO I. In vertice A anguli dimetiendi centrum graphametri ſtatue, & in utroque anguli latere, ut in C, & B haſtas defige.

II. Alidadam A*b* in haſtam B dirige per pinnularum rimas collimans. Deinde alidadam in A*c* converte, ut in haſtam C collimes (*a*).

III.

(a) *Sæpe his haſtis ſignum affigitur, quod procul diſtincte videri poſſit.*

III. In graphometro gradus enumera, & minuta *cdb* inter binas alidadæ directiones AB, AC comprehenſa; numerus hic erit menſura anguli CAB dimetiendi. Eodem modo angulos DAB, DAC, ABD, CBD, CBA dimetieris.

PROBLEMA IV.

424. *Objecti inacceſſi diſtantiam metiri, puta diſtantiam A montis AM qui inacceſſus ſupponitur* (*fig.* 53)).

SOLUTIO I. Ad aliquam a monte diſtantiam in plano, & æquabili ſolo duo ſelige diverſa loca B, & G, quæ *ſtationes* vocantur, unde verticem A montis, & ſtationem utramque B, & G intueri poſſis. Haſtam in B defige, & alteram in G; deinde funiculum tende a B in G; & accurate pertica, vel hexapeda ſupra funiculum diſtantiam BG metire duabus haſtis, ſeu ſtationibus interceptam.

II. Graphometrum in B ſtatue, & angulum ABG=*a*Bg metire. Graphometrum quoque ſtatue in G & angulum AGB metire. Punctum A haſtæ vices gerit pro latere G A. (423).

III. Radii viſivi BA, GA, & linea GB, quæ ſtationum intervallum eſt, efficient triangulum BAG, cujus innoteſcunt anguli B, & G, & baſis BG. Tribus his notis facile invenietur latus AB, vel AG diſtantiam exprimens puncti A, aut B a puncto G (417),

PROBLEMA V.

425. *Altitudinem inacceſſam metiri, puta montis AM, vel nubis AN* (*fig.* 53).

SOLUTIO I. Per præcedens problema quære diſtantiam BA, quæ tibi erit baſis trianguli dignoſcendi,

II.

II. Planum graphometri ſtatue horizonti perpendiculare: alidadam dirige ad punctum A, & gradus nota, ac minuta *a*, quæ alidada indicat in graphometro.

III. Ope libellæ (422) alidadam ſtatue horizonti parallelam ad punctum A; a quo mente lineam AM duces, quæ lineam horizontalem ab alidada effectam interſecet; & in graphometro gradus adnota, & minuta ab alidada horizontali indicata.

His peractis triangulum habebis ABM, cujus innoteſcit latus AB dimenſum; angulus B graphometro captus ſub arcu *a m*; angulus M, qui rectus eſt; & angulus A duorum angulorum notorum ſupplementum; ergo innoteſcet altitudo AM montis ſupra horizontem BM obſervatoris (417).

IV. Si capienda ſit altitudo nubis AN; nubes immobilis eſſe poteſt, aut mobilis. Si immobilis ſit, ejus altitudo, ut illa montis, capietur.

Si vero mobilis ſit; neceſſe erit, ut duo obſervatores alter in A, alter in G ambo ſuo graphometro alidadas dirigant ad idem nubis punctum, puta ad altius, & magis in occaſum vergens A; & ut angulos trianguli ABGA capiant eodem inſtante, quod ſigno aliquo indicabitur, puta ictu fiſtulæ bellicæ ad *x* dimidiam diſtantiam BG exploſæ. Tunc capietur nubis altitudo AM, ut dimetiri docuimus altitudinem AM montis inacceſſi AM.

Aliam magis ſcientificam methodum in trigonometria trademus, minuſque errori obnoxiam, ad hoc problema, tum præcedens, tum ſubſequens ſolvendum (702, & 705).

PROBLEMA VI.

426. *Duorum objectorum inacceſſorum diſtantiam invenire; puta verticum duorum montium C, & D (fig. 51).*

SOLUTIO. Cape ſtationes duas, veluti A, & B, a quibus uterque vertex videri poſſit; & pertica diſtantiam A B metire, quæ tibi baſis erit. A puncto A angulos D A B, CAB a radiis viſivis effectos metire. Pariter a puncto B angulos cape C B A, D B A quoque a viſivis radiis effectos.

I. In triangulo B D A innoteſcent anguli D A B, D B A, & latus A B, quod eſt intervallum dimenſum ſtationum; adeoque & latus A D innoteſcet (417).

II. In triangulo quoque A C B innoteſcent anguli C B A, C A B, & latus A B; adeoque innoteſcet & latus A C.

III. Tandem attendetur tertium triangulum C A D, cujus jam duo latera A D, A C nota ſunt. Quare ſi capiatur angulus comprehenſus D A C, habebitur latus ignotum C D, quod eſt diſtantia quæſita (418).

Ex duobus triangulis B D A, A C B haberi quoque poteſt diſtantia alterius ſtationis B a duobus objectis inacceſſis C, & D.

PROBLEMA VII.

427. *Objecti acceſſibilis, & horizonti perpendicularis, puta turris, altitudinem ex umbra metiri* (fig. 55).

SOLUTIO. Haſtam *a m* ſolo defige perpendicularem, adeoque turri A C parallelam. Tum haſtæ umbram *a* B, haſtæ ſupra ſolum altitudinem *a m*, & turris umbram M B metire in plano horizontali captam, ut & haſtæ umbra capienda eſt. Tandem proportionem inſti-

tue,

tue: haſtæ umbra eſt ad ejus altitudinem, ut turris umbra ad ejus altitudinem. Ex tribus primis terminis notis facile quartus invenietur (175).

Duo triangula *a* B *m*, A B M ſunt ſimilia; habent enim angulos omologos æquales. Angulus *m*, ſeu M cum horizonte a turri, & ab haſta effectus rectus eſt. Angulus *a*, ſeu A ad turris, & haſtæ verticem a radio ſolari A B, ſeu ab alio radio huic parallelo effectus in utroque triangulo æqualis eſt; tertius angulus utrobique ſupplementum ad duos rectos, utrobique pariter æqualis erit.

Ut turris acuminatæ umbra habeatur, non ſatis eſt umbræ terminum ad turrim uſque metiri: huic dimidia turris diameter addenda eſt. Turris enim ſummitas umbram efficiens in ſua diſtantia mediæ diametro correſpondet. Poteſt haſtæ umbra, & triangulum extra turris umbram, & triangulum capi.

PROBLEMA VIII.

428. *Altitudinem ad baſim acceſſam, puta turris A C, ſine umbra, & ſine graphometro metiri* (*fig.* 55).

SOLUTIO. Haſtam *a* G ſolo perpendicularem, adeoque turri parallelam defige. Ab haſta recede, puta in B H, donec turris ſummitatem A intueri poſſis per radium viſivum B *a* A per haſtæ ſummitatem tranſeuntem. Tandem turris punctum aliquod, puta M; inſpice radio horizontali B M, & in haſta punctum *m* nota, per quod tranſit radius horizontalis B M.

His peractis, duo habebis triangula æquiangula, ſeu ſimilia; nempe B *a m*, & B A M. Ergo (403) *in minori triangulo* latus B *m*, quod metiris, eſt ad latus *m a*, quod metiris; ut *in majori triangulo* latus B M, quod meti-

tiris, eſt ad latus MA, quod metiri non poſſes,

Lateri AM invento adde partem MC tuo horizonti inferiorem: habebis turris, ſeu objecti alterius cujuſque horizonti perpendicularis altitudinem.

PROBLEMA IX.

429. *Inacceſſam fluminis AD latitudinem ſine graphometro metiri*. (Fig. 56).

SOLUTIO I. Haſtam A terræ defige; cui, ut potes, horizontalem ſuperpones perticam rectam CB ſeptem, aut octo pedes longam. Perticæ hujus extremis C, & B regulas duas infige pinnulis inſtructas, & ſupra ſuum fulcrum mobiles, quas ad aliquod punctum D in oppoſita fluminis ripa diriges. Habebis triangulum BCD.

II. His peractis, intacta pertica, & regulis, haſtam ad acceſſibilem ripæ, in qua es, directionem converte, & inſpice ad quod punctum *d* regularum directiones concurrant. Diſtantia acceſſibilis a puncto A ad punctum *d* ripæ erit diſtantiæ inacceſſæ a puncto A ad punctum D æqualis: duo enim triangula, quorum vertices ſunt in punctis D, & *d*, æqualia ſunt, ſeu potius ſunt idem triangulum diverſis planis impoſitum (391).

III. Patet, eadem methodo quamvis aliam diſtantiam ſimilem fluminis latitudini capi poſſe; exempli gratia, diſtantiam puncti, in quo haſta defixa eſt, a turris, arboris, collis vertice. Nulla fortaſſe hac ad parvas diſtantias inacceſſas dimetiendas tutior methodus, miuſque errori obnoxia.

430. NOTA. Iiſdem principiis hactenus traditis plurima alia problemata longimetrica jam ſolutis ſimilia proponi, & reſolvi poſſunt.

At

At primo animadvertas velim, methodum hanc triangula ex triangulis ſimilibus reſolvendi, nunquam veritati, niſi proxime, accedere; quod ſæpius ſatis eſt, non tamen ſemper, in praxi. Deinde triangula hoc pacto aliquando reſolvi non poſſe; quum ſcilicet trianguli reſolvendi latus aliquod aut reſpectu reliquorum multo maxium eſt, aut multo minimum. Tunc enim difficillimum eſt, ne dicam ἀδύνατον parvum triangulum conſtruere magno perfecte ſimile; & conſectaria, quæ deducuntur a veritate plurimum modo exceſſu, modo defectu recedunt.

Trigonometria eadem problemata, & alia plurima ope ſolius arithmeticæ omni accuratione reſolvere docebit, nulloque erroris metu, niſi qui in aliquo ex angulis, aut lateribus datis occurrat; quæcumque angulorum, & laterum inæqualitas ſit in triangulis reſolvendis, quæ ipſa ſine alio triangulo reſolvuntur.

TRACTATUS II.

SUPERFICIES, SEU PLANIMETRIA.

431. DEFINITIO. Superficies aut planæ ſunt, aut curvæ. *Superficies plana* eſt figura nullam inter ſua latera depreſſionem, aut elevationem habens; ſeu figura, quam linea recta indefinita, & circa ſuperficiei punctum tamquam centrum revoluta in omnibus ſuis punctis tangeret. Hujuſmodi ad ſenſum eſt communis ſpeculi, aut aquæ ſtagnantis ſuperficies. *Superficies curva* figura eſt, cujus area (380), infinitis punctis conſtat inæqualiter elevatis, aut depreſſis; hujuſmodi eſt pilæ ſuperficies convexa, aut globi incendiarii, ſeu vitrei vacui ſuperficies concava.

Planimetria & ſuperficies planas conſiderat, quas in ſe ipſis metitur, & concavas, quas planis comparando metitur.

Planimetria re ipſa eſt ars planas ſuperficies dimetiendi. Has illa in ſe ipſis metitur. Superficierum curvarum menſura illas planis ſuperficiebus notis comparando obtinetur. Quare planimetriæ objectum eſt, directe, vel indirecte, ſuperficierum omnium menſura. De curvis ſuperficiebus in ſtereometria agemus; hic tantum de planis ſermo erit.

In ſuperficiebus planis conſiderari poſſunt earum *æqualitas*, earum *rationes*, earum *ſectiones*. Illas nos triplici hac ratione perpendemus.

ARTICULUS PRIMUS.

SUPERFICIERUM ÆQUALITAS.

PRimum de quadrilatero, tum de polygonis agemus. Triangula utrobique locum invenient.

PARAGRAPHUS PRIMUS.

DE QUADRILATERO.

432. DEFINITIO. Q*uadrilaterum* figura eſt, ſeu ſuperficies plana quatuor rectis terminata. Quadrilaterum pro ſuorum angulorum, & laterum diverſitate diverſa nomina ſortitur.

I. *Parallelogrammum* dicitur, quum ejus latera oppoſita ſunt parallela. A B C D eſt parallelogrammum, ut & B E F C (*fig.* 58).

II.

II. *Quadratum* dicitur, quum omnia ejus latera æqualia ſunt; & omnes quoque ejus anguli æquales ſunt. A B F G eſt quadratum (*fig.* 1.).

III. *Rectangulum* dicitur quum omnes angulos rectos habet, latera vero tantum oppoſita æqualia. A B C D eſt rectangulum (*fig.* 57).

IV. *Trapezium* dicitur, ſi nulla latera, aut duo tantum habeat parallela. A B C D eſt trapezium (fig. 57).

V. *Rhombus* dicitur, ſi omnia latera habeat æqualia, angulos vero oppoſitos tantum æquales. A B C D eſt rhombus (fig. 60).

VI. *Rhomboides* dicitur, quum anguli recti non ſunt, & latera oppoſita tantum ſunt æqualia. A B C D eſt rhomboides (*fig.* 59).

433. NOTA. Ex his definitionibus inferes, nomen *quadrilateri* eſſe genericum omnibus figuris congruens, quatuor rectis terminatis, adeoque & parallelogrammo, & trapezio; tum *parallelogrammi* nomen genericum eſſe quadrato, rectangulo, rhombo, & rhomboidi conveniens.

434. DEFINITIO. Recta a quadrilateri cujuſque angulo ad oppoſitum angulum ducta dicitur *diagonalis*. Exempli cauſa, in quadrilatero A B D C A rectæ A D, & B C ſunt duæ diagonales (*Fig.* 51). Item A C, & B C ſunt duæ aliæ diagonales (*Fig.* 57, 59).

Quadrilaterum quodvis & quatuor literis ad angulos poſitis, & duabus tantum A D ad angulos oppoſitos ſitis deſignatur (*Fig.* 59).

THEOREMA I.

435. *Quatuor cujuſvis quadrilateri anguli valent quatuor rectos* (*Fig.* 31).

DEMONSTRATIO. Sit quadrilaterum A B C D. Si ducatur diagonalis A D, dividet

hæc quadrilaterum in duo triangula, quorum anguli ex ipſis quadrilateri angulis fient.

In quovis triangulo tres anguli valent duos rectos (384): ergo ſumma angulorum duorum triangulorum ADB, ADC valebit quatuor rectos. Ergo ſumma quatuor angulorum quadrilateri æqualis angulis duorum triangulorum valet quatuor rectos. Q. E. D.

THEOREMA II.

436. *Diagonalis parallelogrammum quodvis in duas æquales partes, ſeu in duo triangula in omnibus æqualia partitur (fig. 59).*

DEMONSTRATIO. Sit parallelogrammum quodvis ABCD. Diagonalis BC illud dividit in duo triangula lateribus, & angulis æqualia. Siquidem:

I. Ex hypotheſi, & ex definitione parallelogrammi latus AB primi trianguli æquale eſt lateri CD ſecundi: latus AC æquale eſt lateri BD; latus BC eſt commune.

Item ex hypotheſi (432) angulus A primi trianguli æquale eſt angulo D ſecundi. Angulus ABC primi æqualis eſt angulo BCD ſecundi; ſunt enim alterni interni (359). Eadem ratione angulus ACB primi trianguli æqualis eſt angulo DCB ſecundi; ergo duo triangula ABC, DBC in omnibus æqualia ſunt.

III. Propoſitio *ſuperpoſitione* quoque demonſtrari poteſt (10). Superponatur enim D ipſi A, DC ipſi AB. Tunc (392) DB cadet ſupra AC, & BC erit ambobus triangulis commune. Ergo duo triangula ABC, DBC in omnibus æqualia ſunt. Q. E. D.

THEO-

PROBLEMA.

437. *Parallelogrammum conſtruere, cujus latera datis M, N æqualia ſint, & quod angulum habeat æqualem dato* O (*fig.* 59).

SOLUTIO. Ex puncto quovis A duc indefinitam AC; & ſupra hanc lineam fac angulum A æqualem dato O (344). In lateribus indefinitis AC, AB anguli A cape AC æqualem datæ M; & AB æqualem alteri datæ N.

II. Ex puncto C duc indefinitam CD parallelam lateri AB (363); & in hac cape CD = AB. Habebis tertium latus CD parallelogrammi. Ex puncto B ad D duc rectam BD. Erit hæc quartum latus parallelogrammi quæſiti.

ELEMENTA SUPERFICIERUM.

438. OBSERVATIO. Sicuti linea punctis contiguis conſtat, ita ſuperficies contiguis lineis componitur. Quum vero concipi puncta nequeant nulla extenſione donata, quæ longitudinem efficiant; ita lineæ concipi nequeunt, quæ nulla latitudine ſuperficiem obtegant (*Phy.* 47, & 63). Quare lineæ hæ contiguæ conſiderandæ ſunt ſuperficiem efficientes latitudine minima donatæ in ſingulis eadem.

Quamobrem *punctum mathematicum* conſiderari debet tamquam minimum quadratum, ſeu minimus circulus omni excogitato minor; & *linea mathematica* ut ſeries minimorum circulorum, aut quadratorum puncto mathematico æqualium. Si lineæ AB quadrata ſint infinite parva, erit hæc linea mathematica punctis mathematicis compoſita (*fig.* 10).

I. *Elementa ſuperficierum* ſunt lineæ latitudine infinite parva, & in lineis omnibus æqualis; ita ut centies millia millium harum

linearum contiguarum in quavis ſuperficie X latitudinem efficiant omnino æqualem latitudini, quam centies millia millium linearum contiguarum in alia quavis ſuperficie Y efficiunt. Inæqualis corporum denſitas, diverſa pororum copia, nihil linearum geometricarum naturam immutat; hic enim hujuſmodi inæqualitates non conſiderantur; omnia quippe corpora poris carentia conſiderantur, & lineæ eorum elementares vacuis interruptæ.

Lineæ hæ, ſuperficierum elementa, a geometris conſiderantur tamquam *elementa indiviſibilia*; quum enim latitudinem habeant tantum infinite parvam, quæ non conſideratur, cenſentur latitudine indiviſibiles; etſi re ipſa æque hac dimenſione dividi poſſint.

II. *Elementa parallelogrammi* ſunt infinitæ lineæ parallelæ, & baſi æquales, quæ ſpatium replent ſuis lateribus incluſum. Spatium hoc dicitur ſuperficies, ſive area. Horum elementorum numerum dimetitur *perpendicularis baſi*, quæ eſt parallelogrammi *altitudo*. Quare ſi parallelogrammi altitudo alterius parallelogrammi altitudinis dupla eſt, numerus elementorum primi duplus eſt elementorum ſecundi; ſi tripla, triplus eſt elementorum numerus; atque ita porro. Linea AB numerum elementorum parallelogrammi ABCD metitur (*fig.* 57).

III. *Elementa trianguli* ſunt infinitæ lineæ baſi parallelæ, quæ eo breviores ſunt, quo magis a baſi recedunt. Horum elementorum numerum, ut in parallelogrammo, metitur in triangulo perpendicularis a vertice in baſim, ſi opus ſit, productam, demiſſa. Linea AB elementorum trianguli ACB numerum metitur (*fig.* 57).

IV. *Elementa circuli* ſunt infinitæ peripheriæ concentricæ, quæ ſcilicet idem cum circulo centrum habent. In circulo numerum peripheriarum concentricarum metitur *radius*;

quum

quum enim circulus perjpheriis obtegatur, patet, peripheriarum numerum eſſe radii punctis æqualem. Linea CA numerum elementorum circuli ADA metitur (*fig.* 54).

V. *Elementa aliarum ſuperficierum*, uti trapeziorum, polygonorum, ſectorum circuli, ſunt infinitæ lineæ, quas ad præcedentium figurarum lineas adducere poſſumus; ut in progreſſu patebit.

Quum ſæpius *indiviſibilium methodo* uſuri ſimus, illam hic explicare opportunum erit. Hanc invenit ſæculo ſuperiore inſignis geometra Bonaventura Cavallerius Mediolanenſis Hieronymita (*a*), atque edidit anno 1635 latino opere, cujus titulus geometriæ indiviſibilium in continuo conſentit. Cavallerius *continuum* conſideravit (*Phy.* 44) ut conſtans infinito partium numero, quæ in decompoſitione ejus extrema elementa ſunt, ultra quæ ulterius progredi non detur illud parallelis ſectionibus dividendo. Hæc poſtrema elementa ſunt, quæ ipſe vocat *indiviſibilia*; & pro ratione, qua creſcunt, aut decreſcunt figurarum menſuram, aut earum rationem ipſe inveſtigat. Nunc qua ratione impoſterum hæc elementa conſideraturi ſimus, quæ æque ut ſolidorum elementa conſiderabimus, explicare pergimus (*fig.* 57),

VI. Si in rectangulo ABCD, exempli gratia, concipiantur duæ lineæ BC, *bc* parallelæ & infinite proximæ, non contiguæ; ſpatium infinite parvum lineis hiſce incluſum, ſeu linea latitudine infinite parva, quæ hoc ſpatium obtegeret, erit *elementum rectanguli* ABCD, ſeu trianguli ACB. At patet, indeterminato elementorum ſimilium numero omnium æqualium, & contiguorum ſuperficiem rectanguli ABCD effectum iri (*fig.* 57).

(a) *Non Hieronymita erat Cavallerius, ſed Jeſuatus.* Interpres.

Etſi horum infinite parvorum elementorum numerus definiri nequeat, quorum ſumma ſuperficiem quamcumque ABCD efficit; ſuppoſita rectanguli altitudine AB unius pollicis, & elementorum, de quibus ſermo, decies centena millia continente; patet, rectangulum aliud baſi æquale, altitudine duplum, ſimilibuſque elementis conſtans, dupla elementa, ſeu vicies centena millia contenturum; tertium triangulum altitudine primo æquale, baſi ejus duplum duplam ſuperficiem habiturum; eundem quippe elementorum numerum haberet, quorum quodvis eſſet illis duplo longius; atque ita porro. Pari modo (*fig.* 4):

Si in quadrato ABCDA concipiantur lineæ duæ *mn*, *rs* parallelæ, & infinite proximæ; infinite minima diſtantia his parallelis incluſa, ſeu linea infinite parva, quæ hoc ſpatium obtegeret, eſſet *elementum ſuperficiei quadratæ* ABCDA.

Et ſi concipiatur infinite parva latitudo lineis his incluſa eſſe altitudo infinite parva ſectionis planæ, & infinite parvæ *mmxrr* in cubo BF effectæ; ſectio hæc infinite parva, & ut indiviſibilis conſiderata in infinite minima ſua altitudine erit *elementum cubi* AF. Poſita tota cubi AB altitudine unius hexapedæ compoſita elementis millies millies millibus ſectioni *mmxrr* æqualibus; patet, cubum altitudine duplum duplum ſimilium elementorum numerum contenturum, & ſingula hæc elementa fore longitudine, & latitudine dupla, ſeu ſuperficie quadrupla; duoſque cubos ſoliditate inter ſe fore, ut 1 at $4 \times 2 = 8$. Pari item modo (*fig.* 68).

Si in triangulo ACB lineæ AB, *mn* ſint parallelæ, & infinite proximę, nec contiguæ; infinite parva ſuperficies hiſce incluſa, ſeu linea latitudine infinite parva, quæ hoc ſpatium obtegeret, erit *hujus trianguli elementum*. Et

ſi

ſi in circulo ADA, duæ peripheriæ ADA, *mrm* ſint æque infinite proximæ, nec contiguæ; infinite parva ſuperficies circularis his incluſa, ſeu linea circularis latitudine infinite parva, quæ minimam hanc ſuperficiem obtegeret, erit *elementum ſuperficiei circularis*, quod evolutum in ſuperficiem rectilineam latitudine infinite parvam fiet trapezium infinite minimum A*mn*B.

VII. Antiquis Euclidis, & Archimedis vocibus aures aſſuetæ novo hoc Cavallerii loquendi modo, qui minus geometricus non apte illum intelligentibus videbatur, exhorruerunt. At Cavallerius oſtendit, methodum ſuam nihil a geometrico rigore recedere, eamque eſſe ipſam veterum *exauſtionis methodum* ſimpliciorem effectam. Re ipſa, inquit auctor hiſtoriæ mathematicæ, ſuperficies hæ, & lineæ, quarum Cavallerius ſummas, & rationes expendit ſunt ipſa Archimedis exigua ſolida, vel triangula inſcripta, & circumſcripta adeo multiplicata, ut eorum differentia a figura, quam circumſcribunt, minor ſit quacumque data quantitate. Dum vero Archimedes ad figuræ curvilineæ rationem ad alteram datam oſtendendam longo utitur verborum ambitu, & indirecta demonſtrandi methodo; recens geometra veluti infinitum ingreſſus (238) ultimum harum perpetuarum diviſionum terminum arripit, quæ nullam tandem figurarum inſcriptarum differentiam a curvilinea, quam continent, efficere debent.

Hac ferme ratione quum progreſſionis geometricæ decreſcentis ſumma definitur (295), poſtremus terminus zero æqualis aſſumitur. Etſi enim nunquam ad poſtremum hunc terminum perveniri poſſit; evidenter tamen mens percipit, eum quacumque ut ut minima data quantitate minorem eſſe; adeoque tantum ipſo zero deſignari poſſe; nullitas enim tantum omni aſſignabi-

li quantitate minor eſt. Eodem modo lineæ, & ſuperficies concipiendæ ſunt, ex quibus Cavallerius figurarum, aut ſolidorum elementa format, ut poſtremæ diviſiones, de quibus egimus. Hoc ſatis eſt ad quidquid durum, & rigori geometrico oppoſitum Cavallerii locutioni ineſſe poſſit mitigandum. Ceterum nullus eſt caſus, in quo Cavallerii methodus ad veterem demonſtrandi formam facile adduci nequeat; quare hoc eſt in cortice ſiſtere, & de voce *indiviſibilium* litigare. Impropria erit hæc, ſi lubet, (*Phy.* 68): nihil tamen ab illa geometria detrimenti capit; nec in errorem inducit, imo vero hac methodo veritates detectæ fuerunt, quæ ad illa uſque tempora geometrarum omnium conatus eluſerant.

Futilia nonnulla *methodo indiviſibilium* obiici poſſunt, quæ æque contra quamvis aliam geometricam infiniti theoriam faciunt; qua theoria recentiores geometræ uberi fructu tum in elementari, tum in tranſcendente geometria uſi ſunt; & in qua jure *quævis differentia* nulla cenſetur, quę ſit duarum quantitatum ſimul comparatarum pars infinite parva (241). Pluribus hujus tractatus, & ſequentis articulis apparebit qua elegantia, atque facilitate plura hac methodo demonſtrentur.

Ex hactenus expoſitis, & explicatis ſequens propoſitio ſequitur, quæ ita per ſe evidens eſt, ut inter axiomata recenſeri poſſit.

439. AXIOMA. *Duæ figuræ, aut ſuperficies æquales ſunt, quum unius elementa alterius elementis æqualia ſunt, & æqualis eorum utrobique eſt numerus.* Sive figurę hæ ſimiles ſint, ſive diſſimiles. Exempli gratia, trianguli, & circuli ſuperficies æquales ſunt, ſi idem in utraque ſit linearum elementarium numerus, & ſi ſingulæ trianguli lineæ ſingulis circuli lineis ſint æquales.

THEO-

THEOREMA I.

440. *Rectangulum, & parallelogrammum obliquangulum eandem habentia baſim, & altitudinem ſunt æqualia* (*fig.* 58).

DEMONSTRATIO. Sit rectangulum ABCD, & parallelogrammum obliquangulum BCFE. Eandem habent baſim BC; eandem quoque altitudinem: iiſdem enim parallelis BCK, ADF continentur.

I. Triangulum BOC eſt utrique commune. Oſtendendum ergo tantum ſupereſt, partem ABOD rectanguli eſſe parti EOCF parallelogrammi æqualem; quod ſic præſto.

II. Triangulum ABE eſt æquale triangulo DCF. Perpendicularis enim AB primi æqualis eſt perpendiculari DC alterius; ſunt enim rectanguli latera oppoſita, quæ æqualia ſunt. Tum rectæ AE, DF æquales ſunt; partem enim DE communem habent; & reliquæ partes AD, EF quum ſingulæ ſint baſi BC æquales, inter ſe æquales erunt. Quare tria unius trianguli latera tribus alterius æqualia ſunt. Ergo duo hæc triangula ſunt æqualia.

III. Aufer partem DOE utrique triangulo communem: reſiduum ABOD primi trianguli reſiduo EOCF alterius erit æquale. Atqui hæ ſunt partes rectanguli, & parallelogrammi æquales oſtendendæ. Ergo rectangulum, & parallelogrammum obliquangulum ſunt æqualia. Q. E. D.

441. NOTA I. Si pro parallelogrammi BCFE elementis capiantur elementa baſi BC parallela; *elementa rectanguli, & parallelogrammi numero, & longitudine erunt æqualia.*

II. Si pro parallelogrammi elementis capiantur elementa parallela lateri CF, quæ tamquam baſis conſiderari poſſunt; *parallelogrammum pauciora rectangulo elementa habebit, lon-*

longiora tamen; & exceſſus longitudinis numeri defectum compenſabit. Altitudo rectanguli ſemper erit AB; altitudo parallelogrammi obliquanguli, ſi ſumatur CF, tamquam baſis, erit OH. Ergo parallelogrammum longitudine majus, altitudine brevius erit. Alterum itaque altero compenſabitur. Exempli gratia.

Rectangulum ſit pollicem longum, & latum; parallelogrammum ſit centum pollices longum, $\frac{1}{100}$ latum. In rectangulo habebimus $1 \times 1 = 1$; in parallelogrammo $100 \times \frac{1}{100} = 1$.

THEOREMA II.

442. *Triangulum eſt parallelogrammi ejuſdem baſis, & altitudinis dimidium* (*fig.* 57).

DEMONSTRATIO I. Sit triangulum ABC. Fiant omnia ejus elementa baſi BC æqualia: habebo parallelogrammum ABCD in duas æquales partes a diagonali AD diviſum (436). Atqui alterutra ex his æqualibus partibus eſt parallelogrammi dimidium.

II. Idem de triangulo quovis rectangulo, obtuſangulo, acutangulo demonſtrari poteſt. Sit enim triangulum ABC (*Fig.* 59). Duc rectam CD lateri AB æqualem, & parallelam, & perfice parallelogrammum ABDC. Deinde concipe tot parallelas baſi AC, quot ad parallelogrammi ſuperficiem obtegendam ſunt neceſſariæ. Diagonalis BC hanc ſuperficiem in duas æquales partes dividet, quarum altera erit trianguli ſuperficies. Q. E. D.

THEOREMA III.

443. *Triangulum parallelogrammo baſi æquale, altitudine duplum ipſi eſt æquale* (*Fig.* 61).

DEMONSTRATIO. Sit parallelogrammum quod-

quodvis ABDC, & triangulum CED, cujus baſis CD eadem eſt, quæ parallelogrammi, altitudo vero EH dupla eſt. Dico has ſuperficies eſſe æquales.

I. Sit aliud parallelogrammum CGFD inter latera producta primi, & baſi, atque altitudine triangulo CED æquale. Parallelogrammum CGFD erit ipſius CABD duplum; duplum enim habet æqualium elementorum numerum; ſeu ſub eadem longitudine CD duplam altitudinem EH.

II. Jam vero *parallelogrammum* ABCD eſt dimidium parallelogrammi CGFD, ut oſtendimus. *Triangulum* CED eſt parallelogrammi CGFD dimidium, per theorema præcedens. Ergo parallelogrammum ABDC, & triangulum CED ſunt æqualia; utrumque enim *dimidio* parallelogrammo CGFD æquale eſt.

III. Idem demonſtrari poſſet, ſi triangulum, ſtante eadem baſi, verticem haberet E in F translatum, ſive in G, aut in M, ſervata ſemper eadem altitudine, ſive ſemper ad parallelas CD, MF pertingendo; ſemper enim eſſet dimidium parallelogrammi CGFD ejuſdem baſis, & altitudinis (442). Ergo in quavis hypotheſi triangulum parallelogrammo baſi æquale, altitudine duplum ipſi eſt æquale. Q. E. D.

THEOREMA IV.

444. *Superficies trapezii, cujus baſes ſuperior, & inferior ſunt parallelæ, æqualis eſt parallelogrammo ejuſdem altitudinis, cujus baſis æqualis eſſet lineæ trapezium biſecanti ſectione baſi parallela* (*Fig.* 62).

DEMONSTRATIO. Sit trapezium CABD, cujus baſes AB, CD ſint parallelæ. Duc rectam LH baſibus parallelam, & ab utraque baſi æque diſtantem. A puncto H duc PE lateri AC parallelam (363). Dico, trapezium

CABD

CABD eſſe parallelogrammo CAEP æquale.

I. Pentagonum ACPHB eſt tum parallelogrammo, tum trapezio commune. Demonſtrandum ergo ſupereſt, partem PHD trapezii parti BHE parallelogrammi æqualem eſſe.

II. Pars PHD trapezii parti BHE parallelogrammi æqualis eſt. Hæc enim triangula ſunt æqualia. Angulus H utrobique æqualis eſt: ſunt enim duo anguli ad verticem oppoſiti. Anguli D, & B ſunt æquales, quum ſint alterni interni. Eadem ratione anguli P, & E ſunt æquales (359). Lineæ DH, BH ſunt æquales; utraque enim eadem inclinatione ſpatium dimidium metitur baſibus parallelis AB, CD incluſum. Ergo ſi horum triangulorum baſes ſint latera æqualia DH, BH, triangula BHE, PHD in omnibus erunt æqualia (391).

III. Trapezii, & parallelogrammi pars communis eſt pentagonum ACPHB. Trapezio præterea additur triangulum PHD, parallelogrammo triangulum BHE. Hæc ſunt æqualia; Ergo addita pentagono communi efficient duo tota æqualia. Q. E. D.

MENSURÆ SUPERFICIERUM.

445. OBSERVATIO. *Lineam*, ſeu extenſionem *metiri* eſt illi notas ejuſdem dimenſionis menſuras applicare, puta pollices, pedes, hexapedas, leucas. *Superficiem*, ſeu extenſionem in longum, & in latum metiri, eſt illi menſuras ejuſdem dimenſionis, ſeu longas ſimul, & latas applicare; puta pollices, aut pedes quadratos, hexapedas, aut leucas quadratas.

446. DEFINITIO. *Hexapeda quadrata* dicitur figura quadrata hexapedam longa, & lata. Ita pes quadratus eſt figura quadrata pedem longa, & lata (*Fig.* 4).

I. Si ſuperficies quadrata BADC ſit *hexapeda quadrata* ſex pedes BC longa, ſex pedes

BA

BA lata, quadrata continebit 36 ſingula pedi quadrato æqualia. Quilibet *pes quadratus* A pollices 12 longus, & totidem latus pollices quadratos continebit 144. Pollex quiſque quadratus lineas duodecim longus, & latus lineas quadratas continebit 144. Hinc intelliges quid ſit *leuca quadrata*; quadratum ſcilicet leucam longum, & latum; atque ita de reliquis.

II. Quum menſura quadrati facillime intelligatur, omnes ſuperficies quantum fieri poteſt ad quadrata reducuntur; *& ſuperficies dimenſa cenſetur, quum quadrato noto æqualis demonſtratur*, ſeu figuræ facile ad quadratum adducendæ, ſeu cujus ratio ad quadratum nota ſit; cujuſmodi eſt rectangulum. Hoc patebit ſequenti theoremate, quo ad menſuras notas rectanguli ſuperficiem adducere addiſcemus, adeoque ſuperficiem quamvis noſcere huic rectangulo, aut ejus dimidio æqualem; atque ita de ceteris.

THEOREMA.

447. *Superficies cujuſque rectanguli producto baſis in altitudinem æqualis eſt* (*fig.* 63).

DEMONSTRATIO I. Sit rectangulum AB CD, cujus baſis BC ſit hexapedarum quatuor, altitudo trium. Si baſis = 4 in altitudinem = 3 ducatur, productum erit 12. Oſtendendum in hoc rectangulo hexapedas 12 quadratas contineri.

Altitudinem AB in hexapedas tres, baſim BC in tres divide. Per puncta diviſionis lateris AB duc baſi parallelas; & per puncta diviſionis baſis duc lateri AB parallelas. Harum interſectiones hexapedas quadratas efficient ordine baſi parallelo diſpoſitas. Series quævis totidem hexapedas quadratas continebit, quot hexapedas baſis longa eſt, nempe quatuor.

At

At totidem erunt ſeries hexapedarum quadratarum, quot altitudo AB rectanguli hexapedas longa eſt, nempe tres. Ergo hexapedarum quadratarum rectanguli ſumma eſt 4×3. Porro hic eſt numerus hexapedarum baſis in numerum hexapedarum altitudinis AB ductus.

II. Si baſis BC non quatuor, ſed mille hexapedas longa eſſet, ſtante eadem altitudine, patet ſuperficiem habituram tres hexapedarum quadratarum ſeries, ſingulas hexapedarum mille quadratarum. Eſſent ergo hæ 3000; productum baſis 1000 in altitudinem 3.

III. Si baſis BC 1000 hexapedas longa eſſet, altitudo AB 100; patet, ſuperficiem habituram ſeries 100 ſingulas hexapedarum 1000 quadratarum. Haberentur ergo hexapedæ quadratæ 100000 productum baſis 1000 in altitudinem 100; atque ita porro in infinitum. Q. E. D.

448. COROLLARIUM I. Quum ſuperficies rectanguli ſit productum baſis in altitudinem; patet, *idem productum expreſſurum figuram quamvis rectangulo æqualem*. Exempii cauſa: quum demonſtratum fuerit, datum parallelogrammum obliquangulum, aut datum triangulum eſſe rectangulo æquale, ſumpta rectanguli menſura, habebitur quoque parallelogrammi aut trianguli menſura. Hinc ſequitur.

I. *Superficiem parallelogrammi obliquanguli eſſe productum ſuæ baſis in altitudinem*; in perpendicularem nempe a latere baſi parallelo in baſim demiſſam; eſt enim hoc parallelogrammum æquale rectangulo ejuſdem baſis, & altitudinis.

II. *Superficiem cujuſvis trianguli eſſe productum ſuæ baſis in dimidiam altitudinem*; nempe in dimidiam perpendicularem a vertice in baſim productam, ſi opus ſit, dimiſſam. Eſt enim triangulum dimidium parallelogrammi, adeoque, & rectanguli ejuſdem baſis, & altitudinis (442).

III.

III. *Superficiem trapezii, cujus baſes ſint parallelæ, eſſe productum mediæ proportionalis arithmeticæ inter duas baſes in altitudinem*; trapezium ſiquidem CABD eſt æquale parallelogrammo CAEP (444) quod eſt æquale rectangulo ejuſdem baſis, & altitudinis.

Linea LH æqualis baſi CP parallelogrammi eſt media proportionalis arithmetica inter trapezii baſim ſuperiorem, & inferiorem. Hoc eſt: baſis CD tanto excedit lineam LH, quanto hæc baſim AB; ita ut ſumma ambarum baſium duplæ LH æqualis ſit; & ſumpta dimidia baſium ſumma habeatur media proportionalis arithmetica LH (185).

IV. *Si nullum trapezii ABDCA latus ſit ſibi oppoſito parallelum*, ducendam eſſe diagonalem ab angulo quovis ad oppoſitum. Hæc AD, vel BC trapezium in duo triangula dividet, quorum ſingula ſeorſim metiemur ad eorum ſuperficiem habendam. Horum ſumma ACB, & CBD toti trapezio æqualis erit (*Fig* 51).

449. COROLLARIUM II. *Si plura ſint rectangula, aut parallelogramma obliquangula ejuſdem altitudinis, habebitur ſumma ſuperficierum ductis baſibus omnibus in unicam altitudinem* (Fig. 63).

DEMONSTRATIO I. Sint plura quævis rectangula AB*nn*, *nnrr*, *rr*DC iiſdem parallelis AD, BC incluſa: eandem habebunt altitudinem AB, vel *nn*. Duc totam baſim BC in altitudinem *nn*. Habebis ex theoremate præcedente omnium rectangulorum ſuperficiem.

II. Plura parallelogramma obliquangula ejuſdem cum rectangulis baſis, & altitudinis ſingula ſingulis erunt æqualia (440): ergo horum omnium parallelogrammorum baſi totali ducta in communem altitudinem alicujus, eorum omnium ſuperficies obtinebitur.

III. Nihil refert ſint ne hæc parallelogramma conjuncta, aut disjuncta; patet enim, ſejun-

junctis rectangulis AB*nn*, *nnrr*, *rr*CD nec ſuperficiem addi, nec auferri. Exempli cauſa (*Fig.* 16).

Sint rectangula ſeparata *a*AB*b*, *m*MNH, T*r*S*n* iiſdem parallelis CT, AR incluſa. Patet, ductis AB+MN+*r*S in altitudinem *a*A, vel *m*M totalem habitum iri eorum ſuperficiem; eandemque quoque habitum iri trium parallegrammorum obliquangulorum, cujuſmodi eſt TRV*n*, eandem cum rectangulis baſim, & altitudinem habentium. Q. E. D.

450. COROLLARIUM III. *Plurium triangulorum ejuſdem altitudinis ſuperficies invenietur, ducta ſumma baſium in dimidiam unius altitudinem* (*Fig.* 16).

DEMONSTRATIO. Sint triangula ACB, MHN, RTS ejusdem altitudinis, quum ſint iiſdem parallelis CT, AS incluſa. Horum quodlibet dimidio parallelogrammo ejuſdem baſis, & altitudinis eſt æquale (442); atque hoc rectangulo æquale eſt ejuſdem baſis, & altitudinis *ab*BA, ſeu *m*HNM, ſeu T*r*S*n* (440): ergo triangula hæc ſunt horum rectangulorum dimidia. Jam vero baſes omnes rectangulorum in unicam altitudinem ducendo habetur ſumma ſuperficierum rectangulorum (449); ergo has eaſdem baſes ducendo in dimidiam altitudinem habebitur productum dimidio minus (221), quod omnium triangulorum ſuperficiem exprimet. Q. E. D.

451. NOTA. Quum in numeris integris, & in homogeneis quantitatibus habetur rectanguli, ſeu parallelogrammi obliquanguli, ſeu trianguli baſis, & altitudo, facile eſt eorum ſuperficiem invenire; tunc enim ſatis eſt numerum, quo baſis exprimitur, in numerum ducere, quo exprimitur altitudo; ut modo explicatum eſt.

At ſæpe numero duæ hæ dimenſiones non ſunt menſuræ, aut quantitates omnino homogeneæ. Exempli cauſa, baſis erit hexapedarum

18,

18, & pedum 4; altitudo hexapedarum 7, pollicum 5. Tunc ad harum figurarum ſuperficiem inveniendam productum baſis in altitudinem quærendum eſt aut per partes aliquotas (70); aut alia methodo quamprimum tradenda, & methodo partium aliquotarum valde affini (462).

PROBLEMA I.

452. *Parvi ſoli, puta prati, aut agri, ſuperficiem metiri*.

SOLUTIO I. Si ſolum dimetiendum ſit parallelogrammum rectangulum, aut obliquangulum, cujus illico longitudo, quæ baſis erit, & latitudo, quæ altitudo erit, capi poſſit; facile eſt ejus ſuperficiem invenire. Exempli gratia; (*Fig.* 57).

Sit A B C D ſolum dimetiendum. Cape primum pro baſi latus B C; & funiculo a B ad C tenſo pertica ſuper hunc baſim B C metire. Dein a puncto quovis C hujus baſis tende ad latus oppoſitum A D parallelogrammi alium funiculum C D; & hunc quoque pertica metire: erit hic parallelogrammi A B C D altitudo. Productum baſis B C in altitudinem C D erit area ſoli dimetiendi A B C D (448).

II. Si ſolum dimetiendum ita ſit irregulare, ut neque parallelogrammum ſit, neque trapezium, neque triangulum; animadverte, nullum eſſe ſolum, quod in triangula partiri nequeas illud in partes ſive æquales, ſive inæquales dividendo. Exempli cauſa (*Fig.* 64),

Sit ſolum dimetiendum figura ABFGKIECDA. Haſtas in omnibus hiſce punctis defige: ſolum in octo triangula diviſum habebis, quæ ſingula ſeorſim dimetieris, ut præcedens parallelagrammum dimenſus es.

Tende igitur funiculum ab A ad B, & pertica lineam A B metire, quæ tibi baſis erit. Dein

Dein a puncto C alium funiculum tende baſi A B, ſi opus ſit productæ, perpendicularem: erit hic trianguli A B C altitudo. Duc baſim A B in dimidiam perpendicularem a puncto C in baſim A B demiſſam: productum erit area trianguli A B C (448 II.).

Eodem modo in triangulo B D F, & in reliquis operando, triangulorum omnium areas invenies: harum octo arearum ſumma erit ſoli dimetiendi area.

III. Problema hoc, ut patet, eſt *agrimenſuræ* fundamentum: hæc ſiquidem eſt ars geometrica dimetiendi, & ad quadratas menſuras reducendi ſolum quibuſdam datis punctis, & lineis ad hæc puncta ductis incluſum. Agrimenſuram Galli *arpentage* vocant ab *arpent* (7.V.) menſura agris dimetiendis magis communi.

Sequentia problemata *topographiæ* erunt fundamentum. Porro hæc eſt amplioris agrimenſuræ ſpecies, ſive ars geometrica amplioris ſoli, puta provinciæ, aut regni, dimetiendi. Topographia a τόπος *locus, regio*; & γράφω, *ſcribo*.

PROBLEMA II.

453. *Provinciæ, aut regni aream metiri* (*Fig.* 64).

SOLUTIO. Ad hanc dimetiendam, illam in plura triangula partiri oportet, ut in exemplo præcedente, quibuſdam ſignis in eminentioribus locis ſtatutis, puta in collium, montium, turrium verticibus, & ſingulorum trangulorum area ſeorſim invenienda eſt. Triangula hæc A B C, K I D fient ab radiis viſivis ab uno ad alterum ſignum graphometro ductis. Exempli gratia: graphometro in A poſito, atque altero in B (420); a puncto A per pinnulas dirigetur radius ad ſignum montis B, & alter radius ad ſignum montis C: dein a puncto B di-

dirigetur quoque radius ad ſignum montis A, & alter radius ad ſignum montis C. Sumpta in graphometro angulorum A, & B menſura (423), habebitur triangulum A B C, cujus tres anguli noti ſunt. Eodem modo cujuſvis alterius trianguli C D E, F K D anguli capi poſſunt. Quare,

I. Signi a ſigno diſtantia primum invenienda eſt, ut hæc diſtantia quævis A B fiat baſis nota trianguli A B C. Ut hanc diſtantiam invenias A B, in æquali ſolo duas ſelige ſtationes, *a*, & *b*, quarum diſtantiam *a b* pertica omni diligentia metieris. Dein graphometrum ſtatue in *a*, alterum in *b*, & ex triangulo A *a* B diſtantiam A B obtinebis (426).

II. Nota diſtantia A B, ex A, & B graphometro capies angulos A B C, B A C. In triangulo ABC nota eſt baſis A B, & anguli ad hanc baſim noti ſunt; ergo totum triangulum notum eſt (417).

III. Graphometro in B poſito in C, & in D collima, & angulum C B D metire; item graphometro in C collima in B, & in D, ubi antea ſignum ſtatueris; & angulum B C D metire. Habebis triangulum C D B, cujus baſis C B; (latus trianguli præcedentis), & duo latera ad baſim innoteſcunt; ergo totum triangulum innoteſcit; & latus B D fiet baſis nota trianguli B D F, quod pari modo metieris. Latus D F notum fiat ipſum quoque baſis trianguli D K E; atque ita perges pro reliquis.

IV. Hac ratione tibi innoteſcent triangula omnia, quæ in ſuperficie provinciæ, aut regni fieri poterunt; & ducta cujuſque trianguli baſi in dimidiam altitudinem, cujuſque trianguli aream aſſequeris (448). Sumpta deinde omnium triangulorum ſumma totius provinciæ, ſeu regni dimetiendi ſuperficiem habebis; neque enim hæc ab omnium triangulorum area

diverſa eſt, quæ deſcripſiſti, & quæ illam totam amplectuntur.

In trigonometria videbimus qua ratione ſupputatione tantum, & ſine minoris trianguli ſimilis deſcriptione cujuſvis trianguli in ſolo dimenſi area inveniri poſſit (704).

454. NOTA. Hic ponimus, ſtationes omnes A, B, C, D, I, reliquaſque, eſſe ad libellam, ſeu æque a terræ centro diſtantes. Alibi oſtendemus quid agendum ad errores evitandos, quos diverſa ſtationum elevatio parere poteſt (538).

PROBLEMA III.

455. *Regionis chorographiam deſcribere* (*Fig.* 65).

SOLUTIO. I. Primum longam baſim AB metire, unde præcipua regionis objecta videre poſſis, ut urbes, oppida, pagos, colles præcipuos; quæ indicata ſupponimus literis C, D, E, F, G, H. Baſis hæc aut pertica, ſi ſolum æquabile, & acceſſibile ſit, aut ope longimetriæ (424), haberi poteſt, ſi recta a C in D pergi nequeat. Puncta hæc haſtis, & ſignis indicari debent.

II. In A graphometrum ſtatue, cujus pinnulæ duæ ſemper ad B directæ ſint; dum vero alidadæ pinnulæ ad alia omnia objecta dirigentur, angulos cape, & adnota, quos radii per pinnulas trajecti efficient, nempe angulos CAB, DAB, EAB, FAB, GAB, HAB; ac reliquos.

III. Ad B graphometrum ſtatue, cujus pinnulæ duæ ſemper ad A directæ ſint; dum vero alidadæ pinnulæ ad eadem objecta convertuntur, in graphometro cape, & adnota angulos CBA, DBA, EBA, FBA, GBA, HBA. In his triangulis omnibus habebis baſim AB, quam in ſolo dimenſus es, & angulos duos,

quos

quos graphometro obtinueris. Ergo omnia triangula innoteſcent (417).

IV. Triangula hæc omnia chartæ deſcribenda ſunt, & omnibus objectis obſervatis poſitio aſſignanda, quam in ſolo obtinent. Ad hæc utere ſcala in partes æquales opportunæ extenſionis accurate diviſa (411); & in charta in qua chorographiam deſcribere vis, duc rectam AB in tot æquales partes diviſam, quot hexapedas continet baſis in ſolo dimenſa.

Poſt hæc ad punctum A ope ſemicirculi eoſdem lineis indefinitis angulos deſcribe CAB, DAB, quos in ſolo inveniſti. Item ad punctum B eoſdem angulos CBA, DBA, &c. in ſolo inventos deſcribe. Lineæ hæ indefinitæ AC, & BC, AD, & BD, ac reliquæ ſe interſecabunt in C, D, E, F, G, H. Interſectiones hæ dabunt reſpectivam objectorum omnium in charta deſcribendorum poſitionem: continet enim charta hæc plurima triangula triangulis in ſolo effectis ſimilia. Eodem modo poſitionem obtinebis objectorum in interſectionibus *a*, *b*, *c*, *d* poſitorum.

V. Facile intelliges, iiſdem peractis in lineis omnibus figuræ 64, ſumpta pro baſi linea quavis AB, habitum iri reſpectivam præcipuorum objectorum omnium poſitionem, quæ in triangulorum provinciam, aut regnum complectentium ambitu ſita ſint. Triangula hæc omnia, & objecta iis contenta in charta, aut tela deſcribendo cum reſpectivis angulis, provinciæ, aut regni chorographia deſcribetur.

TABELLA PRÆTORIANA. PYXIS MAGNETICA.

456. NOTA. Alia eſt methodus topographicas tabulas deſcribendi eo facilior, quo paucis indiget, & qua dum objecta obſervantur, quo-

rum poſitio inquiritur, ea dum adhuc videntur in tabula deſcribuntur.

I. Inſtrumentum, quo ad hæc utimur, eſt tabula pedem, & ſemis longa, & lata, & fulcro inſiſtens, ut graphometrum. Tabulæ chartæ folium imponitur, quod coronide tabulam complectente obfirmatur. Huic tabulæ cochleæ ope ingens regula, ſive alidada affigitur pinnulis inſtructa, quæ circa centrum converti, & ad objecta in charta deſcribenda dirigi poſſit. Inſtrumentum hoc vocatur *tabella prætoriana*. Tabula quævis tabellæ hujus loco eſſe poteſt (*Fig.* 65).

Ad topographicam tabulam hoc inſtrumento deſcribendam, dimenſa baſi A B tabellam ſtatue in A, & haſtam in B defige. Alidadam converte directione AB, & lineam indefinitam AB deſcribe, quam in totidem partes ſcalæ divides (411), quot menſuras, puta hexapedas, in baſi A B ſupra ſolum inveniſti. Dein, tabella immota, alidadam A converte ad C, D, E, F, G, H; & ſecus alidadam duc rectas AC, AD, AE, AF, AG, AH, A *a*, A *b*, A *c*, A *d*.

Tum perpendiculo punctum ipſum A tabulæ cape; & in hoc puncto, remota tabella, haſtam defige. Tabellam in B transfer; & lineam AB tabulæ ſtatue in directione AB haſtarum B, A. Regulam mobilem affige puncto B, & eam ad eadem, quæ ſupra, objecta dirigendo deſcribe ſucceſſive rectas BC, BD, BE, BF, BG, BH, B *a*, B *b*, B *c*, B *d*: harum linearum interſectiones in charta dabunt reſpectivam objectorum omnium in ſolo obſervatorum poſitionem.

II. Ut deſcriptæ tabulæ puncta cardinalia inſcribantur ſive ut inveniamus quam linea quævis AB directionem habeat reſpectu auſtri, boreæ, ortus, & occaſus, paſſim utimur *pyxide ma-*

magnetica, cujus acus auſtum, & boream reſpicit ſub angulo declinationis noto, & facile inveniendo (*Phy.* 592).

Quum tabula chorographica graphometro deſcribitur, acus magneticæ *ab* poſitio facile indicat (420) quænam lineæ AB, vel CM poſitio ſit (*Fig.* 5).

Quum tabula chorographica tabellæ prætorianæ ope deſcribitur, ad puncta cardinalia definienda pyxis rectangula uſurpatur MN, (*fig.* 9.), quæ tabellæ ipſi, in qua deſcriptio fit, imponitur. Punctum M pyxidis imponitur puncto alicui lineæ duas ſtationes conjungentis; & ſupra hoc punctum M piyis convertitur donec acus ipſum angulum *acs* declinationis efficiat, quem hic cum linea meridiana *sv* efficere debet. Tunc in tabula ducitur linea indefinita MNX lateri MN parallela. Linea hæc in tabula meridiem, & ſeptentrionem indicat: altera huic normalis ortum, & occaſum indicabit.

Adhuc tutius puncta cardinalia tabulæ inſcribi poſſunt ſolo graphometro, & nulla pyxide magnetica; veſpere alidadam ad polum arcticum dirigendo, & angulum capiendo, quem graphometri axis, ſeu directio efficit cum linea duarum ſtationum (*Phy.* 1355).

PROBLEMA IV.

457. *Provinciæ, aut regni aream in tabula geographica metiri* (*Fig.* 64, 65).

SOLUTIO. Tabulam in parallelogramma, aut triangula divide; & vide quot cujuſque parallelogrammi, aut trianguli baſis ſcalæ æquales partes contineat. Si tabula accurate deſcripta ſit, regio totidem habere debet leucas quadratas, quot quadratas dimenſiones in tabula ſcala eſſe indicat; modo ſcala leucas indicet.

Quare ducta cujuſque parallelogrammi baſi in ſuam altitudinem cujuſque parallelogrammi aream obtinebis. Ducta quoque cujuſque trianguli baſi in dimidiam altitudinem, cujuſque trianguli aream obtinebis. Omnia hæc producta in ſummam collige, provinciæ, aut regni in tabula deſcripti ſuperficiem habebis.

PROBLEMA V.

458. *Quadratum parallelogrammo dato æquale deſcribere.*

SOLUTIO. Quum area parallelogrammi ſit productum baſis in altitudinem, quære his lineis mediam proportionalem (414): hæc in ſe ducta quadratum dabit æquale binarum illarum linearum producto, quæ ſunt proportionis extrema.

PROBLEMA VI.

459. *Quadratum dato triangulo æquale efficere.*

SOLUTIO. Quum trianguli area ſit baſis in dimidiam altitudinem ducta (448); quære hiſce lineis mediam proportionalem (414); hæc in ſe ducta quadratum dabit duarum illarum linearum producto æquale.

Quadratum eſt ſimpliciſſima ſuperficierum menſura. Figura, ſeu ſuperficies dimenſa cenſetur, quum ad quadratum adducta eſt, cujus dimenſio una nota ſit.

SUPERFICIERUM DIMENSIO.

460. DEFINITIO. *Superficierum dimenſio* eſt ars geometrica adducendi ad hexapedas quadratas, ſive ad earum portiones ſuperficiem planam cujus longitudo & latitudo in hexapedis aut earum partibus innoteſcat.

I. Quum

I Quum ſuperficies dimetienda in duabus ſuis dimenſionibus quantitates tantum homogeneas habet, puta hexapedas; facile menſuræ ſubjicitur ſumendo productum baſis in altitudinem. Productum hoc exprimit in hexapedis ſuperficiei quantitatem. Idem eſſet, ſi ſuperficies in utraque dimenſione pedes tantum, aut leucas contineret. Ductis enim invicem dimenſionibus, haberemus productum exprimens in pedibus, aut leucis ſuperficiei quantitatem.

II. Raro tamen ſuperficiei dimenſiones omnino homogeneæ ſunt. Exempli gratia; in rectangulo dimetiendo baſis erit hexapedarum 16, pollicum 10; tunc dimenſio complicatior, ac difficilior evadit.

Dimenſio hæc fieri poteſt ambas dimenſiones ad infimam ſpeciem adducendo, & productum dividendo, quum invicem ductæ fuerint, per quadratum numeri exprimentis quoties maxima ſpecies minimam continet ad quam binæ dimenſiones adductæ fuerunt (58).

Quum tamen methodus hæc incommoda ſit, alia ejus loco uſurpari ſolet: hæc methodo cuidam innixa eſt hexapedam quadratam dividendi; quæ ab hexapeda, ut ajunt, currente non eſt diverſa.

461. EXPLICATIO. Sit hexapeda quadrata ABCDA (*Fig.* 4).

I. Latus AB in ſex partes æquales divido, quæ ſingulæ valent pedem unum; & a punctis diviſionis duco ad aliud latus DC parallelas baſi. Ita hexapeda in ſex rectangula æqualia dividitur, quæ vocantur *pedes hexapedæ quadratæ*; ſingula enim altitudinem habent unius pedis, & baſim unius hexapedæ.

II. Pari modo altitudinem *mn* cujuſque pedis hexapedæ quadratæ divido in duodecim rectangula *mm*, *rr*, *nn*, quæ dicuntur *pollices hexapedæ quadratæ*; ſingula enim pollicem alta ſunt, & hexapedam baſim habent.

III. Adhuc pollicem quemvis *m r* hexapedæ quadratæ divido in duodecim rectangula, quæ erunt *linea hexapeda quadrata*; ſingulorum enim altitudo eſt linea, baſis hexapeda.

Diviſio hæc *hexapeda currentis*, ſive hexapedæ in longitudine optime non modo ſupputationi, verum & rei naturæ conſentanea eſt. Patet ſiquidem, quum longitudinem unius hexapedæ duco in altitudinem unius pedis exempli gratia, productum neque pedem eſſe, neque hexapedam, ſed rectangulum AD baſim habens hexapedam, altitudinem pedem; ſeu ſextam hexapedæ quadratæ partem. Pari modo ſi hexapeda in quatuor pollices ducatur, patet, productum neque hexapedam eſſe, neque quatuor pollices, ſed rectangulum *m m*, cujus baſis hexapeda, altitudo quatuor pollices; ſeu tertiam partem pedis hexapedæ quadratæ; atque ita de ceteris.

Ex his per ſe evidentibus principiis deducta eſt methodus, qua in duobus ſequentibus problematibus ſolvendis uti pergimus.

PROBLEMA I.

462. *Plani* 360 *hexapedas*, *&* 4 *pedes lati hexapedas* 4, *&* *pollices* 8 *alti aream invenire*.

SOLUTIO. Hiſce dimenſionibus eas intellige, quæ rectangulum efficiunt. Exempli cauſa; ſi planum, cujus area quæritur, ſit triangulum, dimenſa ejus baſi, & altitudine, tota baſis pro una dimenſione capietur, altitudinis dimidium pro altera: in triangulo enim dimenſio, quæ altitudinem reſpicit, non tota trianguli altitudo, ſed dimidia tantum eſt (448). Itaque ad propoſitam aream inveniendam:

I. Hexapedas in hexapedas duco: productum eſt hexapedarum quadratarum 1440. Multiplicandi hexapedas in multiplicatoris hexapedas duxi,

duxi. Nunc multiplicandi hexapedæ in 8 pollices multiplicatoris ducendæ ſunt.

II. *Falſam* hic *ſuppoſitionem* facio, cujus utilitas mox apparebit. Suppono multiplicatorem eſſe unius pedis; & dico. Si 360 hexapedas duco in hexapedam, productum erit hexapedarum 360. At illas in unicum pedem duco, qui eſt ſexta hexapedę pars; ergo productum erit tantum ſexta pars hexapedarum 360 (66). Capio igitur ſextam partem numeri 360; & habeo

Hexapedæ.	Pedes.	Pollices.	Lineæ.
360.	4.	0.	.
× 4.	0.	8.	.
1440.	.	.	.
~~60~~.	.	.	.
40.	.	.	.
2.	4.	4.	16.
1482.	4.	5.	4.
Hexapedæ quadratæ.	Pedes hexapedæ quadratæ.	Pollices hexapedæ quadratæ.	Lineæ hexapedæ quadratæ.

hexapedas quadratas 60, quas ſub hexapedis ſcribo, eas ſigno tranſverſo delens, ut meminerim, hoc productum 60 eſſe mihi debere loco *partis aliquotæ* inter hexapedas, & pollices, nec in hexapedarum ſumma eſſe collocandum.

III. Tranſeo ad pollices, & dico: 8 pollices ſunt duæ tertiæ partes pedis; ergo dabunt duas tertias partes hexapedarum quadratarum 60 ex

 illis,

illis, quas daret pes. Scribo igitur 40 ſub hexapedis. Habeo jam productum hexapedarum multiplicandi in totum multiplicatorem. Supereſt ut inveniam productum 4 pedum multiplicandi in totum multiplicatorem. Itaque:

IV. Tranſeo ad pedes multiplicandi, & dico: ſi 4 hexapedæ cum 8 pollicibus in hexapedam ducendæ eſſent, productum eſſet hexapedarum 4, pollicum 8. At 4 hexapedas, & 8 pollices duco tantum in 4 pedes, qui ſunt duæ tertiæ partes hexapedæ; productum ergo dabit tantum duas tertias partes hexapedarum quatuor, & pollicum 8; nempe hexapedas quadratas 2, hexapedæ quadratæ pedes 4, pollices 2, lineas 16.

V. His peractis omnia producta ſimul addo (28): ſumma, ſeu totum productum 1482 hexapedæ quadratæ, 4 pedes hexapedæ quadratæ, qui ſunt duæ tertiæ partes hujus hexapedæ, ſeu pedes quadrati 24, 5 pollices, & 4 lineæ hexapedæ quadratæ ſunt area plani propoſiti.

PROBLEMA II.

463. *Superficiei planæ aream invenire, cujus baſis, ſeu latitudo eſt hexapedarum* 34, *pedum* 2, *pollicum* 9, *linearum* 8; *altitudo vero hexapedarum* 23, *pedum* 4, *pollicum* 6, *linearum* 8.

SOLUTIO I. Hexapedarum numeros invicem duco, 34 in 23. Duo numeri multiplicatoris ſinguli ſuum productum præbent, nempe 102, & 68. utrumque unum infra aliud ſcribo ut in tabula.

II. Duco deinde 34 hexapedas in 4 pedes, dicens: ſi 34 hexapedas in unam ducerem productum eſſent 34 hexapedæ. At duco tantum

He-

Hexapedæ.	Pedes.	Pollices.	Lineæ.
34.	2.	9.	8.
X23.	4.	6.	8.
102,	.	.	.
68	.	.	.
11	2	.	.
11	2	.	.
2	5	.	.
.	1	10	8
7	5	6	2 + $\frac{2}{3}$
1	5	6	6 + $\frac{2}{3}$
.	5	11	3 + $\frac{1}{3}$
.	.	11	10 + $\frac{5}{9}$
.	.	3	11 + $\frac{1}{2}$
718.	5.	6.	6 + $\frac{2}{3}$

illas in 4 pedes, qui ſunt duæ tertiæ partes hexapedæ; ergo productum eſſe debent tantum duę tertiæ partes 34 hexapedarum (66). Capio itaque duas tertias 34; & habeo 11 hexapedas, 2 pedes, quos numeros ſcribo bis.

III. Tranſeo ad 6 pollices, & dico: ſex pollices ſunt quarta pars duorum pedum, ſeu 24 pollicum: ſumpta igitur quarta parte producti duorum pedum, nempe quarta parte hexapedarum 11, & pedum 2, ſeu pedibus 68, habeo hexapedas 2, pedes 5.

IV. Octo lineæ ſunt nona pars ſex pollicum, ſeu 72 linearum. Quare ſumpta nona parte producti 6 pollicum, nona parte ſcilicet 2 hexapedarum, & 5 pedum, habeo hexapedas 0, pedem 1, pollices 10, lineas 8.

V. Venio ad 2 pedes, 9 pollices, 8 lineas

multiplicandi (93); & incipiens a 2 pedibus dico: ſi 23 hexapedæ, 4 pedes, 6 pollices, 8 lineæ in hexapedam ducerentur, productum eſſent 23 hexapedæ, 4 pedes, 6 pollices, 8 lineæ. Verum hæc omnia duco tantum in duos pedes, qui ſunt tertia pars hexapedæ; ergo hujus producti tertia tantum pars eſt ſumenda; hoc eſt 7 hexapedæ, 5 pedes, 6 pollices, 2 lineæ $\frac{2}{3}$.

VI. Tranſeo ad 9 pollices *multiplicandi*, & dico: 9 pollices exacte in duobus pedibus non continentur; quare 9 in duas partes, 6, & 3 divido, quarum altera eſt duorum pedum, ſeu 24 pollicum pars quarta, altera præcedentis 6 eſt dimidia.

Quum itaque 6 pollices ſint quarta pars duorum pedum; ſumpta quarta parte producti duorum pedum, nempe quarta parte hexapedarum 7, pedum 5, pollicum 6, linearum 2 $\frac{2}{3}$, habeo hexapedam 1, pedes 5, pollices 6; lineas 6 $\frac{2}{3}$. Tum pro 3 pollicibus ſumo hujus producti dimidium; hoc eſt 5 pedes, 11 pollices, lineas 3 $\frac{1}{3}$ (650).

VII. Procedo ad 8 lineas *multiplicandi*; & quum octo lineæ exacte in 3 pollicibus, ſeu 36 lineis non contineantur, divido 8 in partes duas, 6, & 2; quarum prima 6 eſt ſexta pars trium pollicum, altera 2 eſt tertia pars 6. Quare ſumpta ſexta parte producti 3 pollicum, habeo 11 pollices, 10 lineas $+\frac{5}{9}$; & ſumpta tertia parte hujus producti habeo 3 pollices, 11 lineas $+\frac{1}{2}$.

VIII. Tandem producta hæc omnia ſimul addo (281); & ſumma, ſeu totum productum 718 hexapedæ, 5 pedes, 6 pollices, 6 lineæ $+\frac{2}{3}$ eſt *area* propoſitæ ſuperficiei dimenſionibus hexapedæ quadratæ expreſſa, ut in præcedente problemate.

464. NOTA I. Ad ſupputationis facilitatem aliquando falſæ ſuppoſitiones fiunt: exempli cauſa: ſi ſecundus numerus datus fuiſſent 23 hexa.

hexapedæ, o pedes, 6 pollices, 8 lineæ; ſuppoſuiſſem pedem loco o pedum; & productum fuiſſet ſexa pars hexapedarum 34, ſeu 5 hexapedæ, 4 pedes, quos numeros ſcripſiſſem, ut mihi fuiſſent *aliquota media* inter hexapedas, & pollices, & quos tranſverſo ſigno deleviſſem, ut eminerim, hoc productum in additione omittendum eſſe. Rei hujus exemplum attulimus in præcedente problemate.

465. NOTA II. Poſſunt quoque ſuperficies *fractionibus decimalibus* ſupputari. Quum tamen hæ hexapedis, pedibus, pollicibus, lineis adhibitæ, quæ non ſunt partes decimæ quantitatis præcedentis, ſupputationem reddant magis laborioſam, & methodo a nobis uſurpata prolixionem, de hac plura dicere omittemus. Fruſtra enim prolixioribus, & difficilioribus methodis lector defatigatur, quum breviores, & faciliores in promptu ſint. Satis erit animadvertere:

I. *Fractiones decimales* dici fractiones, quarum denominator ſemper eſt numerus decimalis; unitas ſcilicet, quam unum, duo, aut quot libuerit zero ſequantur, quæ ſemper unitatem denominatoris augent in ratione decupla (18). Exempli cauſa; ſi ſupponatur radius terreſtris in decem partes diviſus; $\frac{10}{10} = 1$ erunt radius; $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ erunt radii dimidium; $\frac{20}{10} = 2$ erunt duplus radius. Si hic idem radius ſupponatur in 100 partes diviſus; $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ erunt decima pars radii; $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ erunt ejus dimidium. Si ſupponatur idem radius in 1000 partes diviſus; $\frac{10}{1000}$ erunt centeſima ejus pars; $\frac{100}{1000}$ erunt decima pars; atque ita porro in infinitum.

Pari modo ſi ſupponatur quantitas quævis in 10 partes diviſa, erunt hæ denominator deci-

ma-

malis, & expreſſio totius quantitatis, cujus numerator indicabit numerum partium capiendarum. Quare habebis $\frac{10}{10}$ æqualia toti; $\frac{2}{10}$ æqualia quintæ parti quantitatis. Verum ſi quantitas ſupponeretur in 1000 partes diviſa, fractionis denominator eſſet 1000, & tunc haberes $\frac{1000}{1000}=1$, ſeu toti; $\frac{500}{1000}=\frac{1}{2}$ dimidiæ; atque ita porro (188, & 190).

II. Fractiones decimales diverſis compendiis exprimuntur a diverſis auctoribus de iis agentibus. Uſitatior modus eſt illa breviatas ſcribere, nempe numeratorem dumtaxat adjecto puncto, & puncto apponere tot zero quot habet denominator decimalis ſubauditus. Quare habebis $\frac{5}{10}=5.0$; $\frac{37}{100}=37.00$; item $\frac{304}{1000}=304.000$. Atque ita de reliquis.

§. II.

POLYGONA.

566. DEFINITIO. Polygona dicuntur pluribus quam quatuor rectis, ſeu lateribus figuræ terminatæ. Polygonum a numero laterum diverſa nomina ſortitur. *Pentagonum* dicitur, ſi quinque habeat; *hexagonum*, ſi ſex; *eptagonum*, ſi ſeptem; *octogonum*, ſi octo; *enneagonum*, ſi novem; *decagonum*, ſi decem; *endecagonum*, ſi undecim; *dodecagonum*, ſi duodecim; *chiliogonum*, ſi mille.

I. *Polygonum* eſt *regulare*, ſi latera omnia æqualia, & angulos omnes æquales habeat (*fig.* 66).

II. *Polygonum* eſt *irregulare*, ſi nec ejus anguli ſint æquales, nec latera ſint æqualia.

III.

III. *Duo polygona regularia ſunt ſimilia*, quum eundem laterum numerum habent. Quare duo pentagona, duo dodecagona, duo chiliogona regularia diverſæ magnitudinis ſunt ſimilia.

467. COROLLARIUM. *Circulus concipi poteſt tamquam polygonum regulare infinitorum laterum.*

EXPLICATIO. Punctum quodvis peripheriæ additum puncto immediate ſequenti efficit unam rectam (*fig.* 18).

A centro circuli duc mente radios duos ad hæc duo puncta contigua terminatos; habebis triangulum iſoſceles. Idem fac in omnibus punctis peripheriæ: habebis in circulo totidem triangula iſoſcelia, quot ſunt puncta infinite parva in peripheria (*a*), nempe infinita. Q. E. D.

468. DEFINITIO II. *Polygoni perimeter* vocatur ſumma omnium laterum. Lineæ AB, BC, CD, DE, EF, FA ſunt perimeter hexagoni ABCDEF (*fig.* 66).

Duo polygona, puta pentagonum, & octogonum ſunt *iſoperimetra*; quum perimeter unius alterius perimetro æqualis eſt.

Etymologia horum nominum græca eſt; a περι, *circum*, & μετρέω *metior*, & ἴσος *aequalis*. Nomina hæc etiam in figuris a polygonis diverſis uſurpantur. Polygonum a πολύς multus, & γωνία *angulus*.

469. DEFINITIO III. Duo radii in polygono diſtinguuntur, obliquus, & rectus, qui quoque *apothema* nuncupatur (*fig.* 66).

I. *Radius obliquus* dicitur in polygono recta a polygoni centro ad angulum ducta a duobus perimetri lateribus effectum. Exempli cauſa;

(a) *Uno dempto: ſi tamen hæc auctoris explicatio geometrarum ſuffragia meretur.* Interpres.

ſa; MA, vel MB, vel MD eſt radius obliquus.

II. *Radius rectus*, ſive *apothema* polygoni dicitur recta a centro ad latus quodvis AB perpendiculariter ducta. MK eſt radius rectus, ſive apothema hujus polygoni.

III. In polygonis quoque diſtinguuntur anguli ſalientes, & regredientes. *Angulus ſaliens* eſt, qui verticem extra figuram habet; *angulus regrediens*, cujus vertex intra figuram eſt. Si A CDHEA eſt polygonum angulus DHE regrediens eſt, ceteri omnes ſalientes ſunt (*fig.* 62).

470. COROLLARIUM. *Quo plura polygonum habet latera, eo magis radius rectus ad obliquum accedit fig.* 69).

DEMONSTRATIO. Evidens eſt, ſi a centro C ducatur radius rectus ad latus MN hexagoni, & alter radius rectus ad latus MB dodecagoni, radium hunc illo majorem fore. Apothema C*x* dodecagoni magis ergo accedet ad radium obliquum CM, quam apothema C*b* hexagoni.

Evidens quoque eſt, quo minor fiet arcus MB, eo magis ejus chordam ad peripheriam acceſſuram; & eo majus fieri chordæ hujus apothema C*x*, magis, magiſque in infinitum ad æqualitatem accedens radio obliquo CM. *Quare in circulo radius rectus infinite parum differt ab obliquo*. Q. E. D.

THEOREMA I.

471. *Cujuſvis polygoni anguli omnes valent bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ, demptis quatuor* (*fig.* 66).

DEMONSTRATIO. Sit polygonum quotcumque laterum, puta centum. Concipe ab ejus centro ductas lineas ad omnes angulos. Totidem triangula habebis, quot latera. Triangula hæc ſingula valent duos rectos (384): ergo

go 100 triangula valent 200 rectos. Ab horum ſumma deme omnes angulos ad centrum additos perimetro, nempe AMB, BMC, CMD, & reliquos. Demes quatuor rectos: anguli enim omnes ad centrum periferiam metiuntur adeoque valent quatuor rectos. Ergo omnes polygoni anguli valent bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ, demptis quatuor. Q. E. D.

472. PROBLEMA. *Polygoni regularis angulum ad centrum, vel dato lateri oppoſitum invenire* (*fig.* 69).

SOLUTIO. Omnes anguli ad centrum a radiis obliquis effecti valent quatuor rectos, ſeu gradus 360; capiunt enim peripheriam circuli polygono circumſcripti. At in polygono regulari tot ſunt ad centrum anguli æquales quot polygonum æqualia habet latera. Divide ergo 360 per numerum laterum polygoni; puta, ſi hexagonum ſit, divide 360 per 6; ſi dodecagonum, per 12. Quotiens exprimet valorem anguli ad centrum MCN, vel NCB; atque ita de reliquis.

THEOREMA II.

473. *Polygonorum regularium homonymorum perimetri ſunt inter ſe ut radii recti, vel obliqui* (*fig* 66).

DEMONSTRATIO. Sit parvum polygonum *abcdef* ſimili majori polygono ABCDEF impoſitum. Oſtendendum, parvi perimetrum eſſe ad majoris perimetrum, ut radius rectus, aut obliquus minoris ad ſimilem majoris radium.

I. Quum duo triangula ſunt ſimilia, latera homologa ſunt proportionalia (403). Atqui polygona regularia ſunt ſeries triangulorum ſimilium; ergo latus quodvis *ab* polygoni regularis eſt ad latus homologum polygoni homonymi AB, ut radius *a* M, vel KM primi, qui haberi poteſt ut baſis, ad radium AM, vel K M ſe-

M ſecundi, qui quoque haberi poteſt ut baſis.

II. Singula latera primi polygoni ſunt ſingulis ſecundi proportionalia; ergo ſumma omnium laterum primi eſt ſummæ omnium laterum ſecundi proportionalis (222); ergo omnia latera primi ſunt ad omnia ſecundi, ut radius primi ad radium ſecundi; ergo polygonorum regularium homonymorum perimetri ſunt inter ſe, ut radii recti, vel obliqui. Q. E. D.

474. *Circulorum peripheriæ ſunt inter ſe ut radii.*

DEMONSTRATIO. Polygonorum regularium homonymorum perimetri ſunt inter ſe, ut radii. At circuli cenſeri poſſunt polygona regularia infinitorum laterum (467); ergo eorum perimetri, ſeu peripheriæ ſunt inter ſe, ut radii. Si ergo radius circuli ſit dimidia, aut quarta, aut centeſima pars radii alterius circuli; peripheria primi erit dimidia, aut quarta, aut centeſima pars peripheriæ alterius; & reciproce.

475. COROLLARIUM I. Radii circulorum ſunt inter ſe ut peripheriæ; *item ut dimidia, quarta, centeſima, milleſima partes peripheriæ, & generatim ut arcus ſimiles*, ſeu totidem graduum. Quare in circulis radius unius ad radium alterius, ut arcus 30 graduum primi ad arcum 30 graduum ſecundi; atque ita de ceteris.

476. COROLLARIUM II. Quum radii ſint dimidiæ diametri: *circulorum diametri ſunt inter ſe ut radii*; eadem enim eſt ratio duarum quantitatum, quæ dimidiarum; & reciproce (163). Ergo *in circulis diametri ſunt ut peripheriæ, ut dimidiæ, ut omnes arcus ſimiles.*

THEOREMA III.

477. *Latus hexagoni regularis circulo inſcripti eſt æquale radio* (*fig.* 66.

DE-

DEMONSTRATIO. Sit hexagonum regulare ABCDEF circulo inſcriptum. Sex hexagoni latera ſunt ſex chordæ æquales arcus ſubtendentes, quorum ſumma eſt tota peripheria.

A centro M duc radios MA, MB ed extrema alicujus lateris AB hexagoni. Latus hoc radio MA, vel MB eſt æquale. In triangulo enim AMB anguli M menſura eſt arcus AB (336), qui eſt graduum 60, quum ſit ſexta pars peripheriæ. Ergo angulus AMB eſt graduum 60.

Quum angulus M valeat 60 gradus, reliqu duo ſimul valebunt gradus 120 (384); at hi ſunt æquales: ſunt enim oppoſiti duobus lateribus æqualibus, radiis ſcilicet circuli circumſcripti (389). Ergo ſinguli valent gradus $\frac{120}{2} = 60$.

Ergo in triangulo AMB tres anguli ſunt æquales; ergo tria latera his oppoſita ſunt æqualia (389). At latus AM, vel BM eſt radius circuli circumſcripti; ergo latus AB æquale ipſi AM, vel BM eſt æquale radio circuli polygono circumſcripti. Q. E. D.

478. COROLLARIUM I. *Hexagoni regularis circulo inſcripti perimeter ſextupla eſt radii*; latus enim AB eſt æquale radio MA; & perimeter hexagoni ſex habet latera ipſi AB æqualia (*fig.* 66). *Quare diametrum, qua radii dupla eſt, ter continet.*

COROLLARIUM II. Circuli circumſcripti peripheria hexagoni inſcripti perimetro major eſt; *ergo magis, quam ter, diametrum continet*; *ergo ejus ratio ad diametrum major eſt, quam* 3 : 1, *vel* 21 : 7. At quænam eſt hæc ipſa ratio?

Dia-

Diametri ratio ad peripheriam.

479. OBSERVATIO. Alibi oſtendemus qua methodo geometrica ratio diametri ad peripheriam, & reciproce, in circulo queri poſſit (66). Ratio hæc accurata adhuc latet; at ita proxime acceditur, ut nihil hac in re deſiderandum ſuperſit.

I. Archimedes oſtendit, rationem diametri ad peripheriam eſſe proxime $7:22$; accuratam rationem inter $7:21+\frac{70}{71}$, & $7:22+\frac{71}{71}=22$ contineri; inter has duas rationes primam eſſe paulo majorem, alteram paulo minorem; poſtremam tamen ad veram propius accedere.

Ratio $7:22$ æqualis eſt rationi $1:3+\frac{1}{7}$; non tamen hac poſtrema utimur, quod, quum fractione exprimatur, in ſupputationibus incommoda ſit. Juxta Archimedem peripheria diametrum proxime continet ter, & $\frac{1}{7}$.

Ab Archimede ad hos uſque dies geometræ omnes rationem $7:22$ ut ſatis accuratam diametri ad peripheriam admiſerunt. Et ſane ad omnem in praxi requiſitam accurationem paſſim ſufficit. Quum tamen hæc ratio ſit aliquanto minor (160), peripheriam dat aliquanto vera majorem. Exempli gratia; ſi diameter eſſet hexapedarum 1000, peripheria hac ratione inventa veram excedet hexapedis ferme duabus, nempe $\frac{1}{500}$ datę diametri. Quare geometræ magnæ præciſionis ſtudioſi, & aliquando ſumma præciſione indigentes, accuratiores Archimedea rationes inveſtigarunt.

II. Metius geometra Batavus rationem diametri ad peripheriam invenit $113:355$. Hæc omnium, quæ paucis notis integris exprimi poſſit, veræ proxima eſt.

Ratio $100:314$, quæ aliquando uſurpatur, ni-

nimis magna eſt (160): peripheriam dat vera aliquanto minorem. Ratio 10000 : 31415 ferme, ut Metiana, a qua minimum differt, ad veram accedit: hæc, quæ Metiana in praxi opportunior eſt, uſurpari poteſt.

III. Alii geometræ adhuc Metiana accuratiores rationes invenerunt, non tamen in praxi uſurpantur; quumenim ingenti conſtent notarum numero nimiam in ſupputatione moleſtiam creant, nulla utilitate. Exempli gratia Ludolphus van Ceulen, qui hac in re præter modum meditatuseſt, ſequentem rationem reperit;

100,000,000,000,000,000, 000,000,000,000,000,
314,159,265,358,979,323,846,264,338,327,950,
& oſtendit, ſuppoſita circuli diametro in tot partes diviſa, quot primo numero indicantur, circuli peripheriam fore altero numero minorem; ſed hoc ipſo fore majorem, poſtremo primi numeri zero in unitatem mutato. Primus numerus eſt antecedens, alter conſequens rationis diametri ad peripheriam.

Hac Ludolphi van Ceulen ratione ad veram in infinitum accedere licet, ſumpto æquali notarum numero ad ſiniſtram utriuſque termini. Sumptis, exempli cauſa, ſex primis uniuſque notis habebitur ratio 100000: 314159. Si hac ratione quæratur peripheria circuli, cujus diameter ſit millies millium hexapedarum, peripheria erit minor vera, at duabus ferme hexapedis tantum, nempe parte diametri quingenties milleſima. Ratio Archimedis huic peripheriæ hexapedas 1265 ſupra veram tribueret,

Ratio hæc Ludolphi in praxi, & in magnis ſupputationibus peropportuna eſt; numerus enim diametrum exprimens eſt unitas cum pluribus zero, qui ſæpius a multiplicatione, & diviſione liberat.

PRO-

PROBLEMA

480. *His rationibus circuli peripheriam, cujus nota diameter, ſeu diametrum, nota peripheria invenire.*

SOLUTIO. I. Sit nota diameter = 450: peripheria ignota = x. Inſtitue analogiam; 7: 22 :: 450 : x. Productum mediorum diviſum per primum extremum dabit peripheriam quæſitam.

II. Sit nota peripheria = 9000; diameter ignota = x. Inſtitue analogiam; 22: 7 :: 9000 x. Productum mediorum diviſum per primum extremum dabit quæſitam diametrum.

Si majori accuratione diametrum, aut peripheriam velis, pro ratione Archimedis ſume Metianam, ſeu Ludolphinam quinque, aut ſex primis notis expreſſam (479). Duæ præcedentes analogiæ in has convertentur; 113: 355 :: 450: x; vel; 10000: 31515 :: 450: x: vel 31515: 10000 :: 9000 : x. Productum mediorum diviſum per primum extremum dabit aut peripheriam diametri hexapedarum 450; aut diametrum peripheriæ hexapedarum 9000.

THEOREMA IV.

481. *Superficies circuli æqualis eſt triangulo, cujus altitudo radius, baſis vero ſit recta peripheriæ æqualis* (*Fig.* 68).

DEMONSTRATIO. Sit circulus ADA, & triangulum ACB. Duæ hæ figuræ ſunt æquales ſuperficie, ſi totidem elementa utraque habeat; & hæc in utraque æqualia ſint. Jam vero:

I. *Totidem elementa ſunt in utraque*. Elementa enim circuli ſunt peripheriæ concentricæ, & elementa trianguli ſunt lineæ baſi parallelæ (438).

Atqui tot in circulo ſunt peripheriæ concen-
tri-

tricæ, quot in triangulo lineæ baſi parallelæ; utrobique enim elementorum numerum metitur linea C A, quæ ſimul eſt & radius circuli, & trianguli altitudo.

II. *Singula circuli elementa ſingulis trianguli elementis æqualia ſunt*. Sint in circulo duæ peripheriæ A D, *a d*; & in triangulo baſes duæ A B, *a b* his peripheriis reſpondentes. Quum *in circulo* peripheriæ ſint ut radii habebitur analogia; A D: *a d* :: C A: C *a*.

Quum *in triangulo* triangula C A B, C *a b* ſint ſimilia, habebitur quoque analogia ...... A B: *a b* :: C A: C *a*.

In utraque proportione ſecunda ratio eſt eadem; ergo duæ primæ rationes ſunt æquales. Ergo A D: *a d* :: A B: *a b*, & alternando... (174) A D: A B :: *a d*: *a b*.

Atqui hic antecedens, & conſequens primæ rationis ſunt æquales *ex hypotheſi*; ponitur enim circuli peripheria æqualis baſi trianguli; ergo in poſtrema ratione antecedens quoque conſequenti æqualis eſt.

Eodem modo oſtendi poteſt, aliam quamvis peripheriam, ut *m r m*, eſſe æqualem baſi *m n* ipſi in triangulo reſpondenti; quare utrobique elementa *numero*, & *extenſione* ſunt æqualia. Ergo circulus triangulo ſuperficie æqualis eſt. Q. E. D.

T H E O R E M A V.

482. *Superficies ſectoris circuli æqualis eſt ſuperficiei trianguli rectanguli, cujus altitudo ſit æqualis radio ſectoris, & baſis arcui ſectoris* (*fig.* 67).

DOMONSTRATIO. Sit C A D ſector quivis, puta graduum 80, vel 90. Sit triangulum A C B, cujus baſis A B ſit æqualis arcui A D ſectoris; ita, ut baſis A B, & arcus A D lineæ ſint eodem punctorum numero compoſi-

tæ

tæ; quod evidenter eſt non repugnans, & evidenter ſupponi poteſt. In hac hypotheſi,

I. *Triangulum & ſector eodem conſtant elementorum numero*; hujus enim numeri utrinque menſura eſt C A radius circuli, & ſimul trianguli altitudo (438).

II. *Elementa ſectoris ſingula ſingulis trianguli elementis ſunt æqualia.* Hoc, ut in præcedente theoremate, duabus proportionibus oſtenditur, unde duæ aliæ emergunt, quibus hæc æqualitas probatur.

In circulo (474)..... AD : *ad* :: CA : C*a*
In triangulo (400).... AB : *ab* :: CA : C*a*
Ergo (166)......... AD : *ad* :: AB : *ab*
Et alternando .... AD : AB :: *ad* : *ab*

Ergo arcus, ſeu elementum A D ſectoris quum ſupponatur æquale baſi, ſeu elemento AB trianguli, quodvis aliud ſectoris elementum *a d* erit æquale correſpondenti trianguli elemento *a b*.

Quum ergo utraque figura elementa habeat numero, & extenſione æqualia, ſuperficie æqualis erit utraque, quæcumque utriuſque magnitudo ſit. Q. E. D.

CIRCULI QUADRATURA,

483. DEFINITIO. *Circuli quadraturam* quærere eſt methodum geometricam quærere quadratum efficiendi circulo æquale, cujus diameter, & peripheria datæ ſint.

Si perfecta ratio geometrica ſine ulla differentia ſurda, & infinite parva inter diametrum, & peripheriam obtineri potuiſſet, haberetur quadratura circuli; quum enim circulus ſit æqualis triangulo, cujus altitudo ſit circuli radius, baſis peripheria (481); ſatis eſſet duabus his lineis mediam proportionalem invenire (414). Hæc in ſe ducta quadratum daret triangulo ſuperficie æquale, adeoque &

cir-

circulo, cujus area areæ trianguli æqualis eſt.

Ratio hæc geometrica accuratiſſima inter diametrum, & peripheriam nondum inventa eſt, ut jam monuimus. Qui tamen hanc inveniret nihil de mathematicis mereretur; rationes enim ab Archimede, a Medio, a Ludolpho van Ceulen inventæ, & demonſtratæ ita veræ proxime accedunt, ut etiam data perfecta ratione, nihil accuratius in praxi fieri poſſet (479).

P R O B L E M A I.

484. *Circuli, cujus radius notus ſit, aream quam proxime invenire.*

SOLUTIO. Ex duplici *radio noto* diametro æquali ignotam peripheriam inveni (479); hanc in dimidium radium ducito. Productum erit area quæſita; eſt enim æquale triangulo æquali circulo, cujus radius datus ſit (481).

P R O B L E M A II.

485. *Area ſectoris, cujus radius, & arcus notus ſit, quam proxime invenire.*

SOLUTIO. I. Ex duplici radio dato, quem 7 hexapedis æqualem ſuppono, totam circuli peripheriam inveni hac analogia; $7:22::14:x$. Peripheria quæſita erit hexapedarum 44 (489).

II. Ut arcus dati, quem ſuppono graduum 54, menſuram habeas, inſtitue analogiam. Tota peripheria 44 ad arcum graduum 54; ut tota peripheria graduum 360, ad arcum datum. Quare $44:x::360:54$. Habebis $x=6$ hexapedis $+\frac{2}{3}$ ferme.

III. Menſuram inventam hexapedarum $6+\frac{2}{3}$ arcus dati duc in dimidium radium. Productum erit area quæſita (462).

PROBLEMA III.

486. *Polygoni aream invenire* (*fig.* 66).

SOLUTIO. I. Si polygonum ſit regulare, omnes ejus anguli ſunt æquales, & omnia *latera* æqualia ſunt. Totidem ergo triangula æqualia ſunt, quot latera. Duc perpendicularem MK a centro polygoni ad latus quodvis AB. Habebis trianguli AMB baſim, & altitudinem; ergo & ejus area innoteſcet. Duc hanc in numerum laterum polygoni, uno dempto, cujus jam area ſumpta fuit. Productum dabit aream quæſitam.

II. Si polygonum ſit irregulare, omnia triangula diſſimilia ſeorſim expendenda ſunt; & arearum omnium additio facienda, ut totius polygoni area habeatur.

PROBLEMA IV.

487. *Dati radii, & numeri laterum polygonum regulare conſtruere* (*Fig.* 66).

SOLUTIO. Circulum deſcribe, cujus radius ſit radius obliquus datus. Peripheriam, ſeu 360 gradus divide per numerum laterum polygoni conſtruendi, puta per 6, ſi ſit hexagonum, per 12, ſi dodecagonum. Quotiens exprimet arcuum quantitatem, quos polygoni latera ſubtendere debent; erunt enim hæc chordæ æquales, quum æquales arcus ſubtendant (318).

PROBLEMA V.

488. *Poligonum regulare circulo inſcribere, aut circumſcribere* (Fig. 69).

SOLUTIO. I. Ut polygonum circulo inſcribatur, duc a centro ad unum ex angulis radium obliquum CA; & eodem centro, ac radio

dio circulum deſcribe. Polygonum circulo AB DRA inſcriptum erit.

II. Ut polygonum ſit circulo circumſcriptum, a centro polygoni duc ad unum latus perpendicularem C *b*; & eodem centro, atque hac perpendiculari tamquam radio, quæ erit radius rectus, aut apothema, deſcribe circulum. Polygonum erit circulo *a b d r a* circumſcriptum.

§. II.

RATIO SUPERFICIERUM.

489. OBSERVATIO. I. Sicuti inter duas lineas datur ratio geometrica, ita & inter duas ſuperficies datur, quæ a duabus lineis producuntur, quarum una longitudo ſit, altera latitudo, ſive altera baſis, altera altitudo. Exempli gratia, (fig. 92).

Datur ratio inter baſim B, & baſim *b*, & altera ratio inter altitudinem H, & altitudinem *h*. Ducta hinc baſi B in altitudinem H; & inde baſi *b* in altitudinem *h*, habebuntur duæ ſuperficies S, & *s*, inter quas quoque dabitur ratio.

II. Sicuti ratio geometrica duarum quantitatum ſimplicium, ſeu linearum eſt modus quo altera alteram, aut ejus partem continet (156); ita ratio geometrica duarum ſuperficierum modus eſt, quo altera alteram, aut ejus partem continet. Quare ratio ſuperficiei S ad ſuperficiem *s* eſt modus, quo prima alteram, aut ejus partem continet. Si prima alteram ter contineat, ratio primæ ad alteram erit $= 3$. Si prima alterius tertiam tantum partem contineat, ratio primæ ad alteram erit $= \frac{1}{3}$; atque ita de ceteris.

490. DEFINITIO. Ratio ſuperficiei ad aliam eſt ratio compoſita, quæ aliquando eſt duplicata (fig. 92).

I. *Ratio compoſita* eſt productum duarum rationum ſive æqualium, ſive inæqualium, antecedentis in antecedentem ducti, & conſequentis in conſequentem (217). Exemplum. Altitudinem H altitudini *h* comparando, & baſim B baſi *b*, ſi duæ hæ rationes ita exprimantur $\frac{H}{h}$, $\frac{B}{b}$, fiet ratio compoſita $\frac{HB}{hb}$. Ratio hæc poſtrema HB ad *hb* erit ratio compoſita, quæ rationem exprimet ſuperficiei S ad ſuperficiem *s*.

II. *Ratio duplicata*, de qua ſermo, eſt productum rationis ſimplicis, cujus antecedens, & conſequens ad quadratum elevati ſint. Exemplum. In ratione H ad B ſi uterque terminus ad quadratum elevetur, habebitur ratio HH ad BB, quæ erit duplicata præcedentis.

III. In menſura ſuperficierum vocantur *factores* duo termini, qui invicem ducuntur, ut ſuperficiei productum habeatur. Exemplum. Si ducatur baſis $B = 4$ in altitudinem $H = 3$; quantitas B eſt unus ex factoribus, quantitas H eſt alter.

Ita baſis BC eſt factor unus, altitudo AB alter rectanguli ABCD (*fig.* 57).

Ex his definitionibus ſequitur propoſitio ſequens per ſe evidens, & inter axiomata recenſenda.

491. AXIOMA. *Duæ ſuperficies inter ſe ſunt ut productum duarum dimenſionum unius in productum duarum dimenſionum alterius*. Hæc enim producta ſuperficierum menſuram exprimunt. Æque dici poſſet, ſuperficies eſſe in ratione compoſita ſuarum reſpectivarum dimenſionum; hoc enim in idem recidit.

RA-

RATIO RECTANGULORUM.

492. Duo factores cujuſque rectanguli ſunt ejus baſis, & altitudo (447). Ut *duorum rectangulorum ratio* inveniatur ſive ſimilium, ſive diſſimilium baſis unius in ſuam altitudinem, tum alterius baſis in ſuam altitudinem ducenda eſt. Ratio productorum exprimet rationem ſuperficierum rectangulorum. Ita ſi primum ſit $12 \times 10 = 120$, & alterum $8 \times 6 = 48$, ſuperficies primi erit ad ſuperficiem alterius, ut 120 ad 48.

RATIO PARALLELOGRAMMORUM.

493. OBSERVATIO. Quum parallelogramma obliquangula ſint rectangulis ejuſdem baſis, & altitudinis ſuperficie æqualia (440); eorum factores quoque ſunt baſis, & altitudo. Quare ut duorum parallelogrammorum quorumcumque ratio inveniatur, in utroque baſis in altitudinem ducenda eſt. Producta exprimunt ſuperficierum rationes. In duobus parallelogrammis quibuſcumque,

I. *Si baſes ſunt æquales*, ſuperficies ſunt ut altitudines (221. II.),

II. *Si altitudines ſunt æquales*, ſuperficies ſunt ut baſes (221. II.).

III. *Si duæ dimenſiones ſunt in ratione inverſa*, ſuperficies ſunt æquales. Si enim baſis primi ſit dupla baſis ſecundi; & hujus altitudo dupla altitudinis primi; patet, unum tantum latitudine excedere, quantum alterum altitudine. Atque ita de ceteris.

RATIO TRIANGULORUM.

494. OBSERVATIO. Quum triangula ſint dimidia parallelogrammorum quorumcumque e-

juſdem baſis, & altitudinis (442); eorum fa ctores erunt baſis in dimidiam altitudinem. Quare ad inveniendam rationem *duorum rectangulorum quorumcumque*, in utroque baſis in dimidiam altitudinem ducenda eſt. Producta arearum rationem expriment. In duobus triangulis quibuſcumque, ut in parallelogrammis, quorum dimidia ſunt,

I. *Si baſes ſunt æquales*, ſuperficies ſunt ut altitudines, aut ut dimidiæ.

II. *Si altitudines ſunt æquales*, ſuperficies ſunt ut baſes (221. II.).

III. *Si utriuſque dimenſiones ſunt in ratione inverſa*, ſuperficies ſunt æquales. Quæ enim ratio inter tota, patallelogramma ſcilicet, datur, eadem datur & inter dimidia, nempe triangula.

Hinc duo corollaria deſcendunt, a quibus demonſtratio deducitur alibi tradita (396, 400) de lineis proportionalibus. Quæ hic traditur, & non neceſſaria, ab æquali linearum inclinatione non pendet.

495. COROLLARIUM I. *Si duo trianguli latera ſecet baſi parallela, ſectiones erunt proportionales* (Fig. 72.

DEMONSTRATIO. Sit triangulum BAD. Duc parallelam EF, & rectas ED, BF. Dico: AE: EB:: AF: FD.

I. Concipe duorum triangulorum AFE, EFB vertices eſſe ad F, baſim vero in AB. Eandem habent altitudinem FE; *ſunt ergo ut baſes* (494). Ergo baſis AE ad baſim EB, ut triangulum EAF ad triangulum EBF.

II. Triangula BFE, DFE ejuſdem baſis EF, & ejuſdem altitudinis, quum ſint inter parallelas, ſunt æqualia; ergo ad hæc triangulum EAF eandem rationem dicit.

III. Concipe triangulorum EAF, EFD vertices eſſe ad E, & baſes in eadem AD. Eandem habent altitudinem EF; ſunt ergo ut

ut baſes. Ergo baſis A F ad baſim F D ut triangulum E A F ad triangulum E F D.

IV. Habentur ergo duæ rationes uni tertiæ, adeoque inter ſe æquales; ſcilicet.

Linea,	Linea.	Triang.	Triang.
AE:	EB ::	EAF:	EFB
AF:	FD ::	EAF:	EFD=EFB.

In his proportionibus poſtrema ratio eadem eſt; ergo primæ duæ æquales ſunt; unde nova proportio AE: EB :: AF: FD & alternando AE: AF :: EB: FD.

Hæc exprimit rationem laterum ab EF baſi BD parallela ſectorum. Ergo latera a recta baſi parallela proportionaliter ſecantur. Q.E.D.

496. COROLLARIUM II. *Si duo trianguli latera ſecat baſi parallela, pars AE eſt ad totum latus AB, ut pars AF ad totum latus AD.*

DEMONSTRATIO. Ex corollario præcedente, AE : EB :: AF: FD.
Ergo componendo (174) AE : AE+EB :: AF : AF + FD
Hoc eſt AE: AB :: AF: AD

Ergo ſectio primi lateris ad ſectionem ſecundi, ut latus ad latus. Q. E. D.

497. PROBLEMA. *Triangulum in quot libuerit partes dividere in datis rationibus in baſi ſumptis* (Fig. 91).

SOLUTIO. Trianguli ACB area dividenda ſit in partes quatuor, quæ inter ſe ſint, ut BM, *mn*, *nr*, *r*C.

Per verticem A duc AP baſi BC parallelam, & rectas A*m*, A*n*, A*r* ad puncta diviſionis rationes diviſionum datas indicantia.

Triangulum in quatuor partes diviſum erit, quæ erunt in datis rationibus. Quum enim quatuor hæc triangula, quæ totum triangulum ſunt, ſint inter easdem parallelas AP, BC, eandem habent altitudinem; ſunt ergo ut baſes BM, *mn*, *nr*, *r*C, quæ rationes datas exprimunt (494).

Hac methodo ager, aut pratum triangulare in data ratione dividi poterit.

RATIO FIGURARUM SIMILIUM.

498. DEFINITIO. Duæ *figuræ ſunt ſimiles*, quum angulos ſingulos ſingulis habent æquales, & latera homologa proportionalia; ita, ut non niſi arearum, & perimetrorum magnitudine differant; & quum altera alteri in æquali angulo ſuperponitur, minor fiat pars majoris, & illi ſemper ſimilis perſeveret. Exempli cauſa (*fig.* 66).

I. Duo *polygona regularia* homonyma ABC DEF, *abcdef*, ſunt ſimilia. Si enim alterum alteri in centris ſuperponatur, eundem triangulorum numerum efficiunt, quorum anguli æquales ſunt, & latera proportionalia. Idem dicas *de duobus circulis* in centro ſuperimpoſitis. Item (*fig.* 45),

II. *Duo triangula* GAB, *cab* ſunt ſimilia, ſi ſingulis minoris anguli ſingulis majoris ſint æquales; tunc enim latera minoris erunt homologis majoris lateribus proportionalia (403).

III. *Duo quadrata* ſemper ſunt ſimilia; ſemper enim eorum anguli æquales ſunt, & latera proportionalia (*fig.* 1).

IV. *Duo rectangula* ſimilia ſunt quum altitudo ad altitudinem eſt ut baſis ad baſim; diſſimilia quum hæc proportio non datur (*fig.* 52).

V. *Duo parallelogramma* ſimilia ſunt, quum unius anguli ſinguli ſunt ſingulis alterius proportionales, & ſit altitudo ad altitudinem, ut baſis ad baſim (*fig.* 16, & 57).

VI. *Duo polygona irregularia* ſunt ſimilia, quum æqualem habent laterum numerum, & angulos homologos æquales, & latera homologa proportionalia.

THEO-

THEOREMA.

499. *In figuris ſimilibus areæ ſunt in duplicata ratione dimenſionum homologarum (fig. 52).*

DEMONSTRATIO. In figuris ſimilibus dimenſiones, altitudo nempe, & latitudo, ex præcedente definitione, ſunt proportionales. Quare oſtendendum eſt, quum hæ dimenſiones ſunt proportionales, areas eſſe ut quadrata altitudinis, vel latitudinis, ſeu baſis. Quum figuræ omnes in triangula dividi poſſint; ſint primum exemplo duo triangula ſimilia C A B, *c a b*, quorum dimenſiones proportionales ſunt baſis, & dimidia altitudo.

I. Baſim minoris trianguli dico *a*, dimidiam altitudinem *b*. Majoris trianguli baſim dico *a n*, ſemialtitudinem *b n*. Quantitas *n* eſt factor indeterminatus, quo majoris trianguli dimenſiones minoris dimenſionibus proportionaliter majores fiunt. Exempli cauſa, ſi baſis majoris trianguli ſit duplo major; factor indeterminatus *n* indicat, baſim minoris trianguli bis capiendam eſſe, ſeu in 2 ducendam. Quare *n* indicabit exponens rationis inter baſes, & altitudines; & indicabit, quantitatem, quam afficit, datis vicibus ſumendam eſſe, puta, ſemel, & ſemis, vel ter, vel quinquies cum quadrante, vel centies $+ \frac{1}{10}$, vel 100000 $+ \frac{1}{157}$, atque ita porro.

Quum ex hypotheſi triangula ſint ſimilia, & dimenſiones habeant proportionales, erit harum expreſſio $a : a n : : b : b n$.

II. Oſtendendum minorem aream eſſe ad majorem, ut a^2 ad $a^2 n^2$, vel b^2 ad $b^2 n^2$.

Productum, ſeu expreſſio minoris areæ eſt $a b$, majoris $a b n^2$; ergo ratio minoris ad majorem eſt $a b : a b n^2$. Ergo $s : S :: a b : a b n^2$.

III. At huic rationi æqualem ſubſtituere poſ-

ſum (168); huic ergo ſubſtituo rationem quadratorum aut baſium, aut altitudinum, quam oſtendo præcedenti æqualem $ab : abn^2$, ...
ſeu $a^2 : a^2 n^2 :: ab : abn^2$;
& $b^2 : b^2 n^2 :: ab : abn^2$.

Duæ enim rationes ſunt inter ſe æquales quum proportionem efficiunt; & hanc efficiunt quum extremorum producta mediorum productis ſunt æqualia (172). At ſi ex quatuor primis, & ex quatuor alteris quantitatibus proportionem inſtituam, productum extremorum $a^3 b n^2$, vel $b^3 a n^2$ producto mediorum $a^3 b n^2$, vel $b^3 a n^2$ æquale eſt; ergo duæ primæ rationes. poſtremæ æquales ſunt; ergo utraque poſtremæ ſubſtitui poteſt. Quum. . . . .
ergo jam ſit $s : S :: ab : abn^2$,
erit quoque $s : S :: a^2 : a^2 n^2$
ſive $s : S :: b^2 : b^2 n^2$.

IV. Eadem algebrica methodo utere in duobus factoribus, ſeu in dimenſionibus duorum rectangulorum, ſeu parallelogrammorum, ſeu trapeziorum, ſeu polygonorum ſimilium. Ubique valebit eadem demonſtratio; nempe, areas figurarum ſimilium eſſe in duplicata ratione baſium, aut altitudinum; ita, ut ſi unius dimenſionis quadratum decuplum ſit quadrato dimenſionis homologæ, area prima aream alteram decies continebit; atque ita de ceteris. Q. E. D.

500. APPLICATIO. *Circulorum areæ ſunt in duplicata ratione radiorum aut peripheriarum (fig. 68).*

DEMONSTRATIO. Sint duo circuli ADA, *ada*. Oſtendendum, majoris aream eſſe ad aream minoris, ut quadratum majoris radii, aut peripheriæ ad quadratum minoris radii, aut peripheriæ.

I. Duo factores areæ circuli ſunt peripheria in dimidium radium; circuli enim area æqualis eſt areæ trianguli, cujus baſis ſit peripheria, alti-

altitudo radius (481); factores vero trianguli hujus ſunt baſis in dimidiam altitudinem (448). Ceterum in circulis inæqualibus major peripheria eſt ad minorem, ut major radius ad minorem; quare duæ hæ dimenſiones ſunt proportionales (474).

II. Factores hos igitur, ut in precedente problemate deſignamus; ſit minor peripheria a, major an; minor radius b, major bn. Minor area erit ab, major abn^2.

Erit ergo ſuperficierum ratio $s:S::ab:abn^2$
ſeu $s:S::a^2:a^2n^2$
ſeu $s:S::b^2:b^2n^2$.

Quum enim poſtremarum proportionum poſtremæ rationes poſtremæ rationi primæ proportionis æquales ſit, illæ huic ſubſtitui poſſunt (499. III).

Quare ad aream circulorum obtinendam, in utroque productum peripheriæ in dimidium radium ſumendum eſt. At ad hoc æque ſumi poteſt ratio duplicata aut radiorum, aut peripheriarum; aut ratio productorum peripheriæ in radium, aut in radium dimidium in utroque circulo, Q. E. D.

501. COROLLARIUM. *Circulorum area ſunt quoque in duplicata ratione diametrorum, aut arcuum ſimilium.*

DEMONSTRATIO. I. Quadrata diametrorum ſunt quadrupla quadratorum radiorum. Quare quum areæ circulorum ſint ut quadrata radiorum, erunt etiam ut quadrupla quadratorum radiorum. Si enim duæ quantitates in eandem 4 ducantur, quantitatum multiplicatarum ratio non mutatur, quarum producta ſunt ut radices (164).

II. Quum circulorum areæ ſint ut quadrata peripheriarum, erunt etiam ut quadrata arcuum ſimilium. Duarum enim quantitatum per eandem quantitatem diviſarum quotientia eandem rationem ſervant (465); & quadratis periphe-

riarum quadrata ſuorum arcuum ſimilium ſubſtituere perinde eſt, ac ambas per eandem quantitatem dividere. Exempli cauſa; quum areæ circulorum ſint ut quadrata peripheriarum, ſi his ſubſtituas quadrata ſemiperipheriarum, habebis quartas primarum quantitatum partes: porro hoc eſt quaſi utramque per eandem quantitatem 4 diviſeris; ſi in utroque quadrantis quadratum ſumas, habebis earum partes decimas ſextas; & hoc erit, quaſi eas per 16 diviſeris; atque ita porro. Q. E. D.

RATIO POLYGONORUM.

502. OBSERVATIO. Factores polygoni regularis ſunt perimeter in dimidium radium rectum, ſive hic in illam dimidiam. Ergo areæ *duorum polygonorum regularium* quorumcumque ſunt ut productum perimetri unius in dimidium radium rectum ad productum alterius perimetri in dimidium ſuum radium rectum.

I. Polygonum regulare quodvis concipi poteſt ut ſeries triangulorum, quorum baſis eſset perimeter. Horum omnium triangulorum area eſt productum baſis in dimidiam altitudinem (450).

II. Quum duo polygona quævis ſunt ſimilia, eorum areæ ſunt ut quadrata unius ex ſuis dimenſionibus homologis (499). Hinc facile invenietur ratio arearum duarum urbium, aut arcium ſimilium, quarum aut diameter, aut perimeter nota ſit. Exempli cauſa ſi urbium figura ſimilium diametri ſint altera $\frac{1}{4}$ leucæ, altera $\frac{3}{4}$ leucæ, earum areæ erunt ut 1 ad 9.

T H E O R E M A I.

503. *Polygonorum regularium circulo inſcriptorum quod plura habet latera majorem habet aream, & perimetrum (fig. 69).*

DEMONSTRATIO. Si eidem circulo AB

DRA

DRA loco hexagoni inſcribatur dodecagonum; ſexta pars hexagoni, nempe triangulum CM*b* NC perimetrum habebit, & aream MCN*b*M; ſexta vero pars dodecagoni, (nempe duo triangula BCM, BCN) perimetrum, & aream habebit BMCNB; quæ major erit toto triangulo BM*b*NB. Ergo dodecagonum hexagono area, & perimetro majus eſt. Q. E. D.

THEOREMA II.

504. *Figurarum omnium eidem circulo inſcriptarum maxima area, & perimetro eſt circulus, minima triangulum* (*fig.* 69).

DEMONSTRATIO. Cujuſvis figuræ circulo inſcriptæ latera ſunt chordæ MN, vel MB, quæ eo magis ad peripheriam accedunt, minuſque ſpatium inter hanc, & ſe relinquunt, quo minores ſunt. At, in polygono regulari infinitorum laterum, uti eſt circulus, chordæ ſua infinite parva latera efficientes in peripheriam cadunt, nullumque inter hanc, & ſe ſpatium relinquunt. Contra vero triangulum præ ceteris omnibus figuris maximum inter ſe, & peripheriam ſpatium relinquit; ut facile concipies triangulum circulo inſcribens, & hoc ſucceſſive in quadratum, in pentagonum, in hexagonum, in dodecagonum convertens, (*fig.* 123, & 124), uno, aut pluribus ejus lateribus diviſis. Q. E. D.

THEOREMA III.

505. *Polygonorum circulo circumſcriptorum quod plura habet latera minorem habet perimetrum, & aream* (*fig.* 69).

DEMONSTRATIO. Sit polygonum circulo *abdra* circumſcriptum. Quo plura habebit latera, eo magis ejus perimeter ad peripheriam circuli inſcripti accedet, quæ quovis polygono cir-

circumſcripto minor eſt. Exempli cauſa; ſexta pars CDEC hexagoni circumſcripti major eſt ſexta parte C*dmn*C dodecagoni circulo circumſcripti.

Idem de quavis alia figura eidem circulo circumſcripta demonſtrari poterit (*fig.* 123, & 124). Triangulum circumſcriptum majorem habebit aream, & perimetrum quadrato; hoc pentagono; atque ita porro. Q. E. D.

THEOREMA IV.

506. *Polygonum quodvis regulare circulò inſcribi, & circumſcribi poteſt* (*fig.* 69).

DEMONSTRATIO I. In quovis polygono regulari omnes radii obliqui ſunt æquales; ſi ergo a centro polygoni radio quovis obliquo CA deſcribatur circulus ABDRA, tranſibit per omnes vertices angulorum; & polygonum *inſcriptum* erit.

II. In quovis polygono regulari radii omnes recti C*b*, C*r* ſunt æquales. Si ergo a centro polygoni radio recto quovis C*b* deſcribatur circulus *abdra*, tanget medium laterum omnium MN, DE, EF; & polygonum erit *circumſcriptum*. Q. E. D.

RATIO FIGURARUM ISOPERIMETRARUM.

507. *Figura iſoperimetra* dicuntur, quarum perimetri ſunt æquales. Exempli gratia, ſi quatuor laterum rectanguli ſumma alterius cujuſque rectanguli laterum ſummæ æqualis eſt, rectangula ſunt iſoperimetra; eandem enim eorum ambitus dimenſionem habet (467).

THEOREMA I.

508. *Polygona regularia homonyma, iſoperimetra, & radios rectos æquales habentia areas ha-*

habent æquales. Areæ enim ſunt producta radiorum rectorum æqualium in ſemiperimetros æquales (502). Q. E. D.

THEOREMA II.

509. *Si polygona regularia ſint iſoperimetra, & non homonyma, quod plura habebit latera majorem aream habebit.*

DEMONSTRATIO. Cujuſque ex his polygonis area æqualis eſt producto radii recti in ſemiperimetrum; ergo poſita in quovis polygono eadem perimetro, eo major erit area, quo major radius rectus.

Atqui quo plura polygonum habebit latera, eo major erit radius rectus (469). Exempli cauſa, poſitis pentagono, & hexagono iſoperimetris, radius rectus hexagoni radio pentagoni major erit.

Si enim eſſent æquales, utrumque polygonum eidem circulo circumſcribi poſſet (506); & tunc quum perimeter hexagoni peripheriæ propius accedat circuli inſcripti, minor eſſet perimetro pentagoni (505); quod eſt contra hypotheſim. Si ergo iſoperimetra ſunt, radius rectus hexagoni radio recto pentagoni major eſſe debet; unde majorem factorem habet ſexagonum, adeoque majorem aream. Si ergo duo polygona regularia non homonyma ſunt iſoperimetra, quod plura habet latera aream majorem habet. Q. E. D.

510. COROLLARIUM. *Quum circulus ſit polygonum regulare infinitorum laterum* (466) *majorem aream habet quavis alia figura iſoperimetra.* Quodvis enim aliud polygonum regulare iſoperimetrum pauciora habet latera.

THEOREMA III.

511. *Inter figuras iſoperimetras, quæ eundem ha-*

habent laterum numerum, & angulos homologos æquales; quæ latera habebit æqualia, aut magis ad æqualitatem accedentia majorem aream habebit.

DEMONSTRATIO. Sint, exempli gratia, duo rectangula iſoperimetra, ſed quorum unum baſim habeat altero majorem, altitudinem minorem: ita tamen, ut quatuor unius latera ſummam faciant ſummæ quatuor laterum alterius æqualem: Quod altitudinem, & baſim habebit magis ad æqualitatem accedentem majorem aream habebit.

Ponamus enim utriuſque rectanguli aream eſſe productum baſis, & altitudinis, quarum ſumma ſit 8.

I. Si ſumma 8 dividatur in duas partes æquales 4, & 4; productum, ſeu area erit $4 \times 4 = 16$.

II. Si ſumma 8 inæqualiter dividatur in 5, & 3: area erit productum $5 \times 3 = 15$; minus quam 16.

III. Si magis inæqualiter ſumma 8 dividatur in 6, & 2; area erit productum $6 \times 2 = 12$ adhuc minus, quam 15.

IV. Si adhuc ſumma 8 magis inæqualiter dividatur in 7, & 1: area erit productum $7 \times 1 = 7$ adhuc minus quam 12.

V. Si adhuc ſumma 8 magis inæqualiter dividatur in $7 + \frac{1}{2}$, & $\frac{1}{2}$; erit area productum $7 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 3 + \frac{3}{4}$, adhuc minus quam 7; atque ita porro in infinitum.

Eadem theoria uti poſſumus, ut patet, in parallelogrammis, in triangulis, in quibus area productum eſt majoris, aut minoris baſis in majorem, aut minorem altitudinem, aut dimidiam altitudinem. Producta areas referentia eo minora erunt, quo duo factores magis erunt inæquales. Q. E. D.

512. COROLLARIUM. Hinc *quadrati* area major eſt area *rectanguli* iſoperimetri; hu-

jus

jus area major eſt area *parallelogrammi obliquanguli*, cujus quatuor latera quatuor lateribus rectanguli ſingula ſingulis ſunt æqualia; *trianguli æquilateri* area major eſt area *trianguli iſoſcelis*, aut *ſcaleni* iſoperimetri; atque ita de ceteris.

P R O B L E M A.

513. *Circulum deſcribere, cujus area ſit ad alterius circuli aream in data ratione; puta dupla, aut ſubdupla, tripla aut ſubtripla.*

SOLUTIO. Lineam deſcribe, quæ ad diametrum a circuli dati rationem dicat, quam ad datum circulum dicere debet circulus quæſitus. Exempli gratia.

I. Si circulus quæſitus eſſe debeat dati duplus, deſcribe lineam $2a$ duplam diametri a circuli dati. Quære mediam proportionalem m (414) inter rectam $2a$, & diametrum a. Erit proportio continua $\div\, 2a . m . a$; adeoque $\div\, a . m . 2a$.

Media hæc proportionalis m erit diameter circuli dupli quæſiti; in poſtrema enim proportione continua quadratum primi termini eſt ad quadratum ſecundi, ut primus ad tertium; ſcilicet $a^2 : m^2 :: a : 2a$ (234).

Atqui in hac ſecunda ratione conſequens duplus eſt antecedentis; ergo in prima quoque ratione conſequens eſt duplus antecedentis; hoc eſt: quadratum diametri m duplum eſt quadrati diametri a. At circuli ſunt inter ſe ut quadrata diametrorum (501): ergo circulus, cujus diameter ſit m duplus erit circuli, cujus diameter eſt a.

II. Si circulus quæſitus eſſe debeat ſubtriplus circuli dati, habebis primo $\div\, \frac{1}{3} a . m . a$; deinde $\div\, a . m . \frac{3}{3} a$; tandem $\div\, a^2 : m^2 :: a : \frac{1}{3} a$.

RA-

RATIO HYPOTHENUSÆ AD LATERA.

514. DEFINITIO I. In triangulo rectangulo dicitur *hypothenuſa* latus angulo recto oppoſitum. In triangulo ABC rectangulo ad B latus AC eſt hypothenuſa: recta BD eſt perpendicularis ab angulo recto in hypothenuſam ducta (*fig.* 70).

Ita in triangulo BDC rectangulo ad *m* latus BC eſt hypothenuſa. Ita quoque in triangulo BDA rectangulo ad *n* latus AB eſt hypothenuſa.

Hinc apparet, eandem lineam, puta BC, eſſe poſſe ſimul hypothenuſam trianguli BDC, & latus alterius trianguli ACB.

515. DEFINITIO II. *Quadratum lineæ* eſt, cujus ſingula latera huic lineæ ſunt æqualia. Exempli gratia (*fig.* 71).

In triangulo ACB rectangulo ad B quadratum hypothenuſæ AC eſt quadratum ACFE; *quadratum majoris lateris* BC eſt quadratum BN; *quadratum minoris lateris* AB, quadratum BM.

Lineæ quadratum paſſim ſcribitur $\overline{AC}^2$. Hoc indicat non lineares quantitates, ſed ad quadratum elevatas. Quare AC eſt linea: $\overline{AC}^2$ linea ad quadratum elevata.

L E M M A.

516. *Si a vertice anguli recti in triangulo rectangulo ABC demittatur perpendicularis in hypothenuſam, tres habebuntur lineæ mediæ proportionales; ſcilicet* (*fig.* 70),

I. *Minus latus AB medium proportionale inter totam hypothenuſam AC, & ſegmentum adjacens AD.* Minus triangulum ABD, & majus ABC ſunt ſimilia. Utrumque enim habet angulum rectum, tum angulum A utrique com-

communem ; ergo tertio æqualis eſt , nempe angulus $o = C$. Ergo triangulorum latera homologa ſunt proportionalia ; ergo hypothenuſa AC majoris trianguli ad hypothenuſam AB minoris ut latus minus AB majoris trianguli ad latus minus AD minoris trianguli ; ſeu AC : AB :: AB : AD.

II. *Latus majus BC medium proportionale inter totam hypothenuſam , & ſegmentum adjacens DC*. Triangulum medium BDC , & majus ABC ſunt ſimilia . Utrumque enim habet angulum rectum , & angulum C communem ; ergo tertium tertio , *e* ipſi A æqualem . Ergo latera homologa ſunt proportionalia ; ergo hypothenuſa AC majoris trianguli ad hypothenuſam BC medii , ut latus majus BC majoris trianguli ad latus majus DC medii ; ſive AC : BC :: BC : DC.

III. *Perpendicularis BD media proportionalis inter duo ſegmenta* AD , DC. Minus triangulum ABD, & medium BDC ſunt ſimilia . Utrumque enim habet angulum rectum : angulus *e* modo demonſtratus eſt æqualis angulo A ; ergo, & angulus *o* æqualis ipſi C . Ergo latera homologa ſunt proportionalia ; ergo latus minus AD minoris trianguli ad latus medium BD . ut latus minus BD trianguli medii ad latus medium DC ; ſeu AD : BD :: BD : DC . Q. E. D.

THEOREMA I.

517. *In triangulo rectangulo quadratum hypothenuſæ æquale eſt quadratis laterum* (*fig.* 71),

DEMONSTRATIO. Sit triangulum ABC , cujus hypothenuſa AC. Angulus B rectus eſt; eſt enim angulus inſcriptus diametro inſiſtens AC (368) . A vertice anguli recti in hypothenuſam demitte perpendicularem BDG : hæc dividet quadratum AF hypothenuſæ in duo rectangula AG , DF , Oſtendo AG eſſe æquale ipſi

ipſi BM quadrato ipſius AB, & DF ipſi BN quadrato ipſius BC (515).

I. Lemmate præcedente oſtendimus, latus AB eſſe medium proportionale inter baſim totam AC, & ſegmentum AD. Aſt AE=AC; ergo AE : AB :: AB : AD; ergo productum extremorum æquale producto mediorum; atqui productum extremorum eſt rectangulum AG, & productum mediorum quadratum BM; ergo rectangulum AG æquale eſt quadrato BM.

II. Ibi quoque oſtendimus, latus BC eſſe medium proportionale inter baſim totam AC, & aliud ſegmentum DC. At AC=CF; ergo CF : BC :: BC : DC; ergo rectangulum Df productum extremorum æquale eſt quadrato BN producto mediorum.

III. Rectangulum AG eſt æquale quadrato BM: rectangulum DF quadrato BN. Duo hæc rectangula ſimul ſumpta quadratum hypothenuſæ, & alia duo quadrata ſunt quadrata laterum; ergo quadratum hypothenuſæ æquale eſt quadratis laterum trianguli rectanguli. Q. E. D.

518. NOTA. Theorema hoc matheſi, trigonometriæ præſertim, immenſam lucem affundit. Pythagoras ejus auctor quanti momenti eſſet ita novit, ut centum tauros Diis ſuis immolaſſe feratur; ſive in gratiarum actionem inventi adeo hominibus utilis, ſive, ut doctis oſtenderet quo œſtro ex invento, unde immortalitatem aſſequeretur, correptus eſſet.

THEOREMA II.

519. *Diagonalis quadrati etſi lateri ſit numeris incommenſurabilis, lineis tamen commenſurabilis eſt* (*fig.* 73).

DEMONSTRATIO I. Diagonalis AC lateri cuivis AD *numeris incommenſurabilis eſt*. Quadratum enim diagonalis AC quadratis late-

rum

rum AD, DC æqualis eſt, quum ſit hypothenuſa trianguli rectanguli ADC. At latera AD, DC ſunt æqualia; ergo quadratum diagonalis duplum eſt quadrati unius lateris AD. Quare hæc duo quadrata ſunt ut 2, & 1. Ergo diagonalis AC eſt ad latus AD, ut radix 2 ad radicem 1; at nullus numerus hanc rationem exprimere poteſt; ergo diagonalis quadrati lateri eſt numeris incommenſurabilis (6, & 216).

De hac prima parte, quam ulterius demonſtrare non refert, plura non addemus. Satis eſt ſcire, nullam eſſe aliquotam communem, qua in numeris integris, aut fractis diagonalem, & latus metiamur. Semper ſupereſt quantitas *ſurda*, ratio incommenſurabilis, & numeris non exhibenda inter utrumque.

II. Diagonalis eſt lateri *lineis commenſurabilis*. Diagonalem enim AC, & latus AD in directum pone. Lineam compoſitam biſeca, & centro puncto biſectionis, radio dimidia circulum deſcribe (*fig.* 49). In compoſita cape partem diagonali æqualem, & ad hujus extremum eleva illi perpendicularem GE ad peripheriam uſque: hæc (414) erit media proportionalis inter diagonalem, & latus quadrati. At media proportionalis inter duas lineas communem inter illas rationem exprimit; ergo ratio inter diagonalem, & latus quadrati lineis exprimi poteſt. Q. E. D.

520. NOTA. Hæc altera pars theorematis difficultatem ſolvit, quæ objici poſſet proportioni inter homologa triangulorum latera intercedenti, cui geometria univerſa innititur.

Objectio eſt. Sint duo latera trianguli, alterum lateri, alterum diagonali quadrati æqualia. Hic, inquient, parallela baſi trianguli latera proportionaliter non ſecat; quum enim latera integra ſint incommenſurabilia, partes eorum ſimiles erunt quoque incommenſurabiles (*fig.* 44).

RESPONSIO. Ex demonſtratis objectio facile diluitur. Diagonalis, & latus quadrati ſunt quantitates numeris incommenſurabiles, non item lineis. Ut reſponſio clarius eluceat, ponamus, parallelam DE dimidium ſpatium ſecare baſi AB, & parallelæ per verticem trianguli ductæ FG ſecare: quod ſane fieri poteſt. Tunc parallela DE ſecabit in utroque latere dimidium hoc proximum numeris exprimibile, plus dimidium reſidui hujus *ſurdi*, ſeu *incommenſurabilis* nullo numero exprimendi.

PROBLEMA.

521. *Quadratum alterius duplum, aut ſubduplum efficere* (*fig.* 73).

SOLUTIO I. Ad quadratum dati duplum efficiendum, ſuper diagonalem AC quadrati dati quadratum conſtrue. Quadratum hoc GH erit æquale quadratis duorum laterum quadrati dati; ergo dati duplum. Exempli cauſa; quadratum ſuper diagonalem, ſive hypothenuſam AC eſt æquale quadrato lateris AB plus quadrato lateris BC (517). Deinde (*fig.* 124),

II. Ut facias quadratum ſubduplum, ſive area dimidium quadrati dati ABCD, latus unum AD fac eſſe diagonalem *ac* novi quadrati. Erit hoc dimidium quadrati ABCD ſuæ hypothenuſæ *ac* = AD; quadratum enim hypothenuſæ *ac* æquale eſt duobus quadratis laterum æqualium *ad*, *dc* quadrati *abcd*, cujus erit hypothenuſa (517). Quare ABCD = 2*abcd*.

AR-

ARTICULUS III.

SECTIONES SUPERFICIERUM.

522. OBSERVATIO. Poſt conſideratam ſuperficierum planarum æqualitatem, & rationem, ſupereſt, ut illas conſideremus tamquam plana, quibus aut lineæ, aut ſuperficies, aut ſolida ſecentur.

Quævis ſuperficies plana conſideratur ut profunditate carens: ipſa enim ſolitaria profunditatem habet tantum infinite parvam, quæ non attenditur, & nulla cenſenda eſt; quum infinities ſumenda eſſet ad ſenſibilem profunditatem efficiendam (238).

523. DEFINITIO. *Planum eſt ſuperficies, cui ſi linea recta quaquaverſum applicetur, hæc illi ubique congruet*; ſeu ſuper quam ſi linea recta revolutionem efficit, omnia ejus puncta tanget. Hujuſmodi eſt ad ſenſum ſuperfities ſpeculi communis, quod ſpeculum planum nuncupatur.

Ab hac definitione fluunt corollaria ſequentia, quæ veluti axiomata haberi poſſunt, quæque breviter explicabimus.

524. COROLLARIUM I. *Planum eſt minima ſuperficies, qua lineis, quibus terminatur, includi poſſit*. Quare ſuperficies plana eſt minor convexa, aut concava iiſdem extremis incluſa. Exempli gratia, ſuperficies plana eſt minima, quæ lineis AB, BC, CD, DA circumſcribi poſſit (*fig.* 47).

525. COROLLARIUM II. *Communis ſectio lineæ, & plani eſt punctum, plani cum plano eſt linea recta, plani cum ſolido eſt ſuperficies plana*. Tria hæc vel minima animadverſione evidentia dignoſcentur. Exempli gratia (*fig.* 122).

Si

Si linea AER ſecet planum MCNB, *patet*, communem ſectionem eſſe punctum E. *Si planum ſecet*, patet, partem ſphæræ ſectæ utrinque planum tangentem, & illi congruentem planum eſſe.

526. COROLLARIUM III. *Si duo puncta lineæ rectæ in plano ſint*, *tota recta erit in plano*. Niſi enim tota AC eſſet in plano, illi non congrueret; ergo illud non eſſet planum (*fig.* 57).

527. COROLLARIUM IV. *Ad plani poſitionem ſtatuendam ſatis eſt trium ſuorum punctorum non in directum poſitorum poſitionem noſcere*. Cetera enim omnia plani puncta eandem cum notis punctis directionem habent, quæ rectis conjuncta triangulum planum efficerent.

528. COROLLARIUM V. *Duo plana ſunt parallela*, *quum in uno tria puncta ſunt non in directum poſita ab altero plano æque diſtantia* (*fig.* 122).

Explicatio. Patet, duo rectangula SE, AF poſſe invicem æque diſtare, puta pollicem, in infinitis punctis, in tota linea EF, quin ſint parallela; at ſi tria puncta unius quæ ſint vertices trianguli, æque diſtant a tribus punctis alterius, puta pollicem, plana ſunt parallela.

Planorum paralleliſmus definitur ab æqualibus perpendicularibus ſupra alterutrum elevatis, & ad alterum, ſi opus ſit productum, terminatis.

529. COROLLARIUM VI. *Duo plana ſunt invicem perpendicularia*, *quum alterum elevatum in neutram partem declinat*.

Exempli cauſa, plana MCNB, ARDS, quorum communis ſectio eſt EF, ſunt invicem obliqua; angulus enim AEM eſt acutus. Fiat hic rectus: plana erunt invicem perpendicularia (*fig.* 122).

Si ſupra plani punctum ponatur normæ latus (364), ita, ut hoc plano exacte congruat; planum normæ lateri elevato, & perpendicu-

lari

lari congruens erit perpendiculare plano , cui alterum normæ latus eſt applicatum.

530. COROLLARIUM VII. *Tria quævis puncta in ſpatio infinito ſumpta ſunt in plano.*

DEMONSTRATIO. Sint hæc centra ſolis, telluris, & lunæ. Concipi poſſunt tres lineæ hæc centra jungentes : hæ triangulum efficient.

Concipe rectam indefinitam, quæ a vertice quovis hujus trianguli ſuper latera excurrat ad baſim. Recta hæc planum deſcribet, quod per tria data puncta, centra ſcilicet ſolis, telluris, & lunæ, tranſibit: ergo tria hæc puncta ſunt in plano. Demonſtrari eodem modo poteſt; centra telluris, Saturni, & Syrii, aut alterius ſtellæ eſſe in plano. Q. E. D.

531. NOTA. In longimetria, in planimetria, & in pluribus phyſicæ partibus ſæpius linea horizontali, & lineis huic perpendicularibus indigemus. Quare *lineam horizontalem, & perpendiculum* noſcere neceſſarium eſt, de quibus agere pergimus.

PERPENDICULUM.

532. DESCRIPTIO. *Perpendiculum*, quod in mathematicis pyxidibus invenitur, filum eſt, cui cylindrus metallicus appenſus eſt. Fili hujus uſus eſt directiones horizonti perpendiculares indicare, planorum poſitionem, paralleliſmum, diverſas ad horizontem inclinationes definire. Ad hoc, perpendiculi filum ſuſpenditur vertici anguli effecti a lateribus normæ, inter quæ quadrans in gradus diviſus D E aptatur (*Fig.* 75).

I. Si plano cuivis imponantur puncta B, & C normæ, ita ut filum A P libere moveri poſſit ſecus quadrantem; innoteſcet num planum ſit horizonti parallelum, aut perpendiculare, aut inclinatum; ſicuti filum tranſibit per

punctum *m*, vel ab illo magis, minuſve recedet. Semicirculus pyxidis mathematicæ normæ aptatus quadrantis loco eſſe poteſt.

Exempli cauſa, dicemus, planum B C eſſe horizonti parallelum, ſi filum A P per medium quadrantem D E tranſit; planum ad datam partem elevari, gradum unum, ſi filum A P a medio quadrante gradum unum recedit in partem oppoſitam; Planum B C gradibus 45 inclinari, ſi filum A P fiat lateri A B, vel A C normæ parallelum; atque ita de ceteris.

II. Corpus quodvis grave funiculo appenſum ſatis indicat, num linea, aut ſuperficies ſit horizonti perpendicularis; funiculus enim a corporis gravitate tractus directionem habet ad centrum terræ, quæ directio horizonti perpendicularis eſt (*Phy.* 247). Si ergo linea, aut ſuperficies ſint horizonti perpendiculares, earum directio funiculi directioni congruere debet.

LINEA LIBELLÆ VERA, ET APPARENS.

533. DEFINITIO. *Linea libella* eſt linea, cujus puncta omnia ad ſenſum a centro terræ æque diſtant; ſeu quæ ubique tranquillo mari terræ circumfuſo parallela eſſet. Quum vero terræ figura ad ſphæricam proxime accedat (*Phy.* 1364), linea libellæ erit ferme circularis. Quare *ſolum ad libellam expendere* eſt in hoc ſolo lineam quærere, cujus puncta omnia ad ſenſum a terræ centro æque diſtent, ſeu lineam ſuperficiei aquæ toti terræ circumfuſæ, & quieſcenti parallelam.

I. Sit ACDEA terræ peripheria. Si in A haſta perpendicularis AS defigatur, in cujus ſummitate poſitum ſit teleſcopium, ſeu dioptra alligata ſit haſtæ perpendicularis, & per teleſcopium, vel per dioptram collimetur in remotum objectum R, *libella apparens* erit SR, *li-*

libella vera erit NSH. Si vero oculus ſit in A libella apparens erit AH, vera AB.

Erit linea SR, vel AH libella apparens, propterea quia nobis videtur horizontalis; non erit vera, propterea quia punctum H re ipſa magis a terræ centro remotum eſt, quam punctum A, tota quantitate BH. Si linea HA ſupponatur alveus, fluidum per hunc alveum ab H in A deſcenderet; fluida enim omnia tendunt ad terræ centrum accedere, & fluidum ab H ad A communicans, tranſiens ab H in A ad terræ centrum accedet.

II. Hinc ſequitur, *radium viſivum, ſeu libellam apparentem AH eſſe vera libella AB tangentem*. Quum itaque tangens a peripheria, quam tangit, magis magiſque recedat; quo longior ſit linea SR, vel AH libellæ apparentis, magis a vera libella SH, vel AB recedit ſeſe ſupra hanc attollendo.

III. Quum telluris peripheria ſit multo maxima, linea 100, vel 110 hexapedas longa in telluris ſuperficie ad ſenſum recta eſt; & tunc libella vera ab apparente ſenſu non diſtinguitur; promiſcue itaque ſumi poſſunt. At quum diſtantia SR, vel AH multo major eſt, tunc libella apparens AH ſupra veram attollitur; & ut vera habeatur, hic exceſſus elevationis ab apparente demendus eſt.

534. NOTA. Adjicimus tabulam elevationis libellæ apparentis AH ſupra veram AB. Prima ſemper altior eſt, ſeu magis a centro terræ diſtans, quam ſecunda.

I. Quum duorum punctorum diſtantia 100 ferme hexapedas non excedit, differentia elevationis inter utramque libellam veluti infinite parva eſt, & ſine ſenſibili errore alterutra ſumitur.

II. Quum duorum punctorum diſtantia A, H eſt hexapedarum 4000, libella apparens ſupra

veram attollitur pedes 14, pollices 8, nec promiſcue ſumi poſſunt.

III. Exceſſus libellæ apparentis AH ſupra veram AB æqualis eſt exceſſui ſecantis CH ſupra radium TB, vel TA; atque hic exceſſus BH, vel B*x*, quum angulus ATH exiguus eſt, proxime æqualis eſt ſinui verſo A*v* hujus anguli (622); ſive exceſſui radii AT ſupra ſinum BM anguli complementi MTB. Quare ſemper facile eſt ex tabulis ſinuum exceſſum hunc libellæ apparentis AH ſupra veram AB invenire; ſive exceſſum ſumendo ſecantis ſupra radium, ſive exceſſum ſinus totius ſupra coſinum MB=T*v*.

IV. Hac theoria, ac geometrica methodo ſequens tabula conſtructa fuit. Reſpicit hæc tantum parvas diſtantias, quibus tantum in libellæ uſu paſſim indigemus (*Fig.* 77).

Juxta hanc tabulam a Picardo, & Hireo traditam, ſi linea RVST eſſet hexapedarum 500, punctum T terminus libellæ apparentis veram *n* altitudine excederet pollicum 2, linearum 9. Ut ergo haberetur vera libella ſupra punctum B, pollices 2, lineæ 9 ab elevatione T demere oporteret. Si linea RVST eſſet hexapedarum 1000, a libella inventa in T demendi eſſent pollices 11. Reſidua altitudo BT eſſet libella vera, ſeu libella *n* quæſita.

V. Supputatione inventum eſt, & in tabula apparebit, exceſſum libellæ apparentis ſupra veram creſcere in ratione duplicata diſtantiarum. Exempli gratia (*Fig.* 76), quum arcus AB eſt hexapedarum 1000, exceſſus eſt pollicum 11; quum arcus AB eſt hexapedarum 2000, exceſſus eſt pollicum 44; atque ita porro. Semper igitur etiam ſine tangentibus, & coſinubus inveniri poterit hic *libellæ apparentis* ſupra veram *exceſſus* pro quavis diſtantia hac analogia: Quadratum hexapedarum 2000 eſt ad pollices

44,

44, ut quadratum diſtantiæ datæ, aut inventæ, puta hexapedarum 2786 ad x, quod exprimet exceſſum libellæ apparentis ſupra veram ad diſtantiam hexapedarum 2786; atque ita porro.

Tabula elevationum libellæ apparentis.

Diſtantiæ.	Elevationes.		Diſtantiæ.	Elevationes.		
Hexapedæ.	Pollices.	Lineæ.	Hexapedæ.	Pedes.	Pollic.	Lineæ.
50	 0	$\frac{1}{3}$	750	0	6	3
100	 0	1 $\frac{1}{3}$	800	0	7	1
150	 0	3	850	0	7	11 $\frac{1}{2}$
200	 0	5 $\frac{1}{3}$	900	0	8	11
250	 0	8 $\frac{1}{3}$	950	0	10	0
300	 1	0	1000	0	11	0
350	 1	4 $\frac{1}{3}$	1250	1	5	2 $\frac{1}{2}$
400	 1	9 $\frac{1}{3}$	1500	2	0	9
450	 2	3	1750	2	9	8 $\frac{1}{2}$
500	 2	9	2000	3	8	0
550	 3	6	2500	5	8	9
600	 4	0	3000	8	3	0
650	 4	8	3500	11	2	9
700	 5	4	4000	14	8	0

LIBELLA AQUEA.

535. DESCRIPTIO. Inſtrumentum, cujus in libella capienda frequentior eſt uſus, machina eſt admodum ſimplex; quæ *libella aquea* nuncupatur; ſuperficies enim aquea libellam quæſitam exhibet (*Fig.* 77, *&* 78).

Libella aquea ſatis lato tubo conſtat ferreo, & ſtamno obducto RMS ad extremitates inflexo ad angulos rectos, quarum utrique agglutinatur tubus vitreus R*m*, R*n*, in quibus

aquæ ſuperficies utrinque videri poſſit. In medio M eſt alter tubus ferreus, & ſtamno obductus ipſi perpendicularis, cui haſta infigitur MV. Hæc perpendicularis ſolo infigitur, ſeu ejus loco tripus adhibetur.

Quum inſtrumento uti volumus, aqua per tubos vitreos impletur uſque in RS. Tunc aquæ ſuperficies per vitrum apparens ad libellam componitur in R, & S; ut enim experientia docet, liquida communicantia, & mutuas ſuas actiones libere exerentia ad libellam, ſeu ad æqualem a terræ centro diſtantiam componuntur (*Phy.* 625). Quare ſi ab R in S collimetur ſecus ambas aquæ ſuperficies, radius viſivus duo puncta habebit R, & S ad libellam; & ſi radius viſivus, ſeu recta R S indefinite protrahatur uſque in T, recta RST erit linea libellæ apparentis.

Libellam hanc Ricciolius omnibus anteferebat, & in mediocribus diſtantiis hæc paſſim in uſu eſt. Ut commodior evadat, pinnulæ duæ mobiles ad extremitates R, & S ſtatui debent, quæ cochlea ad aquæ altitudinem deferri utrinque poſſint in R, & S. Pinnulæ radii viſivi directionem tutiorem reddent; & quoniam tunc non amplius per tubum collimare opus erit, viſio, quæ parvo teleſcopio adjuvari poterit ad ingentem diſtantiam clara, & diſtincta fiet.

Tubus ferreus ſatis longus, & latus eſſe debet, ut aqua utrinque libere moveri poſſit. Neque neceſſe eſt, haſtam MA accurate horizonti perpendicularem eſſe, neque tubi tranſverſi directionem eſſe accurate horizontalem; aqua enim ſe ipſa exacte ad libellam ſtatuet in R, & S; & pinnulæ mobiles opportune utrinque elevatæ, aut depreſſæ libellam exacte indicabunt.

Ceteræ libellæ, quæ in majoribus diſtantiis adhibentur, ab hac vix differunt; niſi teleſcopio,

pio, quod illis additur, ad objecta clarius diſcernenda.

Alibi de ſimpliciori libella nonnulla protulimus, qua ſæpius quantum ſatis & exacte linea horizontalis obtineri poteſt.

P R O B L E M A.

536. *Datis in ſolo duobus punctis, num ad libellam ſint, & quantum alterum præ altero a terræ centro diſtet invenire* (*fig.* 77).

SOLUTIO. Puncta A, & B eſſe poſſunt parum, & multum diſſita. Si multum ſint, eorum libella aut unica poſitione, aut per ſeriem punctorum ad libellam quæri poteſt.

I. Ponamus, diſtantiam A B in ſolo eſſe tantum hexapedarum 100, aut 110 in directum. In hac hypotheſi, in qua libella apparens a vera ad ſenſum non differt, libellam aqueam in A ſtatuo, & coadjutorem in B mitto ingenti pertica B P inſtructum, quam perpendicularem ſtatuere debet in B; & ſatis ampla tabella, in qua horizontalis, & lata linea nigra deſcripta ſit. Illum moneo, ut quum fuerit ad terminum ſtatutum, tabellam perticæ adnexam ſecus illam excurrere faciat oportebit ita, ut linea nigra ſemper ſit perticæ BP perpendicularis. Per ſuperficies R, S aquæ collimo; & quum video radium viſualem R ST in lineam nigram incurrere coadjutori indico, ut ſiſtat, & altitudinem T B dimetiatur: ego altitudinem V A radii viſivi R V S T dimetior.

Indico coadjutori, ut redeat. Si altitudo T B ab ipſo inventa meæ A V æqualis eſt, puncta A, & B ſunt ad libellam. Quum enim puncta V, T æque a terræ centro diſtant, ſi ab his æqualibus diſtantiis demo partes æquales V A, T B, puncta quoque A, B æque a terræ centro diſtabunt. Si vero altitudo T B minor ſit altitudine VA, altitudinem TB ab VA

ſubduco reſiduum HA indicat, punctum A eſſe puncto B terræ centro propinquius tota quantitate HA. Facile apparet quid faciendum, ſi altitudo TB altitudine VA major eſſet.

II. Si diſtantia VT nimia ſit, ut unica ſtatione ejus libella inveniatur; in hac diſtantia plura puncta A, & N, N, & O, O, & B invicem ad hexapedas 100 diſſita eligenda ſunt, eaque libella expendenda methodo nunc expoſita; ſi vero unica ſtatio fieri velit, a libella apparente ejus exceſſus ſupra veram ex præcedente tabula ſubducendus eſt.

III. Punctorum quoque A, & B libella haberi poteſt, quæcumque eorum diſtantia ſit, libellam primo ſtatuendo in A, unde in perticam BP collimabitur; deinde in B, unde in perticam perpendiculariter in AV ſitam collimabitur. Tunc vero apparentis libellæ elevatio non attenditur; hæc enim elevatio pro utraque ſtatione eadem eſt. Exempli cauſa, ſi ab V in T collimando quatuor pollices exceſſus tribuo puncto T; collimando deinde a T in V æque quatuor pollices exceſſus tribuam puncto V; & erit æqualitas reſtituta; eandem enim quantitatem *n*T duabus æqualibus quantitatibus adjicio (*Fig.* 77).

537. NOTA. Si quæratur libella puncti B ad derivandam aquam per canalem, aut aquæductum ex B in H; ut aqua fluat, linea, aut canalis BH inclinari ſucceſſive debebit infra veram libellam a puncto B uſque ad punctum H. Juxta Volfium inclinatio eſſe debet ſaltem $\frac{1}{400}$, & ad ſummum $\frac{2}{400}$ longitudinis, ſeu diſtantiæ BH; hoc eſt: ſi canalis BH longus eſt hexapedas 400, terminus H canalis eſſe debet hexapedam, ad ſummum duas infra punctum H, quod eſt ad libellam cum fonte in B. Ingentes canales, ut alvei fluminum, & fluviorum

rum multo minori inclinatione indigent, ut fluant (*Phy.* 626). At parvi canales majorem majoribus inclinationem poſtulant, & eo majorem, quo arctiores ſunt.

SUPERFICIES IN SOLO EMENSÆ.

538. OBSERVATIO. In planimetria problema propoſuimus, & ſolvimus, quo methodus traditur provinciæ, aut regni aream dimetiendi (453). In hujus problematis ſolutione, montes, ſive excelſa loca, quæ ſtationes fuerunt, conſideravimus perinde ac ſi omnia ad eandem eſſent libellam, & æque a terræ centro diſtantia. At quum perraro montium cacumina ad eandem libellam ſint, area inventa ab his ſtationibus eſſet non ſuperficies æqualis, ſed irregulariter inclinata, & valde tectorum ſuperficiei ſimilis, quibus domus obteguntur; quæ tectorum ſuperficies ſuperficiei baſium domorum multo amplior eſt (*fig.* 64).

Ad hanc itaque ſuperficiem accurate inveniendam, in his montibus puncta varia ad libellam capienda ſunt ea methodo, quam ſupra de libellis agentes tradidimus. Exempli cauſa; ſi in ſolo triangulum DEI metiri debeas, ponamus puncta, ſeu ſtationes D, E inventas fuiſſe ad libellam, & montem I eſſe his ſtationibus multo altiorem.

Tunc ſtatio in hoc monte fiat non in vertice I, ſed in duobus punctis *m*, *n* inferioribus, & ad libellam cum punctis D, E. Tunc metire non triangulum DIE, ſed triangulum D*m*E, & triangulum *m* D*n*, cujus nota erunt duo latera D*m*, D*n*, & angulus his comprehenſus. Dein metire D*n*K, atque ita porro ſemper puncta ad eandem libellam capiendo. Ita exactam provinciæ, ſeu regni ſuperficiem dimetiendam obtinebis.

539. OBJECTIO. Contra hanc methodum

objici poteſt primo, ſuperficiem, quæ invenietur, fore majorem vera; eſſet enim æqualis ſuperficiei quam tellus ſubjecta obtineret, ſi ubique uſque ad puncta ſtationum eſſet elevata. Deinde, ſuperficiem ita inventam non fore convexam, & telluris ſuperficiei ſimilem; conſtabit enim triangulis planis, & admodum irregularis erit.

RESPONSIO I. Primæ objectioni reſpondeo 1. differentiam inter ſuperficiem inventam, & veram fore parvi momenti ratione exiguæ elevationis ſtationum ſupra veram ſuperficiem. 2. Facile, ſi rigida accuratio exigatur, ſuperficiem inventam, & excedentem corrrigi poſſe, ut vera fiat. Quum enim ſphærarum ſuperficies ſint inter ſe ut quadrata diametrorum, ſeu radiorum (584), partes quoque ſimiles harum ſuperficierum in hac ipſa ratione ſunt; partes enim ſimiles ſunt in ratione totorum.

Habebitur ergo proportio: vera ſuperficies eſt ad ſuperficiem inventam, ut quadratum radii terreſtris ad quadratum ejuſdem radii ad puncta ſtationum producti. Quare ſi ſtationes ducentas hexapedas attolluntur ſupra telluris ſuperficiem; quadratum radii terreſtris compara quadrato ejuſdem radii aucti hexapedis ducentis; & a ſuperficie inventa deme quantitatem proportionalem exceſſui quadrati radii aucti ſupra quadratum radii ſimplicis. Reſiduum erit vera ſuperficies.

RESPONSIO II. Alteri objectioni reſpondeo, poſita terra ſphærica, exiguam hujus ſuperficiei partem ſeorſim ſumptam a plena ſuperficie non niſi veluti infinite parum differre; in extenſione ſiquidem hexapedarum 300 curvatura eſt tantum ferme unius pollicis, ut ex tabula elevationis libellæ apparet (534). Hæc igitur ſuperficies ſphærica in praxi plana cenſeri poteſt. Ergo plures parvæ ſuperficies planæ, cujuſmodi ſunt triangula, de quibus

bus agimus, ad ſenſum, & citra errorem ullius momenti, ſphæricam terræ ſuperficiem metiri poſſunt.

MONTIUM INÆQUALITAS.

540 NOTA. Quum quæritur ſuperficies triangularis tribus montium verticibus comprehenſa, ſuperficies inventa plana eſt, & plano triangulari ſimilis ad hos montium vertices pertingenti, a quo valles, tumuli, inæqualitates omnis generis in ipſa terræ ſuperficie obtegerentur. Hæc eſt vera ſuperficies tribus iis punctis terminata. Superficies enim terræ conſideratur reſpectu habito ad corpora horizonti perpendicularia, quæ continere poteſt. Atqui evidens eſt, *montium curvitate, & elevatione hanc ſuperficiem non augeri*; & in convexa montis conici ſuperficie plures arbores diametro unius pedis horizonti perpendiculares ſtatui non poſſe, quam quæ in baſi ſtatuerentur. Quælibet enim arbor ſemper in horizontali montis baſi ſpatium habebit propriæ ſuæ baſi correſpondens (*Fig.* 118).

Ut hoc clarius pateat, concipe conum rectum BAC cylindro TBCV ejuſdem cum cono baſis, & altitudinis inſcriptum. Patet, plura ſolida *rn*, *ſm*, *vn* in ſuperficie convexa coni collocari non poſſe baſi AB perpendicularia, quam quæ in ipſa baſi collocarentur; ſumma enim horum ſolidorum baſibus ſuis *nm*, *mn*, A *m* convexæ ſuperficiei coni inſiſtentium includetur capacitate cylindri, quam coni baſis BCB metitur.

Sive (*Fig.* 89), concipe ſolidum RABS eſſe theatrum, cujus baſis obliqua AM ſit platea. Evidens eſt, baſim horizontalem AB totidem ſellas, aut ſpectatores ſtantes contenturam, quot planum inclinatum, ſeu platea AM

horizonti obliqua, & elevata continebit; cujuſque enim ſellæ baſis *n m*, aut ſpectatoris in baſi inclinata id ipſum ſpatium perpendiculare occupat, quod occuparet in *a b* ſupra baſim AB horizonti parallelam.

Hinc apparet, qua ratione verum ſit, *montium terreſtrium elevationes, & vallium depreſſiones*, etſi re ipſa majorem præbeant in tellure ſuperficiem inclinatam, & irregularem, non eam proinde aptiorem efficere ad plures domos, aut arbores, aut plantas horizonti perpendiculares ſuſtinendas, quam ſi ubique ſuperficies æqualis eſſet.

541. CONCLUSIO. Poſt ſuperficies planas in earum æqualitate, rationibus, ſectionibus, reſpectivis poſitionibus conſideratas, ſupereſt ut planas, & curvas ſuperficies in ſolidis conſideremus. Hoc prima parte tractatus ſequentis præſtabimus.

TRACTATUS III.

SOLIDA, SIVE STEREOMETRIA.

542. DEFINITIO. S*tereometria* (302) eſt ſcientia extenſionis in tribus ſuis dimenſionibus, longitudine, latitudine, & profunditate conſiderata. Hoc tractatu primum *corporum ſuperficies*, dein *corporum ſoliditas* expendetur.

AR-

ARTICULUS PRIMUS.

SUPERFICIES CORPORUM.

543. DEFINITIO I. *Solidum* in geometria dicitur corpus quodvis, durum, liquidum, fluidum, tres habens dimenſiones, longitudinem, latitudinem, profunditatem. Pes aquæ, aut aeris cubicus æque *ſolidum* eſt, ac pes cubicus marmoris.

544. DEFINITIO II. *Superficies corporum*, ſeu ſolidorum dicitur ſumma linearum omnium ſive rectarum, ſive curvarum, quibus exterius trinæ eorum dimenſiones terminantur.

545. DEFINITIO III. Sicuti punctum fluens lineam deſcribit, linea fluens ſuperficiem; ita *ſuperficies fluens ſolidum deſcribit*. Superficies, quæ motu ſuo ſolidum efficeret, vocatur *planum generans*.

Hoc articulo ſolidorum plurium geneſim, ſuarum ſuperficierum evolutionem, harum rationes pertractabimus.

PARAGRAPHUS PRIMUS.

SOLIDORUM GENESIS.

INter ſolida figura diverſa ea præcipue conſiderabimus, ad quæ cetera omnia referri poſſunt: Scilicet priſmata, cylindros, pyramides, conos, ſphæras, ſphæroides.

Polyhedra regularia dicuntur ſolida angulis ſolidis æqualibus, & planis æqualibus terminata, Ex his quinque numerantur: *tetrahedrum*

qua-

quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus comprehenſum; *octahedrum* octo triangulis æquilateris, & æqualibus comprehenſum. *Icoſahedrum* viginti triangulis æquilateris, & æqualibus comprehenſum. *Hexahedrum*, ſeu cubus, ſex quadratis æqualibus comprehenſus; *dodecahedrum* duodecim pentagonis regularibus, & æqualibus comprehenſum. Polyhedrorum theoria, & eorum in ſolida regularia conjunctio, quam multo ſtudio veteres geometræ pertractarunt, apud recentiores ut ferme inutilis obſolevit. Polyhedrum; a πολύ, *multus*, & ἕδρα, *ſedes*: angulus ſolidus inſtar ſedis.

PRISMA.

546. DEFINITIO I. *Priſma* ſolidum eſt in tota longitudine æque latum, pluribus planis terminatum, quæ parallelogramma ſunt, & duabus baſibus, altera ſuperiore, altera inferiore concluſum, quæ ſunt figuræ ſimiles, parallelæ, & æquales.

Priſma pro diverſo laterum baſis numero diverſa nomina ſortitur; dicitur triangulare, quadrangulare, pentagonum, hexagonum, decagonum, dodecagonum pro baſis diverſitate, quæ ſit aut triangulum, aut quadrilaterum, aut pentagonum, aut hexagonum, aut decagonum, aut dodecagonum.

I. *Cubus* dicitur priſma cujuſque magnitudinis ſex planis concluſum, quorum latera omnia æqualia ſint, & anguli omnes recti. Hujuſmodi eſt talus luſorius (*Fig.* 4, & 74).

II. *Parallelepipedum* dicitur priſma ſex parallelogrammis concluſum, quorum oppoſita ſunt æqualia. Quum omnes parallelogrammorum anguli recti ſunt, dicitur *parallelepipedum rectangulum*: hujuſmodi eſt trabs ad normam dolata. Quum anguli oppoſiti non ſunt recti, dicitur *parallelepipedum obliquangulum*. Tale eſt priſma

ma GDAF, ſi angulus CAE, vel ACF acutus ſit, aut obtuſus (*Fig.* 79).

III. *Priſma triangulare* dicitur, cujus baſis ſit triangulum; *priſma pentagonum*, cujus baſis ſit pentagonum quodvis; atque ita de ceteris. Exempli cauſa, ſi baſis ACB ſit triangulum, priſma AEFDCAB eſt priſma triangulare (*fig.* 87).

547. DEFINITIO II. *Axis priſmatis* dicitur recta per centra baſium ducta. *Priſmatis altitudo* dicitur recta ab uno ex angulis priſmatis in baſim, ſi opus ſit, productam perpendicularis. Recta *ax* eſt axis; recta DG, vel AE eſt altitudo (*fig.* 79).

Priſma rectum eſt quum axis eſt baſibus perpendicularis; *obliquum*, quum axis eſt baſibus inclinatus.

548. DEFINITIO III. *Planum generans priſmatis* eſt ejus baſis, quæ juxta axem ſibi parallela fluere concipitur (*fig.* 79).

Si baſis ſuperior ABDC, exempli gratia, fluat ſibi parallela ſecus axem *ax* in EHGF, ſui veſtigia, ſeu ſtrata ubique relinquens, parallelepipedum, ſeu priſma efficiet FR.

Si baſis triangularis ACB aſcendat ſibi parallela in EDF, efficiet priſma triangulare AEDCBF (*fig.* 87).

CYLINDRUS.

449. DEFINITIO. Si planum generans ſit polygonum regulare infinitorum laterum, ſeu circulus, priſma genitum fluxu axi parallelo plani generantis erit cylindrus ABDC (*fig.* 80).

Poteſt ergo cylindrus conſiderari tamquam priſma infinitis planis, ſeu parallelogrammis latitudinis infinite parvæ circumſcriptum.

Axis, & altitudo in cylindro idem ſunt, quod in priſmate. Quare SX eſt axis: CA, ſeu DB altitudo, ſi cylindrus rectus eſt.

Cylindrus hic rectus eſt, ejus enim axis eſt baſi perpendicularis. Eſſet *obliquus*, ſi ejus axis eſſet baſi inclinatus. In cylindro obliquo altitudo eſt perpendicularis ab aliquo puncto baſis ſuperioris in inferiorem ducta.

PYRAMIS.

550. DEFINITIO. *Pyramis* eſt ſolidum baſi terminatum laterum numero finitorum, & puncto; & planis triangularibus circumſcriptum, quorum vertices ad idem punctum concurrunt, quod pyramidis *vertex* dicitur. AEBF eſt pyramis (*fig.*82).

I. Pyramis, ut & priſma, pro laterum baſis numero diverſa nomina ſortitur. Dicitur triangularis, quadrangula, pentagona, dedecagona, ut ejus baſis eſt aut triangulum, aut quadrilaterum, aut pentagonum, aut dodecagonum; atque ita de ceteris.

II. *Altitudo pyramidis* dicitur perpendicularis a vertice in baſim, ſi opus ſit, productam demiſſa. *Axis* pyramidis eſt recta a vertice ad centrum baſis ducta: *apothema* pyramidis recta a vertice in unum ex lateribus baſis, ſi opus ſit, productæ perpendicularis. Quare linea AN baſi EBFE perpendicularis eſt pyramidis altitudo: AN ipſi baſi obliqua, aut perpendicularis, ſed a vertice A ad centrum baſis ducta eſt axis pyramidis: recta An lateri EF perpendicularis eſt apothema lateris hujus pyramidis.

III. Pyramis recta eſt, vel obliqua. *Recta* eſt, quum ejus axis, qui ſemper ad centrum baſis terminatur, eſt baſi perpendicularis; *obliqua*, quum axis eſt baſi inclinatus. Pyramidis latera ſunt ſemper triangula vel æqualia, vel inæqualia, ſimilia, vel diſſimilia (*fig.*82,88,89).

CO-

CONUS RECTUS, ET OBLIQUUS.

551. DEFINITIO I. *Conus rectus* eſt ſolidum, cujus vertex A eſt punctum, baſis BCB circulus, latera infinita triangula iſoſcelia, & æqualia (*fig.* 83).

I. *Planus generans conum rectum* eſt triangulum rectangulum ASBA. Si hoc ſuper unum ex lateribus angulum rectum comprehendentibus volvatur, puta ſuper AS, latus AB deſcribet conum rectum BAC. Pari modo ſi triangulum rectangulum convertatur ſuper latus B S, latus AB deſcribet alium conum rectum, cujus vertex erit in B.

II. Conus, ut & pyramis, ſuam altitudinem habet, ſuum axem, ſuum apothema. *Altitudo coni* ſive recti, ſive obliqui eſt perpendicularis in baſim, ſi opus ſit, producta demiſſa. *Axis coni* eſt recta a vertice ad centrum baſis, quæ ſemper circulus eſt, ducta. *Apothema coni* eſt recta AB, vel AC a vertice ad punctum aliquod baſis ducta. In cono recto apothemata omnia æqualia ſunt: in obliquo apothemata in tota baſis ſemiperipheria creſcunt, aut decreſcunt (*fig.* 83).

552. DEFINITIO II. *Conus obliquus* eſt ſolidum, cujus baſis eſt circulus, cujus vertex punctum, & cujus latera ſunt infinita triangula baſi æqualia, altitudine inæqualia. Si baſi BCB eadem permanente, conus BAC in alterutrum latus inclinaretur, ita ut ejus axis AS diverſam indefinite ad baſim inclinationem obtineret, hic conus rectus obliquus fieret. Conus SR eſt obliquus (*fig.* 120).

CONUS TRUNCATUS.

553. DEFINITIO. Si planum baſi parallelum conum ſecet, pars plano, & baſi interce-

pta

pta erit conus *truncatus*. Quare *bc*CB eſt conus truncatus (*fig.* 83).

In triangulo rectangulo ABC, quod eſt ultima pars figuræ 83, ſi pars *bc*CB, ſeu *mn* CB convertatur circa lineam AB, habebitur conus rectus truncatus, cujus baſis radius erit BC.

SPHÆRA.

554. DEFINITIO. Si ſemicirculus quivis A DB ad puncta A, & B immobilis convertatur circa diametrum AB, ſolidum perfecte rotundum deſcribet ADBFA, quod dicitur *ſphæra fig.* 84).

I. Patet, *ſuperficiei ſphæræ curvaturam ubique æqualem eſſe*. Omnia enim hujus ſuperficiei puncta a centro diſtant intervallo radii ſemicirculi generatoris.

II. Centrum C plani generantis eſt *centrum ſphæræ*. Ab omnibus enim ſuperficiei ſphæræ punctis æque diſtat. Recta quævis CF, CA, C*b*, C*h*, C*a* a centro ad punctum quodvis ſuperficiei ducta eſt *radius ſphæræ*. Recta quævis AB, DF, *bb*, quæ per centrum ſphæræ trenſiens ad duo ſuperficiei puncta pertingit, eſt *ſphæræ diameter*.

III. Linea AB, circa quam volvi concipitur ſemicirculus, eſt *axis ſphæræ*. Puncta A, & B quæ ſunt duo axis extrema, dicuntur *poli ſphæræ*. Diameter quævis, circa quam ſphæra volvi concipiatur, pro axe ſumi poteſt: tunc diametri hujus cujuſque extrema *bb* erunt poli ſphæræ.

III. *Majores ſeu maximi ſphæræ circuli* vocantur ii, quorum planum tranſit per centrum ſphæræ; *minores*, quorum planum extra centrum tranſit. Quare DCFD eſt circulus major ſeu maximus, ut & ADBFA, & *b*C*h*C*b*; ut *dxd*, *ava*, *cbc* ſunt circuli minores.

Ex hac ſphæræ definitione, aut geneſi ſequen-

quentia corollaria deſcendunt per ſe evidentia, quæque proponere ſatis eſt.

555. COROLLARIUM I. *Duo maximi ſphæræ circuli neceſſario ſe interſecant, & eorum communis ſectio eſt recta per centrum tranſiens, adeoque diameter utriuſque circuli (fig. 84).*

EXPLICATIO. Quoniam maximi circuli ii ſunt, qui per centrum tranſeunt, quippe qui ex revolutione majorum chordarum generantur; patet, duos maximos circulos DFD, *bbb* neceſſario ſe interſecare. Quum enim uterque per centrum tranſeat, niſi ſe interſecarent in hoc puncto communi, aut tota utriuſque area una fieret, & tunc unicus circulus eſſent; aut tota unius area extra aliam eſſe deberet, & tunc ille, cujus area eſſet extra centrum, non amplius circulus maximus, ſed minor eſſet. Ergo duo maximi ſphæræ circuli neceſſario ſe interſecant & angulum aliquem inter ſe efficiunt.

II. Quum circulorum plana profunditate careant communis ſectio eſt linea; exempli cauſa, communis ſectio circulorum DFD, & AD BFA eſt recta DCF, quæ neceſſario diameter eſt; tranſit enim per cetrum ſphæræ, in quo majores circuli ſe interſecant.

556. COROLLARIUM II. *Puncta omnia ſemiperipheriæ, quæ circa diametrum convertantur peripherias inter ſe parallelas deſcribent.*

EXPLICATIO. Si ſemiperipheria ADB infinitis punctis conſtans convertatur circa axem AB; patet, punctum D hujus ſemiperipheriæ deſcripturum peripheriam DFD; punctum *d* aliam peripheriam *dxd*; punctum *b* aliam peripheriam *brb*; & has omnes peripherias DFD, *dxd* eſſe inter ſe parallelas, ubique enim invicem diſtant extenſione arcus D*d*, qui cum punctis D, *d* convertitur.

I. Puncta omnia cujuſque peripheriæ *dxd* æque diſtant ab uno ſphæræ polo B; ſingula enim diſtant arcum *d*B; alio quoque polo A ſingula

gula æque diſtant ; diſtant enim ſingula arcu *d*DA. Hinc poli A, & B dici poſſunt poli peripheriarum harum omnium parallelarum ; & diameter AB eſt earum axis communis, per omnia enim earum centra tranſit.

II. Quum circuli omnes paralleli ejuſdem ſpheræ eoſdem polos, & eundem habeant axem AB, axis hic diſtantiam circuli a circulo metietur ; eſt enim perpendicularis inter duo plana parallela. Quare pars NC axis metitur diſtantiam circulorum DFN, *dxd*; pars NB metitur diſtantiam circuli *dxd* a polo B: pars NA diſtantiam ejuſdem circuli a polo A ; atque ita de ceteris.

557. COROLLARIUM III. Ex hac ſpheræ geneſis theoria evidenter ſequitur,

I. *Circulorum parallelorum maximum eſſe, qui per centrum tranſit, & æque diſtat ab utroque polo*. Quare circulus quivis per ſphæræ centrum tranſiens maximus eſt, & ſphæram bifariam dividit. Quicumque circulus per centrum non tranſiens, ex minoribus eſt, & ſphæram inæqualiter dividit.

II. *Circulos parallelos æque a centro diſtantes, alterum verſus polum A, alterum polum B verſus eſſe diametro, & area æquales*. Quare in ſphæra cæleſti, & terreſtri tropici, ut & circuli polares inter ſe æquales ſunt; modo terra, & cælum ſphæræ ſint.

III. *Circulos parallelos cbc, & dxd intra ſphæræ centrum, & eundem polum ſitos eo minores eſſe, quo magis a centro remoti, & polo propinqui ſunt*. Circulorum minimus in polum incidit, ſeu punctum eſt (438).

SPHÆROIDES.

558. DEFINITIO. Si dimidium MAXM polygoni regularis, aut irregularis conſtantis laterum numero finito concipiatur converti circa ſuum

ſuum axem AX; deſcribet ſolidum AMXNA quod vocatur *ſphæroides*; propterea quia aliquam ſphæræ habet ſimilitudinem (*fig.* 81).

I. Si planum generans AXM ſit dimidium polygonum regulare, ſolidum ab hujus plani revolutione genitum erit ſphæroides regularis.

II. Si planum generans ſit dimidium polygonum irregulare, ſolidum hujus plani revolutione genitum erit ſpheroides irregularis.

III. Si axis AX, circa quem planum generans convertitur, minus ſit diametro MN æquatoris; ſphæroides ſive regularis, ſive irregularis compreſſus erit ad polos, ad æquatorem elevatus. Sphæroides a σφαῖρα *ſphæra*, & εἶδος *figura*, *ſimilitudo*.

§. II.

SUPERFICIERUM EVOLUTIO.

559. DEFINITIO. *Evolutio ſuperficiei alicujus corporis* eſt figura plana æqualis ſuperficiei illius corporis.

De priſmatum, cylindrorum, pyramidum, conorum evolutione agentes, directe, & præcipue corpora hæc recta conſiderabimus. Facile iiſdem principiis & obliquorum evolutio innoteſcet.

PRISMATIS EVOLUTIO.

560. HYPOTHESIS, Si linea GF priſmatis recti baſi EFGH perpendicularis circa hanc baſim convertatur baſi ipſi perpendicularis perſeverans, & ſibi parallela; deſcribet ſuperficiem lateralem priſmatis recti FB; nempe priſmatis ambitum, ſine baſibus, quæ ſeorſim conſiderandæ ſunt. Lineæ hujus revolutio quatuor ef-

ficiet

ficiet rectangula M, N, O, P, quatuor priſmatis BF planis æqualia, quorum latera, quæ & *criſta* dicuntur, ſunt AE, CF, DG, BH (*fig.* 79).

Seu, ſi lubet, concipe tæniam chartaceam circa priſma agglutinatam, baſibus omiſſis. Patet, hanc tæniam evolutam fore rectangulum altitudine ipſius priſmatis, baſi vero æquali lineæ rectæ perimetro baſis priſmatis æquali. Rectangulum hoc MNOP priſmatis ſuperficiei æquale eſt ejus evolutio. Nam $cdgf = CDGF$, $dbhg = DBHG$, $bach = BAEH$, $acfe = ACFE$.

561. COROLLARIUM. *Evolutio priſmatis recti eſt rectangulum, cujus baſis eſt perimeter baſis priſmatis, altitudo ipſa priſmatis altitudo*. Duc ergo perimetrum baſis priſmatis in hujus altitudinem, productum dabit ſuperficiem lateralem priſmatis ſine baſibus, quæ duo plana ſunt ſeorſim dimetienda (449).

562. NOTA I. Si priſma rectum, quod conſideravimus, non quadrangulum eſſet, ſed vel triangulare, vel pentagonum, aut dodecagonum, patet, eadem theoria non quatuor, ſed tria, vel quinque, vel duodecim plana futura ſingula ſingulis priſmatis planis æqualia; & priſmatis lateralem ſuperficiem obtentum iri eodem modo perimetrum baſis in altitudinem ducendo (*fig.* 79, 120).

II. Si hoc priſma non jam rectum eſſet, ſed obliquum, adeoque axe, & lateribus ad baſim inclinatis; patet, ad *priſmatis obliqui ſuperficiem* habendam, quod erit aut triangulare, aut tetragonum, aut pentagonum, aut alius figuræ, quodlibet latus, ſeu parallelogrammum ſeorſim metiri oportere; & ſumpto ſeorſim cuiuſque parallelogrammi baſis producto in cujuſque parallelogrammi altitudinem, obtentum iri totius priſmatis ſuperficiem, demptis baſibus.

Sive ſi methodus œcumenica adrideat ad priſmatis obliqui ſuperficiem illico inveniendam; priſ-

priſma ſeca plano axi perpendiculari. Hujus plani cum ſuperficie priſmatis interſectio erit polygonum, cujus quodvis latus erit angulis priſmatis perpendiculare, adeoque cujuſque lateris latitudinem metietur. Quare polygoni hujus perimetro ducta in latus inclinatum, ſeu in axem priſmatis, lateralis hujus ſuperficies obtinebitur.

EVOLUTIO PYRAMIDIS.

563. DEFINITIO. Evolutio pyramidis rectæ, ſive inclinatæ eſt ſumma omnium triangulorum, quæ ejus latera ſunt. Semper baſis omittitur, quam ſeorſim a ſuperficie laterali metimur. Nos hic *pyramides regulares* illas dicemus, quarum axis baſi non eſt inclinatus, & quarum latera omnia ſunt triangula æqualia, & ſimilia.

I. *Si pyramis recta eſt, & regularis*, totidem habet triangula æqualia, & ſimilia, quot baſis latera. Dimenſo uno baſis latere EF, eoque ducto in numerum laterum habebitur baſis perimeter ERFE, qua ducta in dimidium apothema A*n*, aut in dimidiam perpendicularem a vertice in unum baſis latus demiſſam, habebitur ſuperficies lateralis pyramidis (*fig.*82).

Exempli cauſa: ſi pyramidis rectæ, & regularis AEBF ſuperficiei charta applicata ſupponatur, charta hac evoluta habebuntur tria triangula H, I, K; quæ quum ſimilia ſint, & æqualia, ſi ducatur baſis *ebfe* = EBFE in dimidiam perpendicularem *an* pyramidis apothemati æqualem; productum exprimet ſuperficiem horum trium triangulorum, adeoque lateralem pyramidis ſuperficiem ipſis æqualem (449).

Si pyramis recta, & regularis eſſet, exempli gratia, decagona; non jam tria, ſed decem triangula haberentur baſi, & altitudine æqualia. Ducta baſis perimetro baſibus decem triangulo-

gulorum æquali in dimidium apothema, æque haberetur productum exprimens ſuperficiem pyramidis decagonæ, atque ita de ceteris.

II. Si pyramis ſit obliqua, vel ſi ejus baſis ſit polygonum irregulare, ad habendam lateralem ejus ſuperficiem, ſingula triangula inæqualia, quibus conſtat, dimetienda ſunt. Cujuſque baſis triangularis in dimidium ſuum peculiare apothema productum dabit cujuſque lateris pyramidis menſuram: harum erit totius pyramidis ſuperficies lateralis.

EVOLUTIO CYLINDRI.

564. HYPOTHESIS. Si linea AC, vel DB ſemper baſi ABA cylindri recti perpendicularis perſeverans, baſis hujus peripheriam percurrat, lateralem cylindri ſuperficiem deſcribet (*fig.*80).

Superficies, ſive *evolutio cylindri recti* eſt ergo rectangulum EF, cujus baſis eſt linea *aba* peripheriæ ABA baſis æqualis, & cujus altitudo eſt ipſa cylindri altitudo. Duc ergo peripheriam baſis cylindri in ejus altitudinem AC: productum dabit ſuperficiem lateralem, ſeu convexam cylindri recti ABDC, demptis baſibus circularibus ſeorſim dimetiendis.

565. COROLLARIUM. *Si altitudo cylindri recti eſt æqualis diametro baſis, ejus ſuperficies eſt quadrupla baſis* (*fig.* 86).

DEMONSTRATIO. Sit cylindrus rectus ZOQY, cujus axis PR ſit æqualis baſis diametro OQ. *Superficies cylindri* eſt æqualis producto peripheriæ baſis in altitudinem ZO, quæ eſt diametro baſis æqualis. *Superficies circuli* OQO, qui baſis eſt, æqualis eſt dumtaxat producto ejuſdem peripheriæ baſis in quartam partem ejus diametri, aut in dimidium radium (484). Ergo ſuperficies baſis eſt quater minor laterali, & convexa cylindri ſuperficie: eadem enim quantitas in 1 ducta, & in $\frac{1}{4}$, dat duo pro-

producta, quæ inter ſe ſunt, ut 4 ad 1 (67). Ergo lateralis cylindri recti ſuperficies, cujus altitudo diametro baſis æqualis ſit, quadrupla eſt ſuperficiei ipſius baſis. Q. E. D.

566. NOTA. Quum cylindrus AB baſi ſuæ ſemper circulari B (*fig.* 210) eſt inclinatus, tunc ejus ſuperficies lateralis non eſt amplius eadem. Hic utentes methodo notæ præcedentis (562), faceremus in cylindro ſectionem ellipticam; & vel primo intuitu apparet, *ſuperficiem cylindri obliqui* AB eſſe æqualem producto peripheriæ ellipſeos, cujus planum eſt axi perpendiculare in latus inclinatum, ſive axem obliquum cylindri. Quare menſura hæc ab ellipſeos rectificatione pendet, atque adeo a theoria a tractatu hoc aliena, illique ſuperiore. Idem de cono obliquo dici poteſt. Ergo ſuperficies cylindri AB non eſt productum peripheriæ baſis B in perdicularem AP a baſi ſuperiore A in inferiorem B, ſi opus ſit, productam, demiſſam.

EVOLUTIO CONI.

567. HYPOTHESIS I. Rectæ omnes, ut A B, a coni recti vertice in baſis peripheriam BCD ductæ quum æquales ſint; patet, evolutionem coni recti fore ſectorem circuli *abcd*, cujus radius erit $ab = AB$, & arcus *bcd* peripheriæ baſis æqualis (*fig.* 83).

Sector hic æqualis eſt areæ trianguli rectanguli ABC, cujus altitudo ſit radius ſectoris, & baſis recta arcui ſectoris æqualis (482). Duc ergo altitudinem coni in dimidiam peripheriam baſis, ſeu peripheriam in dimidiam altitudinem. Productum erit lateralis coni recti ſuperficies.

568. COROLLARIUM. *Superficies convexa coni recti æqualis eſt producto baſis in dimidium ſuum apothema*. Baſis enim æqualis eſt infinitis

minimis triangulis iſoſcelibus *ban*, quorum baſes ſimul ſumptæ efficerent lineam *bncd* peripheriæ BCB baſis coni æqualem; & ſuperficies horum omnium triangulorum eſt productum hujus peripheriæ in dimidiam communem altitudinem *ar* (450), quæ eſt commune apothema triangulorum omnium in cono ante evolutionem. Q. E D.

569. HYPOTHESIS II. Lateralis coni recti ABSC ſuperficies quum æqualis ſit areæ trianguli rectanguli ABC; patet, ſuperficiem lateralem coni truncati *bc*CB eſſe æqualem trapezio *bc*CB, cujus altitudo eſt latus *b*B coni truncati, baſes vero *bc*, BC ſunt parallelæ, & æquales peripheriis baſium *bcb*, BCB coni truncati (*fig.* 83),

570. COROLLARIUM. *Superficies lateralis coni recti truncati æqualis eſt producto lateris in peripheriam ab ejus baſibus æque diſtantem.* Conus enim truncatus *bc*BC ſuperficiem habet æqualem trapezio *bc*CB; hujus vero ſuperficies eſt productum altitudinis *b*B æqualis lateri, ſeu apothemati coni truncati in mediam proportionalem arithmeticam *mn* inter baſes trapezii parallelas (444). Q E. D.

EVOLUTIO SPHÆROIDIS REGULARIS.

571. DEFINITIO I. *Cylindrus ſphæra circumſcriptus* eſt cylindrus rectus, cujus baſis eſt maximus ſphæræ circulus, altitudo vero ſphæræ diameter (*fig.* 86).

II. *Cubus ſphæra circumſcriptus* eſt cubus, cujus tres dimenſiones ſingulæ ſphæræ incluſæ diametro ſunt æquales (*fig.* 124).

III. *Conus æquilaterus eſt ſphæra circumſcriptus*, quum eam continet, & ejus ſuperficies ſphæræ ſuperficiem tangit in aliqua peripheria *mnm*, & in puncto *x*. In cono æquilatero diame-

meter baſis apothemati, ſeu lateri æqualis eſt (*fig*. 123).

IV. In his omnibus *ſphæra inſcripta* eſt ſolido circumſcripto.

T H E O R E M A.

572. *Superficies ſphæroidis regularis ſphæræ circumſcripti æqualis eſt producto ſui axis in peripheriam circuli maximi ſphæræ inſcriptæ; ſeu ſuperficiei laterali cylindri eidem ſphæræ circumſcripti* (*fig*. 85).

EXPLICATIO. Sit circulus APBRA. Sint quoque quadratum OQYZ, & polygonum quodvis regulare huic circulo circumſcriptum. Si tota pars ZPROZ convertatur circa diametrum, ſeu axem PR; patet, ſemicirculum PARCP *ſphæram* deſcripturum; & dimidium quadratum, & polygonum regulare deſcriptura, alterum *cylindrum*, alterum *ſphæroidem regularem* ſphæræ circumſcriptum. Omiſſa modo ſphæræ ſuperficie, oſtendemus, ſphæroidis ſuperficiem ſuperficiei cylindri circumſcripti eſſe æqualem, quæ eſt productum axis PR in peripheriam circuli maximi ſphæræ OQO = ABA (564).

DEMONSTRATIO. Si per angulos ſphæroidis ſphæræ circumſcripti tranſeant plana parallela DE, MK, *rr*, GH, &c., erit ſphæroides in plures partes diviſus, quæ erunt aut coni truncati MKED, vel cylindri MK*rr*; aut coni integri, ſi plana parallela tranſirent per angulos *a*, & *d*, D, & F, & reliquos (*fig*.85).

Patet, facta hac diviſione, ſuperficiem ſphæroidis non diſtingui a ſumma ſuperficierum conorum omnium truncatorum, cylindrorum, ſeu conorum integrorum. Ponamus ſphæroidem diviſam ut in figura: continebit tantum cylindros ABKM, AB*rr*, & conos truncatos MKED, *rr*HG, &c. Demonſtrandum eſt, conum quemlibet truncatum eſſe ſuperficie æqualem

 cy-

cylindro ejuſdem ſecum altitudinis, & diametri ſphæræ diametro æqualis.

I. Portio cylindrica planis parallelis MK, AB incluſa æqualis eſt producto ſui axis SC in peripheriam baſis ABA, quæ eſt peripheria circuli maximi ſphæræ inſcriptæ. Idem dici poteſt de alia ſphæroidis portione cylindrica *rr*AB. Quare portio MK*rr* ſphæroidis eſt jam ſuperficie æqualis portioni MK*rr* cylindri. Eſt ergo hæc ſuperficies portionis ſphæroidis circumſcripti productum ſui axis *So* in peripheriam maximi ſphæræ circuli (564). Reliquum ergo eſt, ut oſtendamus ſuperficiem coni truncati cujuſque DEKM eſſe quoque æqualem ſibi reſpondentis portionis VXKM cylindri circumſcripti ſuperficiei. Itaque:

II. Sumamus conum truncatum in revolutione deſcriptum a latere DM polygoni regularis; & a puncto *d*, in quo latus hoc ſphæram tangit, ducamus rectam *dn* rectæ DE parallelam, diametrum *dm*, & rectam *am*. A puncto D demittatur in MK perpendicularis DN = TS: erit hæc axis TS coni truncati DEKM, cujus ſuperficiem inquirimus.

His poſitis, habebitur triangulum MDN ſimile triangulo *mdn*; quilibet enim angulus primi cuilibet homologo ſecundi æqualis eſt. Anguli N, & *n*, utpote recti, ſunt æquales, quum N a perpendiculari fiat, *n* diametro *d*C*m* inſiſtat (368). Angulus DMN angulo D*dn* æqualis eſt, quum ambo ſint ſupra parallelas ad partes ſecantis DM (385): at angulus *dmn* angulo D*dn* æqualis eſt; nam *dmn* eſt angulus inſcriptus, cujus menſura eſt arcus dimidius *d*P*n* ejus lateribus incluſus; & D*dn* a chorda, & tangente effectus menſuram habet quoque dimidium arcum *d*P*n* ejus lateribus incluſum, aut a ſua chorda *dn* ſubtenſum (376): ergo angulus *dmn* eſt quoque æqualis angulo DNN = D*dn*. Tandem tertius tertio æqualis eſt,

quum

quum utrinque ſit ſupplementum duorum angulorum æqualium. Ergo triangulum MDN eſt ſimile triangulo *mdn*; habebitur ergo proportio; DM : DN vel TS :: *dm* : *dn*.

Notandum, *dn* eſſe diametrum mediam coni truncati DEKM; & *dm* eſſe diametrum ſphæræ diametro cylindri circumſcripti æqualem. Atqui hæ dimentri inter ſe ſunt ut earum peripheriæ; ergo; DM : TS :: *dmd* : *dnd*
Ergo . . . . DM × *dnd* = TS × *dmd*.
Porro ſuperficies coni truncati DEKM æqualis eſt producto DM × *dnd*; hoc eſt producto ſui lateris, aut apothematis DM in peripheriam *dnd* circuli medii inter ejus baſes (570); ergo ſuperficies coni truncati DEKM eſt quoque æqualis producto TS × *dmd*, quod eſt productum axis coni in peripheriam circuli ſphæræ maximi; atque hoc æquale eſt producto ſuperficiei portionis analogæ VXKM cylindri circumſcripti (564.).

III. Eodem pacto oſtendam, alium quemvis conum truncatum DEIF eſſe ſuperficie æqualem analogæ portioni VXYZ cylindri circumſcripti. Ducatur enim ex puncto *a* diameter, & parallela *ab*, & a puncto F ducatur ad DE perpendicularis: Erunt, ut in cono præcedente, duo triangula ſimilia, a quibus habebitur proportio: apothema FD coni truncati ad ejus altitudinem PT; ut maxima peripheria tranſiens per punctum *a* ad peripheriam *aba* mediam inter baſes coni.

Qua ratione circulus *aba* coni truncati decreſcit infra circulum ZYZ analogæ portionis cylindri circumſcripti, factor FD coni creſcit ſupra factorem PT cylindri. Alter itaque altero compenſari poteſt.

IV. Quare ſumma ſuperficierum conorum omnium, ſeu cylindrorum ſphæroidis ſphæræ circumſcriptorum, quæ ſumma eſt tota ipſa ſphæroidis circumſcripti ſuperficies, æqualis eſt

producto totius axis PR ſphæræ in peripheriam alicujus circuli ſphæræ maximi ABA, vel *dmd*.

Hæc igitur ſuperficierum ſumma conorum, ſeu cylindrorum omnium *ſphæroidis ſphæra circumſcripti* æqualis erit ſuperficiei laterali *cylindri circumſcripti* eidem ſphæræ; hæc enim cylindri ſuperficies eſt productum totius axis ſphæræ æqualis axi cylindri in peripheriam baſis cylindri peripheriæ circuli ſphæræ maximi æqualem. Q. E. D.

EVOLUTIO SPHÆRÆ.

THEOREMA.

573. *Superficies ſphæra æqualis eſt producto ſui axis in circuli maximi peripheriam, ſeu laterali cylindri circumſcripti peripheria* (*fig.* 85., & 86).

DEMONSTRATIO. Theorema hoc præcedentis corollarium eſt. Sphæra conſiderari poteſt ſphæroides genitus a revolutione *polygoni regularis infinitorum laterum* circa diametrum quamvis PR, quæ fit ejus axis. At ſuperficies hujus ſphæroidis eſt æqualis producto axis totius ſphæræ in ejus circuli maximi peripheriam (572): ergo ſuperficies ſphæræ, quæ eſt ipſa ſphæroidis infinitorum laterum ſuperficies, eſt quoque productum axis ſphæræ in circuli ſphæræ maximi peripheriam; atque hoc æquale eſt producto ſuperficiei laterali cylindri circumſcripti, demptis baſibus (*fig.* 85).

Exempli gratia, ſi infinitæ, & infinite parvæ ſupponantur tangentes IF, FD, DM, M*r*, *r*G, GS, quæ ſunt polygoni circumſcripti latera, in circuli peripheriam cadent. Quare in revolutione circa axem PR infinitos parvos conos truncatos deſcribent, qui in ſphæræ ſuperficiem cadent, & qui ſinguli analogæ cylindri circumſcripti parti ſuperficie æquales erunt. Q. E. D. CO-

C O R O L L A R I A.

574. COROLLARIUM I. *Superficies ſphæræ eſt quadrupla areæ circuli maximi*. Eſt enim productum peripheriæ circuli maximi in diametrum; area vero circuli maximi eſt peripheriæ productum in quartam partem diametri. At primum productum alterius quadruplum eſt (565) ergo areæ circuli maximi ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt.

575. COROLLARIUM II. Lateralis cylindri circumſcripti ſuperficies æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ, adeoque circuli ſphæræ maximi quadrupla: cui ſi duas cylindri baſes, quæ quoque circuli maximi ſunt, addantur, habebitur tota cylindri ſuperficies circuli maximi ſphæræ ſextupla. *Ergo ſuperficies cylindri circumſcripti ad ſuperficiem ſphæræ, ut* 6 *ad* 4, *ſive ut* 3 *ad* 2.

576. COROLLARIUM III. *Superficies ſegmenti ſphærici æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ ejuſdem cum ſegmento altitudinis, & diametri ſphæræ diametro æqualis* (*fig.* 84).

EXPLICATIO I. Segmentum ſphæricum *dx* BN conſiderari poteſt genitum revolutione infinitarum minimarum tangentium, quæ ſingulæ minimum conum truncatum deſcripſerint. At oſtenſum eſt, horum omnium conorum ſuperficies in ſphæræ ſuperficiem cadentes æquales eſſe analogæ portioni cylindri circumſcripti ſuperficiei, cujus altitudo eſſet BN; ergo eadem eſt ſegmenti, quæ partis hujus cylindri circumſcripti ſuperficies.

Quare *ad habendam ſuperficiem ſegmenti ſphærici* ducenda eſt peripheria circuli ſphæræ maximi in ſegmenti altitudinem NB; productum exprimet ſuperficiem quæſitam.

Eadem ratione, *ad habendam ſuperficiem zonæ*, ut DF*xd* duobus circulis parallelis concluſæ,

ſæ; ducenda eſt zonæ altitudo CN in circuli ſphæræ maximi peripheriam.

P R O B L E M A.

577. *Sphæra, cujus nota diameter, ſuperficiem invenire.*
SOLUTIO. Peripheriam quære circuli ſphæræ maximi ex proxima Archimedis ratione (438). hanc in diametrum ducito. Productum erit ſphæræ ſuperficies quæſita (573).

§. III.

RATIO SUPERFICIERUM.

578. DEFINITIO. *Solida ſimilia* dicuntur, quæ numero æqualibus, & ſimilibus lateribus conſtant. Quare anguli eorum homologi eſſe debent æquales, & letera homologa proportionalia.

Exempli cauſa; duo cubi ſunt ſolida ſimilia; duo cylindri recti, ſeu æque inclinati, quorum altitudines ſint ut baſes, ſunt ſolida ſimilia.

At priſma, & pyramis, priſma triangulare, & pentagonum, rectum, & obliquum non ſunt ſolida ſimilia. Ita duo cylindri recti, quorum altitudines non eſſent baſibus proportionales, non ſunt ſolida ſimilia.

FACTORES SUPERFICIERUM.

579. OBSERVATIO. Præcedente paragrapho oſtendimus:

I. Lateralem cylindri recti ſuperficiem eſſe productum peripheriæ baſis in altitudinem. Quare *peripheria, & altitudo* ſunt factores cylindri (564).

III.

III. Superficiem lateralem pyramidis rectæ, & regularis eſſe productum perimetri baſis in dimidium apothema. Quare *perimeter*, *& dimidium* apothema ſunt factores pyramidis rectæ, & regularis (563).

IV. Superficiem lateralem coni recti eſſe productum peripheriæ baſis in dimidium apothema (568). Quare peripheria baſis, & *dimidium apothema* ſunt factores ſuperficiei coni recti.

V. Superficiem ſphæræ eſſe productum peripheriæ circuli maximi in axem, ſeu diametrum. Quare *peripheria*, *& diameter* ſunt factores ſuperficiei ſphæræ (573).

THEOREMA I.

580. *In ſolidis quibuſcumque ſuperficies ſunt ut factorum producta.*

DEMONSTRATIO. Sint priſma, & conus, quorum ſuperficies comparandæ. Sit S primi ſuperficies, *s* ſecundi. Sint B, H factores primæ ſuperficiei; *b*, *h* ſecundæ.

Patet, ſuperficiem S priſmatis fore ad ſuperficiem *s* coni, ut BH ad *bh*; hi enim factores ſunt expreſſio ſuperficierum, quas exprimunt. Q. E. D.

Theorema omnino verum eſt; ſive duo factores illico quæſitam ſuperficiem exprimant, ut ſphæræ, priſmatis, & cylindri recti, ſive ſuperficies quæſita exurgat ex pluribus factoribus, quorum productorum ſumma exprimat partes omnes ſuperficiei, ut in ſuperficie priſmatis obliqui, & pyramidis irregularis inclinatæ (*Fig.* 92).

THEOREMA II.

581. *Superficies regulares factorem communem habentes ſunt ut alter factor.*

DEMONSTRATIO. Sint duæ ſuperficies

theorematis præcedentis, in quibus datur proportio $S : s :: BH : bh$. Si $B = b$, vel $H = h$, patet, tunc fore $S : s :: B : b$; vel $S : s :: H : h$ (221).

Quare duæ ſuperficies eandem baſim habentes ſunt ut altitudines; & eandem altitudinem habentes ſunt ut baſes.

Exempli gratia; ſint priſma, & cylindrus eandem altitudinem habentes, patet, ſuperficies *eundem* habere *elementorum numerum*; nec niſi *horum magnitudine* differre (585), quæ in utraque ſunt ut perimetri baſium.

Pari modo ſint duo cylindri, quorum baſes ſint æquales, altitudines inæquales; patet, eorum ſuperficies habere elementa æqualia, nec niſi horum quantitate differre, quæ altitudinum differentia exprimitur Q. E. D.

582. NOTA. Ita priſmate, & cono rectis factores altitudinum ſuperficierum ſunt in priſmate tota priſmatis altitudo, in cono recto dimidium apothema. Quare ut factores altitudinum utrobique ſint æquales, debet dimidium coni apothema eſſe toti priſmatis altitudini æquale, ſeu toti perpendiculari a baſi in baſim ductæ.

Tunc etſi ſuperficies diſſimiles ſolidorum ſint, tamen invicem comparari poterunt; in evolutione ſiquidem altera fit parallelogrammum, altera triangulum, quorum baſes, & altitudines notæ ſunt.

THEOREMA III.

583. *Superficies, quorum factores homologi ſunt invicem proportionales, ſunt inter ſe ut quadrata dimenſionum homologarum.*

DEMONSTRATIO. Quum ſuperficiei factores ſunt homologis alterius ſuperficiei factoribus proportionales, producta ſunt duo rectangula

ſa, quorum altitudines ſunt baſibus proportionales. Atqui hæc rectangula ſunt figuræ ſimiles (498). Ergo ſuperficies ſunt inter ſe ut quadrata dimenſionum homologarum (499; Q. E. D.

584. COROLLARIUM. *Superficies ſphærarum ſunt inter ſe ut quadrata vel peripheriarum, vel diametrorum.* Earum enim ſuperficies ſunt æquales ſuperficiebus cylindrorum circumſcriptorum, adeoque rectangulis ſimilibus, quorum altitudines, & baſes ſunt proportionales.

ARTICULUS II.

SOLIDITAS CORPORUM.

585. DEFINITIO. I. SIcuti *ſuperficies* conſtat lineis latitudinis infinite parvæ, & ubique æqualis (438); ita *corpus*, ſeu *ſolidum* conſtat ſuperficiebus, ſeu *ſtratis profunditatis infinite parvæ, & ubique æqualis.* Exempli cauſa, cubus conſtat infinitis ſtratis quadratis baſi æqualibus, & parallelis; cylindrus rectus, vel obliquus infinitis circulis baſi æqualibus invicem ſuperpoſitis. Strata hæc, ſeu ſuperficies infinite parum, & ubique æqualiter profundæ eæ ſunt, quæ *ſolidorum elementa* vocantur. Horum elementorum numerus, & magnitudo ſolidi magnitudinem definiunt, ſeu ſoliditatis quantitatem; ſeu triplicis dimenſionis productum, propria denſitate non conſiderata.

586. AXIOMA. *Duo ſolida æqualia ſoliditate ſunt, quum æqualis in utroque ſtratorum elementarium eſt numerus, & quodlibet ſtratum elementare in uno ſtrato analogo in altero æquale eſt.*

Quare duo ſolida figura, & ſuperficie diverſa erunt tantum ſoliditate æqualia, ſi primum dimidium tantum habens numerum elementorum ſecundi, elementa tamen habeat elementis ſecundi dupla ſuperficie.

Quum duo ſolida æqualia dicuntur, intellige ſoliditate; ſeu ſumma elementorum primi numero, vel magnitudine alterius elementa æquare; quæcumque eorum ſuperficies, & figura ſit.

587. DEFINITIO II. Sicuti ſuperficierum menſuræ ſunt hexapedæ quadratæ, pedes, & pollices quadrati (446); ita *ſolidorum menſura* ſunt hexapedæ cubicæ, pedes cubici, pollices cubici, leucæ cubicæ; atque ita porro. *Hexapeda cubica* eſt cubus, cujus ſingula latera ſunt hexapeda quadrata. *Pes cubicus* eſt cubus, cujus latera ſunt pedes quadrati. Hinc vides quid ſit pollex cubicus, linea cubica, leuca cubica. Hexapeda cubica continet ſexies cubos 36 ſingulos diametro unius pedis (*Fig.*4).

In ſolidis *æqualitatem*, *menſuram*, *rationem* tribus paragraphis perpendemus.

PARAGRAPHUS PRIMUS.

ÆQUALITAS SOLIDORUM.

FAcile ſoliditas priſmatis obtinetur, ut paragrapho ſequenti patebit. At pyramidis, cylindri, coni, ſphæræ ſoliditas non niſi in priſmate obtineri poteſt. Horum igitur corporum priſmati æqualitas invenienda eſt, ut eorum ſoliditas dignoſci poſſit.

LEM-

PRISMA, ET CYLINDRUS.

588. THEOREMA. *Priſma, & cylindrus ejuſdem baſis, & altitudinis æqualem habent ſoliditatem.*

DEMONSTRATIO. Patet, ſolida hæc *eodem elementorum numero* conſtare; eandem enim habent altitudinem; & ſingula in utroque elementa ſunt æqualia; quum baſibus, quæ æquales ſupponuntur, ſingula æqualia ſint. Ergo priſma, & cylindrus baſi, & altitudine æquales, ſoliditate ſunt æquales. Q. E. D.

589. NOTA. Eodem modo demonſtrabitur, & eadem evidentia;

I. *Duo priſmata rectum unum, obliquum alterum, ejuſdem baſis, & altitudinis, alterum triangulare, alterum pentagonum, exempli gratia, eſſe æqualia;* eundem quippe elementorum numerum habent, quæ utrobique ſingula ſingulis ex hypotheſi ſunt æqualia.

II. *Duos cylindros rectum unum, obliquum alterum, ejuſdem baſis, & altitudinis, æquales eſſe.* Eadem ratione.

III. *Duas pyramides rectas, regulares, & ſimiles, ejuſdem baſis, & altitudinis, ſoliditate æquales eſſe.* Quum enim eandem habeant altitudinem eundem habent elementorum numerum; & elementa analoga æque utrinque a baſi ad verticem decreſcunt.

IV. *Duos quoque conos rectos ejuſdem baſis, & altitudinis ſoliditate æquales eſſe.* Eadem ratione.

PRISMATA, ET PYRAMIDES.

590. LEMMA. *Si pyramis recta, aut obliqua, regularis, aut irregularis ſecetur plano baſi parallelo, ſectio erit planum baſi ſimile; & hoc*

& hoc erit ad baſim in duplicata ratione altitudinis ſuæ, & baſis (*Fig.* 89).

DEMONSTRATIO. Sit pyramis quadrangula ABCDO, & in hac ſectio *abcd* baſi ABCD parallela. Facile intelliges, dicenda æque valere in pyramide triangulari, pentagona, aut alterius cujuſque figuræ.

I. Plana *abcd*, ABCD ſunt *ſimilia*. Quum enim parallela ſint ex hypotheſi; recta OA, eoſdem cum utroque plano angulos efficit, & latus quoque AOB pyramidis eoſdem cum utroque plano angulos efficit. Idem dicas de aliis lineis, & lateribus pyramidis hiſce planis comparatis, quæ ſecant. Quare omnes planorum anguli ſunt reſpective æquales, & plana ſimilia ſunt.

II. Quum plana ſint parallela, in quavis facie AOB pyramidis proportionaliter ſecant latera OA, OB, quibus latus hoc triangulare terminatur (400); ergo (403, 405); $ab : AB :: aO : AO$.

III. Quum plana ſint ſimilia, eorum ſuperficies ſunt *ut quadrata laterum homologorum* (499). Quare minus planum eſt ad majus, ut quadratum lateris *ab* ad quadratum lateris AB; ſeu ſimplicius; $p : P :: \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$.

Quum vero $ab : AB :: aO : AO$; erit quoque minus planum ad majus, ut $\overline{aO}^2$ ad $\overline{AO}^2$, quum enim duæ rationes æquales ſunt, altera alteri ſubſtitui poteſt; quare; $p : P :: \overline{aO}^2 : \overline{AO}^2$.

IV. Tandem hæc plana ſunt ut *quadrata ſuarum altitudinum* a pyramidis vertice O ſumptarum. A vertice enim pyramidis ducatur ad plana, ſi opus ſit, producta perpendicularis ON. Hæc cum planis efficiet æquales angulos O*na*, ONA; unde habebuntur triangula O*na*, ONA ſimilia, ergo etiam; $nO : NO :: aO : AO$.

Qua-

Quare, quum plana ſint inter ſe ut quadrata ſecundæ rationis (quod oſtendimus), ſunt quoque ut quadrata primæ illi æqualis. Ergo habebimus $p : P :: \overline{nO}^2 : \overline{NO}^2$.

Atqui hæc ratio exprimit quadrata altitudinum planorum *abcd*, ABCD; ergo hæc ſunt inter ſe in duplicata ratione ſuarum altitudinum, ſeu diſtantiarum a vertice O pyramidis.

Patet, eandem demonſtrationem pro quavis pyramide valere recta, aut obliqua, regulari, vel irregulari, & figuræ cujuſcumque. Ergo in pyramide quavis ſecta a plano baſi parallelo (*fig.* 87, & 88) ſectio *b*, ſeu *m*, erit planum baſi ſimile, quod erit ad baſim in duplicata ratione ſuæ altitudinis ad baſis altitudinem. Q. E. D.

THEOREMA I.

591. *Pyramides quæcumque baſi, & altitudine æquales, ſoliditate ſunt æquales* (*fig.* 88, 89).

DEMONSTRATIO. Sit pyramis pentagona R M, & quadrata O N, quæ æqualem habeant baſim, & altitudinem; ita ut utriuſque baſis area ſit, exempli gratia, hexapedarum decem quadratarum.

Hæ pyramides ſoliditate ſunt æquales, ſi in utraque ſit idem elementorum numerus; & ſingula unius elementa ſingulis alterius analogis a baſi ad verticem ſint æqualia.

I. *Idem* in utraque eſt *elementorum numerus*; quum enim eandem ex hypotheſi habeant altitudinem, duobus planis parallelis includuntur, quorum alterum per verticem tranſiret, quæ quum ubique idem ſpatium contineant, eundem ſtratorum elementarium minimæ profunditatis numerum continere debent. Supereſt igitur oſten-

ſtendendum, ſingula unius pyramidis elementa ſingulis alterius analogis a baſi ad verticem eſſe equalia.

II. Confuſe jam concipimus, elementa hæc ad baſim equalia, inde uſque ad verticem proportionaliter decreſcere debere; aſt hoc geometrice demonſtrandum eſt. Quare utraque pyramis ſecetur in *n*, & *m* planis baſibus parallelis, & a verticibus O, & R eque diſtantibus. Habebimus plana *n*, & *m* reſpectivis baſibus parallela, & ſimilia, quorum altitudines nO, mR erunt equales. Quare $nO = mR$; adeoque $\overline{nO}^2 = \overline{mR}^2$.

At per lemma præcedens in pyramide quadrata planum *n* ad baſim N :: $\overline{nO}^2 : \overline{NO}^2$; & in pentagona; *m* : M :: $\overline{mR}^2 : \overline{MR}^2$.

In his proportionibus duæ poſtremæ rationes ſunt æquales; quum enim pyramidum altitudines ſint æquales, & ſectiones ſint ad æquales a verticibus diſtantias, erit $\overline{nO}^2 = \overline{mR}^2$, & $\overline{NO}^2 = \overline{MR}^2$.

Quare quum in his proportionibus duæ primæ rationes uni tertiæ æquales ſint, inter ſe æquales ſunt (*166*); unde habetur proportio: baſis quadrata N eſt ad planum parallelum, & ſimile *n*, ut baſis pentagona M ad planum parallelum, & ſimile *m*; ſeu; N : *n* :: M : *m*:

At ex hypotheſi baſis N eſt æqualis baſi M; ergo & planum *n* plano analogo *m*. Quod de his planis oſtendimus, de ceteris omnibus invicem analogis demonſtrari poteſt. Ergo pyramides ſoliditate ſunt æquales; quod eodem æqualium elementorum numero conſtant. Q.E.D.

592. COROLLARIUM. Hactenus in lemmate, & in theoremate de pyramidibus ſtatuta de *conis quoque quibuſque* ſunt intelligenda; coni ſiquidem ſunt pyramides, quorum baſes

ſes infinita habent latera. Quare ſi duo coni ejuſdem baſis, & altitudinis ſint alter rectus, alter obliquus, hi *ſoliditate ſunt æquales*; eodem quippe elementorum numero conſtant; & elementa hæc unius ſingula ſingulis alterius analogis ſunt æqualia.

THEOREMA II.

593. *Priſma quodvis triangulare in tres æquales pyramides dividi poteſt* (*fig.* 87).

DEMONSTRATIO. Sit priſma triangulare ABCDEFA. Tria parallelogramma aſcendentia bifariam divido (436) diagonalibus AF, FC, EC, & planum duco per diagonales AF, FC; & aliud planum per diagonales FC, EC. Hinc habeo tres pyramides ACBF, ECDF, ECAF.

I. Atqui duæ primæ pyramides baſes habent æquales ABC, DEF, ut & altitudines, quæ ſunt priſmatis altitudines; ergo ſunt æquales.

II. Si concipiatur, pyramidis ECDF baſim eſſe triangulum ECD, & tertiæ pyramidis ECAF baſim eſſe triangulum ECA; baſes harum pyramidum ECA, ECD ſunt æquales, & quum vertices habeant ad idem punctum F, & earum altitudines ſunt æquales; ergo hæ duæ pyramides æquales ſunt.

Ut ſenſibus res appareat, cera, aut argilla figuræ hujus, & ſequentis problematis conſtruantur.

III. Prima, & tertia pyramis ſingulæ ſecundæ ſoliditate ſunt æquales; ergo omnes inter ſe æquales ſunt. At hæ ſimul ſunt ipſum priſma diviſum; ergo hoc, & quodvis priſma triangulare in tres pyramides ſoliditate æquales dividi poteſt. Q. E. D.

594. COROLLARIUM I. *Priſma quodvis triangulare triplum eſt pyramidis ejuſdem baſis, & altitudinis; & pyramis quævis triangula-*

la-

laris ejuſdem cum priſmate baſis, & altitudinis eſt hujus ſubtripla. Continet enim priſma tres æquales pyramides ejuſdem cum ipſo baſis, & altitudinis.

595. COROLLARIUM II. *Cubus quivis triplus eſt pyramidis ejuſdem baſis, & altitudinis* (fig. 74).

DEMONSTRATIO. Tranſeat planum AG per cubi latera oppoſita GB, AD; dividetur cubus in duo priſmata triangularia æqualia, quæ ſingula tres pyramides continebunt ejuſdem cum ipſo baſis, & altitudinis.

Atqui tres pyramides cujuſque priſmatis, ſeu dimidii cubi, ſunt dimidiæ pyramidum, quæ ex cubo fierent, cujus baſis baſeos priſmatis dupla eſt: ergo ſex æquales pyramides horum priſmatum valent ipſas tres pyramides ſupra cubi baſim conſtructas. Q. E. D.

THEOREMA III.

596. *Quavis pyramis quorumcumque laterum eſt ſubtripla priſmatis ejuſdem baſis, & altitudinis* (Fig. 88).

DEMONSTRATIO. Sit pyramis pentagona inverſa ABCDEAR. Lineæ RB, RC ſunt poſt pyramidem.

I. A puncto M, ubi axis RM in baſim cadit duc rectas MA, MB, MC, MD, ME ad omnes baſis angulos: erit baſis in tot triangula diviſa, quot habet latera.

II. Pyramidem ſeca planis per verticem R, & per rectas AMB, BMC, CMD, DME, EMA tranſeuntibus. Pyramis pentagona in quinque pyramides triangulares diviſa erit inter ſe æquales, vel inæquales, quorum ſingularum baſis eſt unum ex triangulis baſeos, & quarum una eſt pyramis triangularis REAME.

III. Super quinque baſeos triangula conſtrue priſ-

priſmata quinque triangularia, quorum unum R*x*PAEMEAR ejuſdem baſis AEMA cum quovis triangulo, & ejuſdem altitudinis RM cum pyramide pentagona. Atqui ſingula priſmata triangularia, ut R*x*PAEMEAR tripla ſunt pyramidis RAMER ſibi analogæ (594): ergo totum priſma omnibus his baſis triangulis inſiſtens triplum eſt pyramidis totius; adeoque tota pyramis eſt ejus ſubtripla.

Idem de quavis alia pyramide quorumcumque laterum etiam infinitorum, recta, vel obliqua eodem modo demonſtrabitur. Ergo quævis pyramis priſmatis ejuſdem baſis, & altitudinis eſt ſubtripla. Q. E. D.

597. COROLLARIUM I. *Plura ſimul priſmata æque alta æqualia ſunt priſmati, cujus baſis ſit baſibus omnibus ſimul æqualis, & altitudo ea, qua priſmatum* (*Fig.* 87).

DEMONSTRATIO I. Sit priſma rectum ABCDFEA. Ejus ſoliditas eſt productum baſis ABCA in altitudinem FB. Priſma hoc divide planis baſi perpendicularibus in quot libet priſmata æqualia, vel inæqualia; horum omnium ſumma quum baſim habeat, & altitudinem, quam priſma integrum, eandem cum hoc habebit ſoliditatem; & erit productum baſis ABCA omnium priſmatum in unius altitudinem FB.

II. Priſma integrum rectum, aut obliquum (*fig.* 88), cujus baſis ABCDEA, & altitudo MR ęquale eſſet quinque priſmatibus ſuper eadem baſi, eademque altitudine conſtructis (596. III.). Si quoque hæc baſis in quot libuerit triangula diviſa eſſet, ſuper quibus priſmata erigerentur ejuſdem altitudinis, priſmata hæc omnia ſimul priſmati integro æqualia eſſent: eſſent enim ipſum in plures partes quaſcunque diviſum. Q. E. D.

598. COROLLARIUM II. *Plures pyramides*

des æque alta æquales ſunt uni pyramidi, cujus baſis ſit omnium baſibus æqualis, & altitudo eadem (Fig. 88). Pyramis enim tota ABCDEAR æqualis eſt quinque pyramidibus in ea notatis, quarum quælibet priſmatis analogi ſubtripla eſt; ſive priſmata conjuncta ſint, ſine disjuncta. Q. E. D.

599. COROLLARIUM III. *Conus quivis rectus, aut obliquus ſubtriplus eſt cylindri ejuſdem baſis, & altitudinis.* Conus enim pyramis eſt laterum infinitorum; ſicuti cylindrus priſma laterum infinitorum; & pyramis quævis eſt ſubtripla priſmatis cujuſque ejuſdem baſis, & altitudinis (596) Q. E. D.

600. COROLLARIUM IV. *Soliditas ſphæræ pyramidi, aut cono æqualis eſt, cujus altitudo ſit ſphæræ radius, baſis vero ſphæræ ſuperficies* (*fig.* 114).

DEMONSTRATIO. Concipi poteſt ſphęra conſtans infinitis conis, aut pyramidibus C*m*, C*n*, C*o*, C*p* verticem habentibus ad centrum ſphęrę, & quarum baſis ſit pars infiniteſima ſuperficiei ſphęræ.

Atqui conorum omnium, ſeu pyramidum ſumma æqualis eſt uni pyramidi, aut cono, cujus altitudo ſit ea, quæ pyramidum, nempe radius ſphæræ, & baſis ęqualis ſit ſummę baſium omnium pyramidum, nempe ipſi ſphęrę ſuperficies (598); ergo ſphęra pyramidi, aut cono ęqualis eſt, cujus altitudo radius, & baſis ſphęrę ſuperficies, Q.

§. II.

§. II.

MENSURA SOLIDORUM.

THEOREMA.

601. *Soliditas cujuſque priſmatis recti, aut obliqui eſt æqualis producto baſis in altitudinem* (*Fig*, 93).

DEMONSTRATIO I. Sit priſma, cujus baſis BCDB = AFGEA ſit hexapedarum quadratarum duodecim , altitudo AB hexapedarum quinque. Dico ſoliditatem priſmatis fore hexapedas cubicas 60.

Concipe enim priſma diviſum in totidem partes baſi parallelas , quot ſunt hexapedę in altitudine. Quinque partes BA quum eandem cum priſmate baſim habeant , totidem continent hexapedas cubicas, quot baſis quadratas, nempe duodecim. Quare quinque partes ſimul quinquies duodecim, ſeu 60 hexapedas cubicas continebunt; ergo priſma producto baſis in altitudinem ęquale eſt.

II. Si baſis BCDB haberet hexapedas quadratas 1000, altitudo hexapedas 10 ; haberemus partes 10 ſingulas hexapedarum cubicarum 1000, & ſoliditas tunc eſſet baſis 1000 in altitudinem 10; hoc eſt hexapedæ cubicæ 10000.

III. Eadem, ut patet , demonſtratio valet quæcumque ſit priſmatis baſis, altitudo, natura, poſitio. Si ſit parallelepipedum rectangulum, ut modo obſervatum, res omnino menti , & oculo patet. Si fieret obliquangulum , æque demonſtratio valet; priſmata enim recta, & obliqua, modo eandem baſim habeant , & altitudinem, æqualia ſunt (589).

Si baſis priſmatis, cujus ſoliditas quæritur, non

non rectangulum eſſet, ſed triangulum, aut polygonum quodvis regulare, vel irregulare, baſis ejus ad hexapedas quadratas adducetur, eaque ducta in altitudinem, æque priſmatis cujuſque ſoliditas obtinebitur; priſma enim quodvis æquale eſt parallelepipedo rectangulo ejuſdem baſis, & altitudinis (589). Q. E. D.

COROLLARIA.

602. COROLLARIUM I. *Soliditas cujuſque priſmatis eſt productum ſuarum trium dimenſionum*; nempe altitudinis $AB = 5$, latitudinis $BC = 4$, profunditatis $CD = 3$. Jam vero $5 \times 4 = 20$; $20 \times 3 = 60$. Item $5 \times 3 = 15$; $15 \times 4 = 60$. Tandem $3 \times 4 = 12$; $12 \times 5 = 60$; atque ita porro (*Fig.* 93).

603. COROLLARIUM II. *Soliditas quoque cylindrorum eſt productum baſis in altitudinem.* Cylindri enim recti, & obliqui æquales ſunt priſmatibus ejuſdem baſis, & altitudinis; & priſmatum ſoliditas eſt productum baſis in altitudinem (*fig.* 93).

604. COROLLARIUM III. *Pyramidum, & conorum ſoliditas eſt productum baſis in tertiam partem altitudinis.* Pyramides enim, & coni recti, & obliqui ſunt tertia pars priſmatum, & cylindrorum ejuſdem baſis, & altitudinis (599); & priſmata, & cylindri ſunt productum baſis in altitudinem. Ergo conorum, & pyramidum ſoliditas ſubtripla erit productum baſis in tertiam partem altitudinis (221. II.).

605. COROLLARIUM IV. *Soliditas ſphæræ eſt productum ſuperficiei in tertiam partem radii.* Sphæræ enim ſoliditas æqualis eſt pyramidi, aut cono, cujus altitudo radius, baſis vero ſuperficies ſphæræ (600): & hæc pyramis, ſeu hic conus eſt tertia pars priſmatis ejuſdem baſis, & altitudinis, cujus ſoliditas

tas eſſet productum baſis in totum radium (*Fig.* 114.).

Exempli cauſa, ſi ſuperficies ſphæræ C *a* N*b* M *a* in infinita minima triangula, aut quadrilatera *m n o p* dividatur totum hanc ſuperficiem obtegentia; habebuntur infinitæ minimæ pyramides triangulares, aut quadrilateræ C *m*, C *n*, C *o*, C *p*, quæ totam ſphæræ ſuperficiem, & ſoliditatem occupabunt, & quarum ſingularum ſoliditas erit productum ſuæ baſis in tertiam partem altitudinis, quæ eſt radius ſphæræ.

606. NOTA. Dicta de ſolidorum menſura indicant qua ratione cujuſque corporis ſoliditas inveniatur; quæ enim vel maxime irregularia ſunt in pyramides reduci poſſunt, ut plana omnia in triangula reduci poſſunt.

P R O B L E M A T A.

607. PROBLEMA I. *Soliditatem cylindri, cujus nota altitudo, & baſeos diameter, invenire* (fig. 80).

SOLUTIO. Peripheriam baſeos A B A quære ex Archimede, aut Metio (480); hanc in quartam diametri datæ partem, ſeu radii X A dimidiam ducito: productum erit cylindri baſis. Hanc ducito in altitudinem AC; productum erit cylindri ſoliditas (603).

Si ſolidum eſſet *conus* rectus, aut obliquus; ejus ſoliditas haberetur ducta baſi in tertiam altitudinis partem (599).

Hinc diſces *priſmatis*, *aut pyramidis ſoliditatem invenire*, cujus baſis ſemper eſt planum regulare, vel irregulare: baſis hæc ad menſuram notam adducta vel in altitudinem, vel in tertiam ejus partem ducatur: productum priſmatis, aut pyramidis ſoliditatem dabit.

608. PROBLEMA II. *Sphæra, cujus nota diameter, ſoliditatem invenire* (*fig.* 84).

SOLUTIO. Ex Archimede, aut Metio circuli

culi maximi peripheriam inveni (480): hanc duc in diametrum datam: productum erit ſuperficies ſphæræ (573). Hanc in ſextam diametri datæ partem ducito: productum erit ſoliditas ſphæræ (605).

609. PROBLEMA III. *Soliditatem coni baſi ſphærica, cujus altitudo radius baſis, invenire* (*fig.* 110).

SOLUTIO. In ſphæra ADBFA radius CM ad angulum quemvis MCD cum axe DF circa hunc axem convertatur: deſcribet circulum MRM, qui conum MCRDM baſi ſphærica complectetur.

Hujus coni ſoliditas eſt portio ſphæræ reſpondens parti ſuperficiei ſphæricæ, quam conus hic complectitur. Quare ſi baſis ſphærica DMRM eſt tertia, vel quarta pars ſuperficiei ſphæræ, ſoliditas coni quæſita erit quoque tertia, aut quarta ſphæræ pars. Si enim hæc ſphæræ portio concipiatur diviſa in infinitas minimas pyramides rectas baſi ſuæ evolutæ inſiſtentes, quæ erit DMRM; harum omnium pyramidum ſumma æqualis erit unicæ pyramidi ejuſdem baſis, & altitudinis (598); & pyramidis hujus ſoliditas eſſet productum baſis in tertiam partem altitudinis, quæ eſt ſphæræ radius (604).

II. Ad hanc ſoliditatem inveniendam quære igitur ſuperficiem ſphæricam DMRM, quæ erit productum circuli ſphæræ maximi in altitudinem DS (576); atque hanc ducito in tertiam radii ſphæræ partem: productum erit ſoliditas coni baſi ſphærica quæſita.

610. PROBLEMA IV. *Soliditatem ſegmenti ſphærici, cujus arcus, & radius noti ſint, invenire fig.* 110).

SOLUTIO I. Soliditas ſegmenti ſphærici cujuſque DMSRM eſt ſoliditas coni baſi ſphærica, de quo ſupra, *dempta cono baſi plana* MCRSM. A primo igitur hunc ſubduc; quem ſa-

facile obtinebis (607); reſiduum erit ſegmentum ſphæricum quæſitum.

611. PROBLEMA V. *Vaſis circularis, puta dolii, capacitatem metiri (fig. 90).*

SOLUTIO I. Quum dolium in medio intumeſcat, & inde ad duo extrema ſenſim decreſcat, conſiderari ſolet ut cylindrus *mnrv*, cujus baſis *mvm* = KHK ſit circulus medius proportionalis arithmeticus inter circulum ABA fundum efficientem, & circulum CDC maximæ intumeſcentiæ.

Supponi quippe poſſent diameter, adeoque circuli KHK radius, & peripheria non minores illis majoris circuli CDC, quo majores ſunt illis minoris circuli ABA.

II. Quamobrem fundi unius ABA ſuperficiem metire, & quoque circuli maximi CDC (484); & ambarum ſuperficierum ſumma dimidia erit ſuperficies circuli medii KHK. Hæc ducta in dolii longitudinem FE proxime dolii capacitatem dabit. Productum erit cylindrus *mnrv* dolii capacitati ferme æqualis; ejus enim altitudo erit dolii longitudo EF, & baſis circulus medius proportionalis arithmeticus inter minimum & maximum dolii circulum. Quo cylindrus hic *mnrv* a dolio deficit in CK*x*, eo creſcit in AK*m*.

Hiſce principiis innititur theoria, & praxis harum dimenſionum, quam modo tantum indicamus, ſed quas in pluribus adhibere facile erit.

SOLIDORUM DIMENSIO.

612. OBSERVATIO. Jam monuimus ſolidorum dimenſionem *menſuris cubicis* fieri (587); deinde oſtendimus, ſoliditatem hanc inveniri in priſmatibus, cylindris, pyramidibus, conis, aliiſque corporibus, quæ ad pyramides, aut conos adduci poſſunt, baſi ducta in altitudinem.

I. Hic de ſolidis dici poteſt quod alibi de

ſuperficiebus dictum eſt (460): Quum ſolidum cujus ſoliditas æſtimanda, in baſi, & altitudine quantitates tantum homogeneas continet, puta hexapedas ſine pedibus, aut pedes ſine pollicibus, & ſine lineis; facile illa obtinetur ducta baſi in altitudinis dimenſionem.

II. At raro hæc contingunt. Nam in parallelepipedo rectangulo baſis erit hexapedarum quadratarum 14, pedum quadratorum 2, pollicum quadratorum 8, quæ menſuræ ducendæ ſunt in hexapedas 12, ſpedes 3, pollices 9; tunc vero æſtimatio complicatior, & difficilior fit.

Soliditas ſolidi ſemper eſt productum trium dimenſionum, *longitudinis*, *latitudinis*, quæ baſim efficiunt, *profunditatis*, in quam baſis ducenda.

Quum ſolidum in ſuis dimenſionibus quantitates habet heterogeneas, puta hexapedas, pedes, pollices, lineas; ſoliditas inveniri poteſt has dimenſiones ad minimam ſpeciem reducendo. Tunc primo duæ quævis dimenſiones invicem ducuntur, ut habeatur productum: dein hoc in tertiam dimenſionem ducitur, ut habeatur alterum productum. Tandem hoc dividitur per cubum numeri exprimentis quoties maxima ſpecies minimam continet, ad quam tres dimenſiones reductæ fuerunt; exempli cauſa, quoties hexapeda pollicem continet, ſi dimenſiones ad pollices adductæ fuerunt. Quotiens ſolidi valorem in hexapedis exprimit.

At vero quum methodus dimenſiones adducendi ad infimam ſpeciem maxime laborioſa ſit, aliam ſubjicio methodo innixam hexapedam cubicam dividendi, quæ ab hexapeda currente non differt.

613. EXPLICATIO. Sit hexapeda cubica BF, quam in partes hexapedæ cubicæ dividere pergimus (*fig.* 4).

I. Altitudinem AB hexapedæ hujus cubicæ divi-

divido in ſex partes æquales; & per puncta diviſionis duco plana baſi parallela: his hexapeda cubica dividitur in ſex parallelepipeda æqualia, quæ vocantur *pedes hexapedæ cubicæ*; quod eorum ſingula altitudinem habeant unius pedis, & baſim unius hexapedæ quadratæ.

II. Altitudinem quoque *mn* cujuſque ex his pedibus divido in duodecim partes æquales; & per puncta diviſionis duco plana baſi parallela. Hinc quilibet pes hexapedæ cubicæ dividitur in duodecim parallelepipeda æqualia, quæ dicuntur *pollices hexapedæ cubicæ*; ſingulorum enim altitudo eſt unius pollicis, baſis unius hexapedæ quadratæ.

III. Tandem pari modo ſingulos hos pollices divido in duodecim parallelepipeda æqualia, quæ erunt *lineæ hexapedæ cubicæ*.

Hexapeda cubica continet pedes ſex hexapedæ cubicæ, pollices 72 hexapedæ cubicæ, lineas 864 hexapedæ cubicæ: quare linea hexapedæ cubicæ eſt $\frac{1}{864}$ hexapedæ cubicæ.

Hac theoria evidente innititur methodus, qua in ſequentium problematum ſolutione utemur.

Ut hæc theoria melius intelligatur animadvertendum eſt, ſi ſolidum BFG (*fig.* 93), ſupponatur diviſum in hexapedas cubicas; pedem altitudinis additum quinque hexapedis BA daturum in ſuperficie AFGE rectangulum quatuor hexapedas longum, tres latum, pedem altum; ſeu pedem hexapedæ cubicæ extenſum ſupra duodecim hexapedas cubicas, quibus ſolidum BFC augeretur duobus hexapedis cubicis.

614. PROBLEMA. *Solidi* 20 *hexapedas longi*, 6 *hexapedas*, *&* *tres pedes lati*, 10 *hexapedas*, *&* 6 *pollices alti ſoliditatem invenire*.

SOLUTIO. Quum longitudo, & latitudo ſolidi baſim efficiant, quæ ſemper aut rectangula ſupponitur, aut rectangulo æqualis; quære pri-

primum hujus baſis ſuperficiem methodo alibi tradita (462). Hæc invenietur continere hexapedas quadratas 130.

I. Ut hujus baſis productum in altitudinem invenias; duc primum hexapedas in hexapedas: productum erit 1300 hexapedarum cubicarum, quas ſcribes ſub hexapedis.

Hexapedæ.	Pedes.	Pollices.
130.	0.	0.
X10.	0.	6.
1300.	.	.
21.	4.	.
10.	5.	.
1310.	5.	.
Hexapedæ cubicæ.	*Pedes hexapedæ cubicæ.*	

II. Ut habeas aliquotam mediam inter hexapedas, & pollices multiplicatoris; fac multiplicatorem non pedes 0, ſed pedem unum habere. Tunc hexapedas multiplicandi duc in pedem multiplicatoris, dicens: ſi hexapedæ 130 in hexapedam ducerentur productum eſſet hexapedarum 130. At non ducuntur niſi in ſextam hexapedæ partem; productum ergo erit tantum $\frac{130}{6}$, nempe hexapedæ cubicæ 21 cum quatuor ſextis partibus hexapedæ cubicæ, quę valent pedes 4 hexapedæ cubicæ. Scribe hoc productum illud ſigno tranſverſo notans, ut memineris, in ſummam non eſſe referendum.

III. Tranſi ad 6 pollices multiplicatoris, & dic: Si 130 hexapedæ in pedem ducerentur, productum eſſet hexapedarum cubicarum 21 cum 4 pedibus hexapedæ cubicæ. Verum multiplicatio fit per 6 pollices, qui ſunt tantum dimi-

dium

dium productum unius pedis; & fiet dimidium hexapedarum 21, & pedes 4; hoc eſt hexapedæ 10 cubicæ, & pedes 5 hexapedæ cubicæ.

IV. Quantitates has omnes adde. Summa exprimet ſoliditatem quæſitam. Erit hæc, 1310 hexapedarum cubicarum, & pedum quinque hexapedæ cubicæ, qui ſunt $\frac{5}{6}$ hexapedæ cubicæ, ſeu pedes 30 cubici.

615. PROBLEMA II. *Solidi 12 hexapedas, 3 pedes, 4 pollices longi, 6 hexapedas, 2 pedes, 4 pollices lati, 13 hexapedas, 4 pedes alti ſoliditatem invenire.*

SOLUTIO I. Quære baſim, ſeu productum in longitudinem (463). Ad hoc duc 12 hexapedas in 6 hexapedas: productum eſt 72. Duc 12 hexapedas in 2 pedes, qui ſunt tertia pars hexapedæ: productum eſt 4 hexapedarum. Duc 12 hexapedas in 6 pollices, qui ſunt quarta pars duorum pedum: productum eſt unius hexapedæ.

Duc deinde 6 hexapedas, 2 pedes, 6 pollices in 3 pedes, qui ſunt dimidia hexapeda. Productum 6 hexapedarum in 3 pedes, ſeu $\frac{6}{1} \times \frac{1}{2}$ eſt trium hexapedarum; productum duorum pedum, ſeu tertiæ partis hexapedæ in dimidiam, ſeu $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ eſt $\frac{1}{6}$ hexapedæ, ſive pes: productum ſex pollicum ſeu $\frac{1}{2}$ pedis in $\frac{1}{2}$ pedem, ſeu $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ eſt quarta pars pedis, ſeu 3 pollices.

Duc adhuc 6 hexapedas, 2 pedes, 6 pollices in 4 pollices qui ſunt $\frac{1}{9}$ trium pedum: productum erit nona pars producti trium pedum. Cape ergo nonam partem trium hexapedarum,

Baſis hujus ſolidi.

Hexapedæ.	Pedes.	Pollices.	Lineæ.
12.	3.	6.	.
× 6.	2.	4.	.
72.	.	.	.
4.	.	.	.
1.	.	.	.
3.	1.	3.	.
.	2.	1.	8.
80.	3.	4.	8.

1 pedis, 3 pollicum, dicens: in 3 hexapedis quoties 9 hexapedæ? nunquam. In 19 pedibus quoties 9 pedes? Bis. In 15 pollicibus quoties 9 pollices? Semel cum reſiduo ſex pollicum, qui ſunt lineæ 72, quarum nona pars ſunt 8 lineæ. Quare baſis hujus ſolidi erit hexapedarum 80 quadratarum cum 3 pedibus, 4 pollicibus, 8 lineis hexapedæ quadratæ.

II. Baſim hanc ducito in altitudinem 13 hexapedarum, & 4 pedum juxta methodum problematis præcedentis. Quare duc primo hexapedas in hexapedas; & productum erit 240, & 80 ſcripta, ut vides in tabella. Duc deinde hexapedas multiplicandi in 4 pedes multiplicatoris, dicens: ſi 8 hexapedas in hexapedam ducerem, productum daret 80 hexapedas; ſed duco tantum in 4 pedes, qui ſunt $\frac{2}{3}$ hexapedæ; productum ergo erit $80 \times \frac{2}{3}$. Cape tertiam partem 80, & bis ſcribe: hæc eſt 26 hexapedæ cubicæ, & quatuor pedes hexapedæ cubicæ.

Deinde duc hexapedas, & pedes multiplicatoris primo in 3 pedes, deinde in 8 lineas multi-

Soliditas hujus ſolidi.

Hexapedæ.	Pedes.	Pollices.	Lineæ.
80.	3.	4.	8.
× 13.	4.	.	.
240	.	.	.
80	.	.	.
26	4	.	.
26	4	.	.
6	5	.	.
.	4	6	$6 + \frac{1}{2}$
.	.	9	$1 + \frac{1}{12}$
1101	0	3	$7 + \frac{7}{12}$
Hexapeda cubica.	*Pedes*,	*pollices*,	*linea hexapeda cubica.*

tiplicandi. Ducens 13 hexapedas, & 4 pedes in 3 pedes, qui ſunt dimidia hexapeda, productum habes 6 hexapedas cubicas, & quinque pedes hexapedæ cubicæ, ſeu $\frac{5}{6}$ hexapedæ cubicæ. Nam $\frac{13}{1} \times \frac{1}{2} = 6 + \frac{1}{2}$, ſeu ſex hexapedis, & tribus pedibus. Deinde $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$, ſeu duobus pedibus: ſumma 2 hexapedæ + 5 pedes.

Ducens deinde 13 hexapedas, & 4 pedes in 4 pollices, qui ſunt $\frac{1}{9}$ trium pedum, habes $\frac{1}{9}$ poſtremi producti, ſeu 4 pedes, 6 pollices, 6 lineas, & ferme dimidiam lineam hexapedæ cubicæ. Nam nona pars pedum 41 ſunt 4 pedes cum reſiduo 5, quod valet 60 pollices. Nona pars 60 pollicum ſunt 6 lineæ cum re-

ſiduo 6, quod valet 60 puncta. Nona pars 60 punctorum ſunt 6 puncta, ſeu $\frac{1}{2}$ lineæ cum reſiduo 6, quod negligitur.

Ducens tandem 13 hexapedas, & 4 pedes in 8 lineas, quæ ſunt $\frac{1}{6}$ pollicum 4, habes $\frac{1}{6}$ poſtremi producti, ſeu 9 pollices, 1 lineam, & $\frac{1}{2}$ lineæ hexapedæ cubicæ.

Tandem producta hæc omnia adde. Sunt hęc 1101 hexapedæ cubicæ, tres pollices, & ferme 7 lineæ cum dimidia hexapedæ cubicæ hæc eſt ſoliditas quæſita.

Quum accurata præciſione non indigemus, tantum hexapedæ, pedes, & pollices tum multiplicandi, tum multiplicatoris invicem ducuntur; pro lineis quid proximum ſumitur.

§. III.

RATIO SOLIDORUM.

616. OBSERVATIO. Ex hactenus dictis de menſura ſolidorum ſequitur, *cujuſque corporis ſoliditatem eſſe productum ſuperficiei in altitudinem*. Hæc ſuperficies, & hæc altitudo ſunt duo ſolidi *factores*. Quum ergo ſuperficies ſit jam productum duarum dimenſionum ſequitur ſoliditatem quamvis eſſe productum trium dimenſionum, quæ ſunt *longitudo*, *latitudo*, *profunditas*, ſive altitudo.

I. *In priſmate quadrilatero* longitudo eſt unum baſis latus; latitudo perpendicularis a latere pro baſi ſumpto ad latus oppoſitum ducta; altitudo, ſeu profunditas perpendicularis a baſi ſuperiore ad inferiorem, ſi opus ſit, productam demiſſa.

II. *In priſmate triangulari* longitudo eſt latus quodvis baſeos; latitudo dimidia perpendicularis a vertice anguli oppoſiti huic lateri in ipſum

ipſum ducta; altitudo perpendicularis a baſi ad baſim ducta.

III. *In priſmate, cujus baſis ſit polygonum quodvis regulare*, longitudo eſt perimeter baſis; latitudo dimidia perpendicularis a centro baſis ad unum latus ducta; altitudo perpendicularis a baſi in baſim ducta.

IV. *In pyramide, cujus baſis ſit polygonum quodvis regulare*, longitudo, & latitudo eædem ſunt, quæ in priſmate præcedente; aut ut habeatur productum ſoliditatis, baſis ducenda eſt tantum in tertiam partem altitudinis pyramidis; ejus enim ſoliditas eſt tantum tertia pars priſmatis ejuſdem baſis, & altitudinis. Quare factor altitudinis erit non tota pyramidis altitudo, ſed tertia ejus pars tantum.

THEOREMA I.

517. *Duo priſmata, vel cylindrus, & priſma (recta ſint ſolida aut obliqua) baſibus aqualibus, altitudinibus inaqualibus, ſunt inter ſe ut altitudines.* Hac enim unica dimenſione differunt; atque hæc inæqualis dimenſio exprimit quot ſtrata æqualia habeat unum plus altero. Q. E. D.

618. COROLLARIUM. *Duo coni, vel dua pyramides (ſive ſolida recta ſint, ſive obliqua) baſibus aquales, altitudinibus inaquales, ſunt inter ſe ut altitudines.* Sunt enim tertia pars priſmatum, quæ ſunt inter ſe ut altitudines (596); & tertiæ partes ſunt inter ſe, ut tota. Q. E. D.

THEOREMA II.

619. *Duo priſmata, vel duo cylindri, vel priſma, & cylindrus (recta ſint ſolida, aut obliqua) altitudinibus aqualibus, baſibus inaqualibus, ſunt inter ſe ut baſes.* Non enim

niſi baſibus differunt; & differentia baſium analoga eſt differentiæ ſoliditatum. Si baſis primi eſt pes quadratus, & baſis ſecundi tres pedes quadrati; priſmata, aut cylindri ſunt inter ſe ut 1 ad 3; patet enim in ſecundo priſmate eſſe tria priſmata primo æqualia, ita, & eadem ratione ſi baſis primi eſt 10, alterius $245 + \frac{1}{3}$; priſmata ſunt inter ſe ut 10 ad $245 + \frac{1}{3}$. Q. E. D.

620. COROLLARIUM. *Duo coni, vel duæ pyramides (recta ſint corpora, aut inclinata) altitudinibus æquales, baſibus inæquales ſunt inter ſe ut baſes*; ſunt enim tertia pars priſmatum, quæ inter ſe ſunt ut baſes; & tertiæ partes ſunt inter ſe ut tota (163). Q. E. D.

THEOREMA III.

621. *Solida ſimilia ſunt inter ſe ut cubi dimenſionum homologarum*

DEMONSTRATIO I. Solida ſimilia (578) ſunt inter ſe in triplicata ratione, ſive ut cubi cujuſque eorum homologæ dimenſionis. In ſolidis enim ſimilibus omnes dimenſiones homologæ ſunt proportionales; ergo ſolida hæc ſunt producta trium quantitatum proportionalium; ergo in triplicata ratione unius ex his tribus quantitatibus; adeoque unius cujuslibet dimenſionis utriuſque ſolidi (219).

Quare duo priſmata ſimilia, vel duo cylindri ſimiles, duæ pyramides ſimiles, vel duo coni ſimiles ſunt inter ſe in triplicata ratione unius cujuſcumque ex ſuis dimenſionibus homologis; ſcilicet aut ut cubi latitudinis, aut ut cubi longitudinis, aut ut cubi altitudinis.

II. Eadem theoria ſolidis adhiberi poteſt, quam pro ſimilibus ſuperficiebus alibi ſtatuimus (499). Quare ſint duo ſolida quævis ſimilia. Tres minoris dimenſiones voco *a*, *b*, *c*; tres majoris *an*, *bn*, *cn*. Oſtendendum eſt, primum ſolidum

lidum eſſe ad alterum, ut cubum dimenſionis cujuſque a primi ad cubum homologæ dimenſionis an ſecundi. Oſtendo. Tres horum ſolidorum factores ſunt abc, & $abcn^3$; ratio ergo primi ad alterum eſt $abc : abcn^3$.

At huic rationi æqualem ſubſtituere poſſum, nempe rationem $a^3 : a^3n^3$. Porro hanc rationem dico præcedenti æqualem; nam fiat $abc : abcn^3 :: a^3 : a^3n^3$. Hic productum extremorum $a^3 n^3 abc$ eſt æquale producto mediorum $a^3 n^3 abc$. Eadem demonſtratione in aliis dimenſionibus uti poſſumus. Q. E. D.

622. COROLLARIUM. *Duæ ſphæræ ſunt inter ſe in triplicata ratione tum radiorum, tum diametrorum, tum peripheriarum, tum arcuum ſimilium. Item duo cubi ſunt inter ſe in triplicata ratione ſuarum dimenſionum.*

DEMONSTRATIO I. Duæ ſphæræ inæquales ſunt duo *ſolida ſimilia*; ergo tres factores peripheria, diameter, & tertia pars radii (605) ſunt quantitates proportionales (474): ergo duæ ſphæræ inæquales ſunt ut cubi alicujus ex tribus his factoribus, ſive ut cubi alicujus ex tribus his factoribus per numerum quemvis multiplicati, aut diviſi (220).

Quare ſi ſphæræ s cujuſvis diameter ſit $= 1$ alterius S diameter ſit $= 10$, ſoliditas primæ erit 1, alterius 1000.

II. Pari modo duo cubi inæquales ſunt ſemper *ſolida ſimilia*; ergo ſunt inter ſe in triplicata ratione aut longitudinum, aut profunditatum.

Dato cubo, cujus diameter $= 1$ facile eſt cubum octuplo majorem invenire: erit hic cujus diameter dupla, ſeu $= 2$. Sed dato cubo, cujus diameter $= 1$, non ita facile eſt *cubum duplum* invenire; cubus enim $= 1$, & cubus $= 2$ factores habent qui eſſe debent inter ſe ut $\sqrt[3]{1}$ ad $\sqrt[3]{2}$; quibus radicibus proximæ inveniri poſ-

ſunt in infinitum (151), nunquam neque calculo, neque geometria elementari illas licet aſſignare omnimoda præciſione.

NOTA. Veteres geometræ, reſoluto problemate duplicationis quadrati, problema propoſuerunt duplicationis cubi: hoc ex difficultate tantum celebritatem adeptum eſt.

Ad problema duplicationis quadrati reſolvendum quæritur media proportionalis geometrica m inter diametrum a circuli dati, & diametrum duplam $2a$; unde habetur proportio continua $\div a.m.2a$; unde infertur; $a^2 : m^2 :: a : 2a$ (521).

Ad problema *duplicationis cubi* geometrice reſolvendum, inveniendæ eſſent duæ mediæ proportionales K, & m inter a, & $2a$; ita ut haberetur $\div a.K.m.2a$; unde haberetur $a^3 . K^3 :: a.2a$; & cubus a^3, cujus a eſſet diameter eſſet dimidius cubus K^3, cujus K eſſet diameter (234). At hæ duæ mediæ proportionales, quæ ope parabolæ circulum ſecantis facile inveniuntur, ſola geometria elementari inveniri nequeunt.

Ceterum geometria elementaris ſufficit ad cubum in praxi duplicandum omni præciſione a praxi ipſa expetenda; & duæ mediæ proportionales, quæ ope ſectionum conicarum inveniuntur, mentem quidem magis obleƈtant, non majorem accurationem in praxi præſtant. Dato cubo, cujus ſoliditas ſit, puta, linearum cubicarum 100000, cubi dupli ſoliditas erit linearum 200000. Ut hunc cubum duplum habeas extrahe radicem cubicam ex 100000 & ex 2000000. Cubi ex his duabus radicibus effecti erunt ut 1 ad 2. Differentia non erit $\frac{1}{10}$ lineæ cubicæ; & ſi ſumas duas medias proportionales geometricas, majorem in praxi te accurationem, ac præciſionem obtinuiſſe fruſtra ſperabis.

Eodem modo proxime in infinitum accedes ad

ad duplam ſphæram alterius, ad cylindrum duplum, & ad reliqua.

THEOREMA IV.

623. *Cylindrus rectus æqualis eſt producto ſuperficiei convexæ in dimidium radium.*

DEMONSTRATIO. Ut cylindrum ſphæræ ſoliditate comparemus, cylindrum conſideramus veluti evolutum in ſtrata rectilinea ſupra ſuperficiem ſuam convexam (*fig.* 68).

I. Oſtendimus, ſuperficiem circuli æqualem eſſe areæ trianguli, cujus baſis ſit peripheria circuli, altitudo radius ipſius circuli (481): ergo ſi ADA ſit baſis cylindri, & omnia ſtrata concentrica ADA, *ada*, C ejus axem obeuntia evolvantur; habebitur *dimidium priſma quadrilaterum*, cujus altitudo erit CA, & unum baſis latus AB.

II. Atqui hoc priſma dimidium æquale eſt producto rectanguli a ſua baſe effecti in dimidiam ſuam altitudinem AC; hoc enim ſolidum eſt dimidium aliud ſolidum ejuſdem baſis, & cujus altitudo eſſet ubique æqualis ipſi AC; quæ ſemper proportionaliter a C ad B decreſcit in tota extenſione rectanguli baſim efficientis. Q. E. D.

THEOREMA V.

624. *Soliditas ſphæræ æqualis eſt duabus tertiis partibus cylindri circumſcripti* (*fig.* 86)

DEMONSTRATIO I. Superficies ſphæræ, & cylindri circumſcripti ſuperficies convexa ſunt æquales (573); ſi ergo ſphæra, & cylindrus ſupra ſuam ſuperficiem convexam evolvantur, ſolida hæc habebunt baſes æquales.

II. Sphæra, & cylindro circumſcripto ſupra ſuperficiem convexam evolutis; ſoliditas ſphæræ eſt productum baſis in tertiam partem radii

(605)

(605): ſoliditas cylindri eſt productum ejuſdem baſis in dimidium radium, ex theoremate præcedente. Ergo ſphæra, & cylindrus erunt inter ſe ut eorum factores inæquales (221); nempe ut tertia pars radii ad radium dimidium. Jam ſi duo hi termini duplicentur, ratio perſeverabit; & hinc erunt duæ tertiæ partes radii, illinc radius: ergo ſphæra eſt ad cylindrum circumſcriptum, ut duæ tertiæ partes radii ad radium totum: ergo ſphæra ad cylindrum ut 2 ad 3. Q. E. D.

625. COROLLARIUM. Alibi oſtenſum eſt (575) ſuperficiem ſphæræ eſſe ad ſuperficiem totam cylindri circumſcripti, ut 2 ad 3; hic oſtendimus ſphæram quoque eſſe ad cylindrum circumſcriptum, ut 2 ad 3. *Ergo ſuperficies ſphæræ ad totam cylindri circumſcripti ſuperficiem, ut ipſa ſphæra ad cylindrum.*

Rationes hæ ſphæræ ad cylindrum ab Archimede detectæ ipſi immortalitatem pepererunt, ut Pythagoræ quadratum hypothenuſæ detectum æquale quadratis laterum (517).

Adeo Archimedes hoc invento ſibi placuit, ut ſuo tumulo cylidrum ſphæræ circumſcriptum inſculpi juſſerit. Quam diverſa inſignia hæc gentilitia, ab iis quæ poſterioribus ſæculis bellicoſi homines elegerunt!

THEOREMA VI.

626. *Sphæræ ſoliditas major eſt ſoliditate cujuſque ſolidi æqualem ſuperficiem habentis.*

DEMONSTRATIO. I. Alibi oſtendimus, inter iſoperimetras figuras circulum aream habere omnium maximam (510); ergo ſolidum productum a perpendiculari revolutione lineæ rectæ circa circulum majore gaudebit ſoliditate, quam ſi circa aliam quamvis figuram iſoperimetram converteretur; eandem enim ſtrato-

torum elementarium ſummam continebit, quæ ſingula majorem aream habebunt.

Exempli gratia, *quadratum* pedem latum, quum perimetrum habeat pedum quatuor, aream habet tantum unius pedis; *circulus* vero perimetro quatuor pedum aream habet pede uno multo majorem (484).

II. Soliditas ſphæræ eſt $\frac{2}{3}$ cylindri circumſcripti; ergo ſoliditas ſphæræ major erit ſoliditate priſmatis, pyramidis, coni ſuperficie cylindro circumſcripto æqualium.

Exempli cauſa (poſita utrinque ratione diametri ad peripheriam in numeris integris, ut 1 ad 3): ſit cylindrus diametro unius pedis, & pedem altus; ejus ſuperficies, adjectis baſibus, erit pedum quadratorum $4 + \frac{1}{2}$. Ponamus hunc cylindrum evolutum ſuper ſuperficiem ſuam convexam pedum quadratorum trium (623): erit ejus ſoliditas, productum baſis in $\frac{1}{4}$ diametri $\frac{3}{4}$ pedis cubici: $\frac{3}{1} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Sit ſphæræ ſuperficies pedum $4 + \frac{1}{2}$; ejus diameter longior erit pede $1 + \frac{1}{4}$. Si ſupponatur evoluta, & in conum mutata (605), erit ejus ſoliditas, productum baſis in $\frac{1}{3}$ radii, $\frac{3}{4}$ pedis cubici, diametro ſuppoſita unius tantum pedis; ſiquidem $\frac{4}{1} + \frac{1}{2}$, ſeu $\frac{9}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

III. Sit ſphæra, & ſphæroides regularis numero laterum finito: & hæc ſolida ſint ſuperficie æqualia. Hæc plano ſecentur per utriuſque axem, & polos tranſeunte. Sectio erit circulus in ſphæra, polygonum regulare in ſphæroide: & ſi ſectiones circa axem convertantur, altera ſphæram, altera ſphæroidem deſcribet. Circulus, & polygonum ſunt iſoperimetra; ſunt enim partes ſimiles duarum ſuperficierum æqualium; & in utroque ſectiones fieri poſſunt indefinitæ numero, quarum ſumma totam eorum ſuperficiem complectetur.

Pa-

Patet deinde, utrumque ſoliditatem habiturum extenſioni plani generantis proportionalem; eorumque illud ſolidıtate majus fore, cujus planum generans aream majorem habebit, ſeu majorem elementorum ſummam.

At circulus majorem aream, & elementorum ſummam habet, quam pentagonum, hexagonum, aut aliud quodvis polygonum regulare ejuſdem perimetri, & laterum numero finitorum; ergo ſphæra revolutione circuli genita ſoliditate major erit quovis alio ſolido genito a revolutione pentagoni, hexagoni, aut alius cujuſvis polygoni iſoperimetri lateribus numero finitis.

IV. Idem de quovis alio ſolido dici poterit, cujus ſoliditas ſphæræ ſoliditati comparetur. Exempli gratia, ſi circulus, & ellipſis circa ſuum axem convertantur, ille *ſphæram*, hæc *ellipſoidem* deſcribet hinc intumeſcentem, illinc compreſſum. Ponamus ſolida ſuperficie æqualia; & ſumpta in ellipſoide diametro ſphæræ diametro æquali, per has diametros utrumque ſolidum dividamus in æqualem ſtratorum numerum, quæ eorum ſuperficiem, & ſoliditatem in elementa diviſam centinebunt. Quodvis planum ſphæræ elementare erit circulus; quodvis planum ſphæroidis elementare erit planum hinc oblongum illinc compreſſum: plana hæc erunt iſoperimetra; eorum enim perimetri erunt partes ſimiles æqualium ſuperficierum. His poſitis,

Dico ſphærę ſoliditatem fore ſoliditate ellipſoidis majorem; quodvis enim ſphęrę planum elementare eſt circulus, qui quavis figura iſoperimetra major eſt; adeoque aream, & materiam ampliorem habet. Plana ſphæroidis elementaria non ſunt circuli; minorem ergo circularibus iſoperimetris analogis planis ſoliditatem habent.

Præterea elementaria ſphæroidis plana erunt dia-

diametro inclinata; in ſphæra erunt diametro perpendicularia; ergo quodvis ſphæræ planum in ſua minima altitudine re ipſa altius erit plano ſphæroidis analogo. Hinc quoque ſphæra ſphæroidem ſoliditate excedet.

Ex his ſequitur, ſphæram quovis alio ſolido ſuperficie æquali majorem habere ſoliditatem. Q. E. D.

CONCLUSIO. Extenſione jam in tribus ſuis dimenſionibus conſiderata, videndum eſt qua ratione extenſionis dimenſiones calculo ſubjici poſſint. Hoc ſequente tractatu exequemur.

TRACTATUS IV.

TRIGONOMETRIA.

627. DEFINITIO. T*rigonometria* eſt ars triangula calculo arithmetico reſolvendi; ſeu ars arithmeticam geometriæ applicandi, cujus figurarum menſura ſunt triangula, ad quæ reducuntur (*fig.* 45).

I. Sit triangulum ABC, cujus nota ſit baſis AB, tum duo anguli A, B, ex quibus tertius C innoteſcet. Alibi (417) methodum tradidimus magnum hoc triangulum reſolvendi ex ratione, quam dicit ad minus triangulum ſimile *abc*. Methodus hæc dicitur: *trigonometria per triangula ſimilia*.

II. Si in eodem triangulo ABC angulus C notus rationem geometricam diceret ad oppoſitum latus AB notum, & angulus A notus ad latus oppoſitum CB ignotum: facile innoteſceret latus ignotum CB, facta analogia: angulus C notus ad latus AB notum, ut angulus A notus ad latus CB ignotum.

III,

III. At rationem hanc, quam anguli non dicunt ad latera oppoſita, ut alibi oſtendemus, dicunt ſinus angulorum ad latera his angulis oppoſita. Pro angulis igitur ſumi poſſunt ſinus: atque ita falſa præcedens analogia in hanc veram mutabitur. *Sinus notus anguli C ad latus oppoſitum AB notum, ut ſinus notus anguli A ad latus oppoſitum CB ignotum.* Inveniendus eſt itaque *ſinus* cujuſque anguli; atque ita triangulum ABC in ſe immediate reſolvetur ſine ſimilis trianguli *abc* auxilio. Methodus hæc triangula immediate in ſe ipſis reſolvendi dicitur *trigonometria per ſinus*. Hanc explicare aggredimur.

628. NOTA. I. Prima methodus in praxi ſufficit ad triangula reſolvenda, quorum nec latera nimis extenſa, nec anguli nimis acuti ſint; tunc enim parvum triangulum deſcribi poteſt ingenti ſatis accurate ſimile.

At in ingentibus triangulis, quorum baſis, exempli gratia, erit radius terreſtris, latera rectæ ab hujus radii extremitatibus ad centra Saturni aut ſolis, prima methodus impar eſt; nequit enim parvum triangulum conſtrui ingenti dato triangulo accurate ſimile. Quare hic altera methodo opus eſt. Atque hæc etiam in minoribus triangulis paſſim uſurpatur; nec prima utimur, niſi quum tabulis ſinuum deſtituti ſumus.

629. NOTA. II. Arithmetica datis tribus trianguli quantitatibus proportionalibus quartam accuratiſſime exhibebit. Hoc aſſequi per triangula ſimilia nunquam certi erimus (430).

630. NOTA. III. Tangentes, & ſecantes angulorum certam quoque ad latera his angulis oppoſita rationem dicunt: illæ itaque æque ac ſinus uſurpari poſſunt. At ad majorem tractatus ſimplicitatem, & ad faciliorem in mathematicis viam ſequendam triangula tantum

ope

ope *ſinuum* reſolvemus, omiſſis tangentibus, & ſecantibus, quarum tamen theoriam ſatis explicatam trademus.

631. NOTA. IV. Trigonometria in *rectilineam*, & *ſphæricam* dividitur. Prima in triangulis verſatur, quorum latera ſunt lineæ rectæ; altera in triangulis, quorum latera ſunt arcus circuli. Primum, & potiſſimum de prima: dein brevius de altera agemus.

ARTICULUS PRIMUS.

TRIGONOMETRIA RECTILINEA.

632. OBSERVATIO. In pleriſque operibus mathematicis trigonometria rectilinea maxime complicata eſt: eam nos ſimplicem, & captu facilem reddere conati ſumus. Propterea quæ inutilia viſa ſunt rejecimus; & neceſſaria, atque utilia omni perſpicuitate protulimus. Primum de chordis agimus, unde ſinus innoteſcunt, dein de ratione ſinuum ad latera, ut latera ignota ope ſinuum notorum dignoſcantur; tandem de ratione ſinuum ad tangentes, & ſecantes, ad has ignotas per ſinus notos inveniendas.

PA-

PARAGRAPHUS PRIMUS.

CHORDÆ, ET SINUS.

633. DEFINITIO I. C*Horda* eſt recta in circulo ab una arcus extremitate ad aliam ducta (*fig.* 94).

Exemplum . Recta GHK eſt chorda arcus GAK. Item recta EFI eſt chorda arcus EAI. Oſtendemus, chordam dimidiam eſſe ſinum dimidii arcus, quem ſubtendit.

634. DEFINITIO II. *Sinus rectus* anguli GCA, ſeu arcus GA hunc angulum metientis, dicitur recta GH ab arcus extremitate G ad radium, ſeu ad diametrum ACB perpendicularis ducta per alteram extremitatem A ejuſdem arcus tranſeuntem (*fig.* 94.).

Item linea EF eſt ſinus rectus anguli ECA, & arcus EA. Recta DC eſt ſinus rectus anguli DCA, & arcus DA. Recta GL eſt ſinus rectus anguli GCD, & arcus GD.

635. DEFINITIO III. *Sinus verſus* anguli GCA, vel arcus GA dicitur pars radii inter ſinum rectum, & peripheriam intercepta. Quare linea HA eſt ſinus verſus anguli GCA, & arcus GA. Recta FA eſt ſinus verſus anguli ECA, & arcus EA. Recta *m* A eſt ſinus verſus arcus *n* A.

Quum *ſinus* tantum dicitur, ſemper rectus intelligitur: de hoc in tractatu univerſo, & in tabulis ſermo erit. Alibi oſtendemus quomodo dati arcus ſinus verſus inveniatur (638, 662).

CO-

C O R O L L A R I A

636. COROLLARIUM I. *Angulus obtuſus eundem ſinum habet, quem acutus ejus ſupplementum* (*fig.* 94).

DEMONSTRATIO. Sit angulus obtuſus GCB, cujus ſupplementum eſt angulus GCA (338). Ambo hi anguli eundem ſinum habent GH; a puncto enim G hos angulos dividente unica perpendicularis GH ad diametrum per aliam arcus extremitatem tranſeuntem duci poteſt. Porro, ex definitione, perpendicularis GH ſinus eſt. Q. E. D.

637. COROLLARIUM II. *Pars radii intra centrum circuli, & ſinum anguli acuti comprehenſa æqualis eſt ſinui complementi hujus anguli* (fig. 94).

DEMONSTRATIO. Sit angulus GCA, cujus ſinus GH, & cujus complementum angulus GCD (337).

Pars HC radii æqualis eſt ipſi GL ſinui anguli complementi. Nam rectæ HC, GL ſunt duæ perpendiculares inter parallelas DC, GH, quæ ambæ ſunt perpendiculares radio CA angulum rectum DCA efficienti.

Si angulus GCA creſcat, aut decreſcat; rectæ GL, HC ſemper perpendiculares inter parallelas creſcent, & decreſcent ſemper inter ſe æquales. Q. E. D.

638. COROLLARIUM III. *Sinus verſus anguli acuti eſt radius, dempto ſinu anguli complementi* (*fig.* 94).

DEMONSTRATIO. Patet. Sinus enim verſus anguli acuti cujuſque GCA eſt HA. Porro HA eſt radius CA—HC=GL. Quare noto ſinu recto anguli complementi GCD, innoteſcit ſinus verſus anguli GCA, & arcus GA hujus anguli Q. E. D.

639. COROLLARIUM IV. *Sinus rectus anguli,*

guli, aut arcus eſt dimidia chorda arcum duplum ſubtendens (fig. 94.).

DEMONSTRATIO. Sinus quivis GH uſque ad peripheriam in K productus fit chorda GHK. Hæc chorda, & arcus ab illa ſubtenſus a diametro, & radio BCA illi perpendiculari biſecantur (407). Ergo chordæ dimidium GH æquale eſt ſinui arcus GA dimidii arcus GAK. Idem dicas de recta EF ſinu anguli ECA, quæ producta ad peripheriam in I fieret chorda EFI arcus dupli EAI.

Quare ſi chordæ arcuum omnium peripheriæ innoteſcerent, etiam omnium arcuum ſinus innoteſcerent; tunc enim ad habendum *ſinum arcus* ſatis eſſet ſumere chordam dimidiam arcus dupli Q. E. D.

640. NOTA. I. Si *angulus ad centrum* GCA deſcendens ſecus radium ex C in B fieret *angulus inſcriptus* vertice peripheriæ inſiſtens; latera hujus anguli arcum complecterentur duplum arcus GA (366). *Sinus hujus anguli inſcripti, & non mutati eſſet ergo dimidia chorda ſubtendens totum arcum, quem complectitur*. Sinus enim anguli, & arcus eſt dimidia chorda arcum duplum ſubtendens; & angulus inſcriptus non mutatus amplectitur arcum duplum illius, quem ad centrum poſitus contineret. Quare theoria ſinuum angulorum ad centrum etiam angulis inſcriptis inſervit.

II. Quum triangulum eſt circulo inſcriptum, illico non apparet cur dimidia chorda alicui angulo oppoſita ſit ſinus hujus anguli (*fig.* 95).

Statue itaque angulum A ad centrum circuli in *a* ita, ut latus AB ſemper tranſeat per punctum B. Tunc latus AC in *a* D tranſibit; & angulus A in *a* poſitus menſuram habebit dimidium arcum BDC, ſeu totum arcum BD. Quum vero radius *a* D arcum BDC bifariam ſecet, chordam quoque BC bifariam ſecat, adeoque eſt illi perpendicularis (407). Quare BC eſt

eſt quoque radio *a* D perpendicularis; & dimidia B*d* eſt ſinus anguli *a* angulo A æqualis.

III. Idem de reliquis trianguli inſcripti ABC angulis demonſtrari poteſt, de quibus ſingulis oſtendetur, eorum ſinus eſſe dimidia latera oppoſita. Quare ſinus anguli B eſt dimidia chorda, ſeu dimidium latus AC: ſinus anguli C dimidia chorda, ſeu dimidium latus AB.

641. COROLLARIUM V. *Sinus arcus quadrante minoris eo magis creſcit, quo magis creſcit arcus* (*fig.* 94).

DEMONSTRATIO. GH ſinus arcus G A minor eſt, quam EF; & EF ſinus arcus E A minor eſt, quam DC ſinus anguli recti DCA, & arcus 90 graduum, ſeu quadrantis. Q. E. D.

642. COROLLARIUM VI. *Sinus arcus quadrante majoris eo magis decreſcit, quo magis arcus creſcit* (*fig.* 94).

DEMONSTRATIO. Patet, DC ſinum arcus BD majorem eſſe, quam EF; EF ſinum arcus B E majorem eſſe, quam G H; GH ſinum arcus BDG majorem eſſe, quam *n m*, & quam ſinus omnes angulorum obtuſorum majorum, quam BCG.

643. COROLLARIUM VII. *Sinuum omnium maximus eſt radius* (*fig.* 94).

DEMONSTRATIO. Res patet; nam ex duobus poſtremis corollariis radius eſt ſinus anguli recti; & ſinus omnium aliorum angulorum acutorum, & obtuſorum radio minores ſunt. Propterea radius dicitur *ſinus totus*.

644. COROLLARIUM VIII. *Etſi ſinus creſcant quamdiu arcus creſcunt, uſque ad quadrantem; tamen ſinus non creſcunt in ratione angulorum* (*fig.* 97).

DEMONSTRATIO. Etſi arcus AEB ſit duplus arcus ADE; tamen chorda ADB non eſt dupla chordæ A E; chorda enim ADB non adæquat duas chordas æquales A E, BE ſimul ſum-

ſumptas. Atqui ſinus ſunt dimidiæ chordæ (639): *ergo ſinus non ſunt ſuis arcubus, aut angulis proportionales* Q. E. D.

645. COROLLARIUM IX. *Sinus totus eſt æqualis radio: ſinus partiales ſunt partes radii*. Poſſunt ergo ſinus inter ſe comparari. Totum enim ſuis partibus comparari poteſt; & reciproce.

646. NOTA I. Radius cujuſque circuli eſt *ſinus totus*, de quo nunc agimus. Radius hic ſupponitur diviſus in partes 100000, vel 10000000: tunc alii ſinus ſunt partes ſinus totius.

I. In tot partes ſinus totus diviſus fuit, ut ſine ſenſibili errore negligi poſſent fractiones unitatis a diviſione reſiduæ. Exemplum. Si detur circulus, cujus radius ſit hexapedarum 100000; quum ſinus totus ſupponatur partium 100000, pars quælibet ſinus totius, ſeu radii erit hexapeda. Et facta ſupputatione, ſi fractio ſupereſt, negligi poterit; neque enim valebit niſi hexapedæ partem, quæ in hexapedis 100000 nihilo eſt comparanda. Potiori jure fractio hæc negligi poterit, ſi ſupponatur radius partium 10000000, vel plurium. Nos illum ſupponemus in partes 10000000 diviſum in tabula ſinuum ad calcem operis, in qua ſinuum partialium ad ſinum totum rationes continentur.

II. Itaque parvi circuli radius æque, ac majoris in totidem partes diviſus concipitur; ſicuti cujuſque circuli peripheria in gradus 360 diviſa ſupponitur. Deinde quæritur quot partes alii ſinus, qui omnes ſinu toto minores ſunt, contineant partibus radii æquales; Exempli gratia; ſuppoſito ſinu toto partium 10000000; ſi ſcias, ſinum anguli 30 graduum eſſe dimidium ſinum totum; ſcies, ſinum amguli 30 graduum partes ſinus totius continere 5000000.

Et quamvis abſolutus ſinuum valor ignoretur, hoc non obeſt, quominus inveniatur abſo-

ſolutus valor laterum trianguli, cujus latus unum, & anguli noti ſint. Si enim in triangulo aliquo ſinus partium 10000000 valet 300 hexapedas; alter ſinus partium 5000000 valebit hexapedas 150.

III. Hinc apparet, *ſinus partiales eſſe tantum fractiones ſinus totius, ſeu radii pro unitate ſumpti*. Exempli cauſa, ſinus totus, ſeu 90 graduum, eſt $\frac{10000000}{10000000} = 1$; ſinus 30 graduum eſt $\frac{5000000}{10000000} = \frac{1}{2}$, atque ita porro. Quare tabulæ ſinuum ſunt veræ fractiones, quarum denominator omittitur, & ſubauditur: ſunt hæ *fractiones decimales* (464).

Tangentes quoque, & ſecantes in tabulis per radii fractiones exprimuntur, quarum denominator ſubauditus ſemper eſt radius; numerator vero conſtante denominatore modo major, modo minor fractionis valorem facit unitate modo majorem, modo minorem, quæ unitas ſemper eſt ſinus totus (188).

647. NOTA II. Quum ſinus arcus ſemper ſit dimidium chordæ arcum duplum ſubtendentis (639); ad omnes ſinus cognoſcendos omnes chordæ cognoſcendæ ſunt; ſumptis enim earum dimidiis ſinus omnium angulorum habebuntur. Hos ſinus ſequentibus problematibus, & theorematibus inquiremus.

THEOREMA I.

648. *Arcuum ſimilium chordæ in duobus circulis ſunt radiis proportionales* (*fig.* 12).

DEMONSTRATIO. Sint circuli inæquales CMN, C*mn*, in quibus cape duos angulos, æquales MCN, *m*C*n*, qui arcus ſimiles includent (340); & duc rectas MN, *mn*, chordas arcuum ſimilium.

Triangula MNC, *mn*C ſunt ſimilia: ha-

bent enim angulum communem, & quum in utroque triangulo duo reliqui anguli opponantur æqualibus lateribus, ſunt inter ſe æquales (589). Ergo angulus M, aut N eſt dimidium ſupplementi ad 180 gradus; angulus *m*, aut *n* eſt dimidium ejuſdem ſupplementi ad 180 gradus. Ergo angulus M eſt æqualis angulo *m*; & N ipſi *n*. Ergo tria latera majoris trianguli ſunt tribus minoris proportionalia (403). Ergo MC : *m*C :: MN : *mn*.

Atqui hic prima ratio eſt ratio radiorum, altera æqualis rationem chordarum exprimit; ergo in duobus circulis chordæ arcuum ſimilium ſunt radiis proportionales Q. E. D.

649. COROLLARIUM. *In circulis ſinus arcuum ſimilium ſunt radiis proportionales*; ſunt enim dimidiæ chordæ arcus duplos ſubtendentes; quum hæ vero ſint ut radii, & earum dimidiæ erunt ut radii (163).

650. LEMMA. *Quum quantitas in aliam ducitur, idem eſt productum, ſive tota in totam, ſive tota in alterius partem prius, deinde in aliam partem ducatur* (*fig.* 103).

DEMONSTRATIO. Sit quantitas quædam AM, vel æqualis AN in AB ducenda.

I. Si AM, vel AN in AB ducatur, productum erit rectangulum ABDM æquale duobus rectangulis AXRM + RXBD ipſi ABDM æqualibus.

II. Si AM vel AN ducatur in AX, deinde in XB; producta erunt duo triangula AXRM + RXBD rectangulo ABDM æqualia.

Eadem valeret demonſtratio, ſi tota AB in partem ipſius MA = NA, & deinde in alteram ejus partem duceretur Q. E. D.

THEOREMA II.

651. *In quovis quadrilatero circulo inſcripto ſumma rectangulorum laterum oppoſitorum diagona-*

gonalium rectangulo eſt æqualis (*fig.* 99. , *&* 100).

EXPLICATIO. Sit quadrilaterum quodvis ABDF circulo inſcriptum, & diagonalibus AD, BF ſe in quovis puncto, & ſub quovis angulo ſecantibus diviſum. Rectangulum latitudine diagonalis cujuſque AD, & altitudine alterius diagonalis BF eſſet rectangulum diagonalium. Duo alia rectangula ex oppoſitis quadrilateri lateribus, AB in FD, & AF in BD ducendo, eſſent ſumma rectangulorum laterum oppoſitorum hujus quadrilateri.

His poſitis, theorema totius trigonometriæ fundamentum facile demonſtratur. Valebit demonſtratio, quicumque ſit angulus, ſub quo diagonales ſe ſecent, ut demonſtrationem indicatis figuris applicando apparebit.

DEMONSTRATIO. Oſtendendum eſt, $AD \times BF = AB \times DF + AF \times BD$. Ducatur recta AM, quæ faciat angulum *r* æqualem angulo *ſ*.

I. $BD \times AF = AD \times FM$. Triangula enim FAM, DAB angulos habent *r*, & *ſ* per conſtructionem æquales: æquales quoque habent angulos AFM, ADB; quippe eidem arcui AB inſiſtentes. Ergo triangula ſunt ſimilia. Ergo $BD : AD :: FM : AF$. Ergo $BD \times AF = AD \times FM$.

Ergo productum laterum oppoſitorum BD, AF æquale jam eſt producto diagonalis AD in alterius diagonalis FB partem FM.

II. $AB \times FD = AD \times MB$. Triangula AFDA, AMBA ſunt ſimilia. Angulus enim FAD æqualis eſt angulo BAM ob angulum communem MAV angulis additum *r*, & *ſ* ex conſtructione æqualibus. Deinde angulus FDA majoris trianguli eſt æqualis angulo MBA minoris: inſiſtunt quippe eidem arcui FA. Quare duo triangula ſunt ſimilia. Ergo; $FD : MB :: AD : AB$. Ergo $FD \times AB = MB \times AD$.

Ergo productum laterum oppoſitorum AB, DF æquale eſt producto diagonalis AD in reſiduum MB alterius diagonalis FB.

III. At ex lemmate præcedente producta totius diagonalis AD in partes FM, MB alterius diagonalis FB valent ſimul rectangulum totius in totam. Ergo ſumma rectangulorum laterum oppoſitorum quadranguli circulo inſcripti rectangulo diagonalium æqualis eſt Q.E.D.

652. NOTA. Theorema hoc unicum eſt, quod in univerſa trigonometria aliquid negotii faceſſere poſſit; omnia reliqua hujus conſectaria ſunt, ut in ſequentibus apparebit. Quare nihil omiſimus, ut omni perſpicuitate demonſtraretur.

Ope hujus theorematis celebres *tabulæ ſinuum* conſtructæ fuerunt, quæ omnium ſupputationum mathematicarum, & phyſico-mathematicarum baſis ſunt. Ut quibus principiis conſtructæ ſint innoteſcat, & qua ratione eas quiſque, ſi non extarent, conſtruere poſſet, animadvertendum eſt, poſito radio partium æqualium 10000000, innoteſcere radium, & ejus quadratum, chordam 60 graduum, quæ quum ſit æqualis radio (477) partes habet quoque 10000000; tum & diametrum duplum radii adeoque partium 20000000. Tribus his notis; invenientur chordæ omnium arcuum a minuto ad gradus 90: dimidiæ hæ chordæ dant ſinus omnes graduum uſque ad 45 (639).

Ex his ſinubus notis reliqui omnes ſinus reſidui anguli complementi ad rectum invenientur uſque ad gradus 90. En quomodo.

PROBLEMA I.

553. *Nota chorda arcus chordam ſui ſupplementi invenire* (*fig.* 100).

SOLUTIO. Sit chorda nota AB: invenienda eſt chorda AF. Angulus FAB ab his chordis

dis effectus rectus eſt; inſiſtit enim diametro FB (368). Si a puncto A ducatur AD diametro perpendicularis, erit ex præcedente theoremate FB×AB=AB×FD+BD×AF. At latus AF æquale eſt lateri DF, & AV ipſi DV (407). Ergo pro AB×FD ſumi poteſt AB×AF. Porro hoc productum æquale erit producto diagonalis FB, quæ eſt diameter, in dimidiam AV alterius diagonalis, quæ hic eſt diametro perpendicularis.

Jam vero in triangulo AFBA ad A rectangulo ſi radius ſit partium 100000, erit diameter partium 200000. At quadratum diametri FB, quæ hic eſt hypothenuſa, æquale eſt quadrato laterum AB, AF (517); ſi ergo a quadrato diametri dematur quadratum chordæ notæ AB, reſiduum erit quadratum chordæ AF. Si ergo reſidui hujus radix quadrata extrahatur (129); hæc exprimet chordam AF.

Si chorda nota ſit chorda arcus 60 graduum æqualis radio (477); chorda AF, quæ invenietur, erit chorda arcus graduum 120.

PROBLEMA II.

654. *Notis chordis duorum arcuum, chordam invenire arcus æqualis eorum ſumma (fig. 100).*

SOLUTIO. Sint arcus AB, BD, quorum notæ ſint chordæ AB, BD. Quæritur chorda AVD ſummam amborum arcuum ſubtendens.

A puncto B chordarum notarum communi termino duc diametrum BF; duc quoque chordas AF, DF arcuum ſupplementi. Tum ex præcedente problemate quære valorem chordarum AF, BF: innoteſcent tunc quatuor latera quadrilateri ABDFA.

Duc invicem latera oppoſita quadrilateri: productorum ſumma erit æqualis producto diagonalium FB, AD. Si ergo ſummam hanc dividas per diagonalem FB, quæ eſt diameter

nota, quotiens erit diagonalis, ſeu chorda quæſita AVD. Quodvis enim productum per alterutram radicem diviſum, alteram in quotiente exhibet.

Exemplum. Si innoteſcat, chordam 30 graduum eſſe partium 51764, & chordam 15 graduum eſſe partim 26106; ex hoc problemate invenies chordam graduum 45 ambos arcus ſubtendentem eſſe partium 76536.

655. COROLLARIUM I. *Data chorda arcus invenietur eadem methodo chorda arcus dupli*.

EXPLICATIO. Nota chorda arcus graduum 7 $\frac{1}{2}$ invenietur chorda arcus graduum 15. Eſt hic uſus poſtremi problematis breviori ſupputatione. Hic enim chorda AB fit æqualis chordæ AD; & chorda AF chordæ DF.

656. COROLLARIUM II. *Data chorda arcus invenietur chorda arcus tripli, quadrupli, quintupli*; *atque ita porro*.

EXPLICATIO I. Ad habendam chordam *arcus tripli*, quære primo chordam arcus dupli. Hac nota, eaque arcus ſimplicis, invenietur chorda ſummæ horum arcuum: erit hæc chorda arcus tripli.

II. Pro *arcu quadruplo*, quære primo chordam arcus dupli, dein chordam hujus dupli; poſtrema hæc chorda erit arcus quadrupli.

III. Pro *arcu quintuplo*, quære chordam arcus dupli, dein chordam arcus tripli; tandem chordam ſummæ duorum arcuum, quorum unus duplus, alter triplus eſt. Poſtrema hæc erit chorda arcus quintupli. Hęc omnia ex præcedente problemate evidentia ſunt.

RPOBLEMA III.

657. *Nota chorda arcus, chordam dimidii invenire* (*fig.* 100).

SOLUTIO. Sit AVD chorda nota arcus

ABD:

ABD: quæritur chorda AB arcus dimidii. A centro C circuli duc diametrum AMB datæ chordæ AVD perpendicularem: diameter hæc & chordam AD, & ejus arcum ABD biſariam dividet (407). Habetur ergo triangulum rectangulum ad V, cujus chorda ignota AB eſt hypothenuſa. Hujus quadratum æquale eſt quadratis laterum AV, BV (517); horum duorum quadratorum ſumma quæritur.

I. Latus AV notum eſt, quod eſt dimidium chordę datæ. Cape ejus quadratum.

II. Latus BV ita invenietur. Ducto radio CA, habebitur aliud triangulum rectangulum AVCA, cujus hypothenuſa eſt radius CA = CB. A quadrato radii CA ſubducto quadrato lateris AV; reſiduum erit quadratum lateris CV. AB hoc reſiduo extracta radice quadrata (129), habebitur radii pars CV; altera pars VB ejuſdem radii ergo innoteſcet.

III. Quare in triangulo AVBA nota ſunt latera AV, BV: eorum quadrata ſimul æqualia erunt quadrato hypothenuſæ AB. Ab hac ſumma extrahatur radix quadrata; habebitur valor chordæ AB in partibus radii.

Exemplum. Sit chorda nota arcus 60 graduum æqualis 100000: invenietur chorda arcus 30 graduum partium 51764; arcus 15 graduum partium 26106; atque ita porro.

PROBLEMA IV.

658. *Nota chorda arcus, chordam tertiæ, & quintæ partis hujus arcus invenire* (*fig.* 101).

SOLUTIO. Sit chorda nota MN partium 180000. Quęritur chorda KN arcus KN, quem ſuppono eſſe $\frac{1}{3}$ arcus NKM.

I. Chorda quæſita KN aliquanto major eſt tertia parte chordæ MN; ſumma enim chordarum MK+KN major eſt, quam chorda MN. Capiatur ergo numerus partium paulo major

tertia parte numeri exprimentis chordam notam MN. Quum hæc ſupponatur = 18000, capiatur numerus aliquanto major quam 60000, ſua tertia parte.

II. Fiat chorda KN æqualis numero caſu ſumpto; & in hac hypotheſi quæratur ipſa chorda nota methodo ſecundi corollarii (656): nempe quæratur chorda arcus tripli illius, cujus chordam caſu ſumpſimus.

Si numerus partium chordę KN caſu datus dat ipſam chordam notam MN, jam numerus ſuppoſitus eſt verus valor chordæ quæſitæ KN.

III. Si vero hic numerus dat chordam MN paulo majorem, aut minorem; patet hypotheſim eſſe falſam, & hac analogia reformandam: (274) chorda erronea MN inventa eſt ad chordam ſuppoſitam KN, ut vera chorda nota MN ad veram ignotam KN. Ex tribus primis terminis innoteſcet quartus, qui erit chorda quæſita KN.

Proportio omnino exacta non eſt; at ſi numerus ſuppoſitus partium chordæ KN, qui pro libito augeri, aut minui poteſt, dat chordam MN veræ infinite proximam; in praxi nullus erit error ſenſibilis. Methodus hæc non uſurpatur niſi ad inveniendam chordam arcus 7 graduum, & 30 minutorum, ſeu alicujus arcus adhuc minoris.

Ceterum ſemper certiores fieri poſſumus, num numerus inventus ſit accurate numerus partium chordæ arcus ſubtripli illius, cujus chorda jam nota eſt; & hoc ex ſecundo corollario præcedente (656) chordam quærendo arcus tripli: numerus enim inventus idem ipſe eſſe debet, qui chordam notam exprimit.

IV. Eadem methodo, qua *invenitur chorda arcus ſubtripli*, *invenitur* etiam *chorda arcus ſubquintupli*. Ut hæc inveniatur, ſuppoſita nota chorda totius arcus, capiatur numerus quinta chordæ notæ parte aliquanto major, & in hac

hac hypotheſi quæratur ipſa chorda nota, ut in exemplo ſuperiore.

Exemplum. Quum chorda graduum 76 ſit partium 123132, invenietur chorda 25 graduum, & 30 minutorum eſſe partium 43856; chorda graduum 15, minutorum 12 eſſe partium 26452; quæ eſt chorda arcus ſubquintupli arcus graduum 76. Radius ſemper ſupponitur partium 100000.

659. APPLICATIO. Per problemata præcedentia facile invenientur chordæ omnium arcuum a 2 minutis ad 90 gradus.

I. Chorda 60 graduum eſt æqualis radio (477), quem ſuppono partium 10000. Invenietur ergo chorda 30 graduum (657): dein 15 graduum, tum $7\frac{1}{2}$.

II. Inventa chorda graduum $7\frac{1}{2}$ quæratur chorda arcus ſubtripli, nempe 2° 30′; deinde charda arcus ſubquintupli, qui eſt 30′. Hac nota, invenietur chorda arcus ſubtripli, ſeu 10′. Hæc dabit chordam 2′ quum quæritur chorda arcus ſubquintupli arcus 10′.

III. Ex problematibus præcedentibus invenientur quoque chordæ arcuum 4′, 6′, 8′, 12′, 14′, 16′, 18′, aliorumque arcuum per duo minuta aſcendendo uſque ad 90°. Harum omnium chordarum dimidia erunt ſinus arcuum 45 primorum graduum. Quum hi ſinus habiti fuerint, ſinus ceterorum graduum uſque ad 90 invenientur ſequente problemate.

PROBLEMA V.

660. *Dato ſinu arcus, ejus coſinum, ſeu ſinum complementi invenire* (*fig.* 94).

SOLUTIO. Poſito noto ſinu GH arcus GA, quæritur GL ſinus arcus GD ejus complementi.

In triangulo rectangulo CHG innoteſcunt duo latera, ſcilicet hypothenuſa CG, quæ eſt

radius partium 100000, & latus GH. Quadratum GH deme a quadrato CG.: reſiduum erit quadratum CH. Ab hoc radicem extrahe, habebis latus CH æquale ſinui arcus GD complementi arcus GA.

Exemplum. Dato ſinu anguli 32°, invenies ejus coſinum, ſeu ſinum 58°. A quadrato enim radii aufer quadratum ſinus noti, reſiduum erit quadratum ſinus 58°. Ab hoc radicem extrahe; radix hæc quadrata exprimet ſinum quæſitum anguli 58°.

661. NOTA. Hac methodo *inventi ſunt ſinus omnium angulorum* ab 1° uſque ad 90°. Tabulæ conſtructæ fuerunt *tabulæ ſinuum* appellatæ, quas ad calcem operis invenies. Eas accuratiſſimas eſſe nitemur; & adnotabimus, errores typographicos in illas obrepere non poſſe, quin illico detegantur.

Sunt quædam tabulæ ſinuum in quibus ſinus totus ſit tantum partium 100000; in aliis ſit partium 10000000. Has prætulimus, magis enim accuratas ſupputationes præbent, quum res accuratiſſime æſtimanda eſt. At monendus lector, in communibus ſupputationibus poſtremas duas notas cujuſque ſinus interjecto puncto ab aliis ſeparatas paſſim negligi; tantum animadvertendum eſt, unitatem addi notæ punctum præcedenti quum duæ poſtremæ valent ultra 50. Exemplum. Ad ſinum 10° invenies in tabulis 17364.82; pro ſinu ſume tantum 17365. Ad ſinum 55° invenies 81915. 21: ſume tantum 81915. Notæ poſt punctum poſitæ valerent $\frac{1}{10000}$ radii, ſi earum valor eſſet 100; at quum ſemper minus valeant, quam 100, ſemper minus valent, quam $\frac{2}{100000}$ radii. Quum valent ſupra 50, addita unitate notæ precedenti, ſit numerus ſinum exprimens veritati propinquior.

Ex theoria ſinus inveniendi, & eorum tabulas

bulas conſtruendi, patet has tabulas exprimere rationem, quam inter ſe, & ad radium dicunt lineæ DC, EF, GH radio perpendiculares in quovis circulo. Lineæ hæ ſunt diverſorum arcuum ſinus. Si GH ſit æqualis radio dimidio, qui radius ſupponatur partium 10000000, ſinus G H in tabulis exhibebitur partium 5000000; atque ita de ceteris.

Differentia ſinus GH a ſinu EF magna eſt; lineæ enim H F, G E, quibus terminantur, ſunt admodum divergentes. Differentia inter ſinum EF, & ſinum DC eſt multo minor; lineæ enim FC, ED, quibus terminantur, ad parallelas multo magis accedunt.

PROBLEMA VI.

662. *Arcus dati ſinum verſum invenire* (*fig.* 94).

SOLUTIO. Sinus verſus arcus cujuſvis GA eſt radii pars HA ſinu recto, & peripheria intercepta (635). Sinus verſi valor eſt radius dempto ſinu arcus complementi (638).

Quare dato arcu AG, quære ſinum GL complementi GD in tabulis ſinuum: habebis GL = HC (660). A radio CA deme ſinum inventum GL = HC: reſiduum erit ſinus verſus HA.

Exemplum. Dato arcu AG 36°, 26′. Sinus GL complementi GD eſt 80558. A ſinu toto 100000 ſubduc 80558: reſiduum 19442 erit ſinus verſus HA. Notæ duæ punctum interjectum ſequentes omittuntur (661). Complementum GD eſt 53°, 40′.

PROBLEMA VII.

663. *Ex theoria chordarum rationem diametri ad peripheriam circuli infinite proxime invenire* (*fig.* 69).

SOLUTIO. In planimetria obſervavimus, ſolutionem celebris problematis quadraturæ cir-

culi ſitam eſſe in perfecta, & accurata ratione diametri ad peripheriam invenienda (483): ſummos mathematicos nunquam accurate rationem hanc invenire potuiſſe; proximas tamen rationes ab Archimede, & Metio inventas; & ab omnibus mathematicis admiſſas ſatis eſſe ad omnem in praxi accurationem obtinendam (479). Nunc ut ſciendi cupidis placeamus, qua methodo proxime hæ rationes inveniri potuerint indicabimus.

I. Patet, poſſe *polygonum regulare* quotquot libuerit laterum circulo *inſcribi* ABDRA; & quo plura latera habebit polygonum, eo magis ejus perimetrum ad peripheriam circuli acceſſuram: ſi polygonum infinita haberet latera, ejus perimetrum in circulum caſuram; quamdiu vero finita numero habebit latera, ſemper peripheria circumſcripta polygoni perimetrum minorem futuram; quum quilibet arcus ſua chorda, quæ recta eſt, & polygoni latus, major ſit.

II. *Latus hexagoni* regularis circulo inſcripti eſt æquale radio (477): nota eſt ergo ratio radii ad latus hexagoni. Hoc eſt chorda arcus 60°. Hac invenietur chorda arcus dimidii, ſeu 30°. (657), quæ erit latus *dodecagoni*. Hac chorda invenietur chorda arcus 15°, quæ erit latus polygoni 24 laterum. Eadem methodo invenietur latus polygoni laterum 48, 96, 192, 384; atque ita parro in infinitum. Innoteſcet igitur radius, & latus polygoni inſcripti, puta laterum 384.

III. Quum ſupputando tot latera polygono dederis, ut ejus perimeter cenſeri poſſit ad ſenſum a peripheria non diſtingui, jam ſine ſenſibili errore polygoni perimeter pro peripheria ſumi poterit. Quare poſito radio noto partium 100000, vel 10000000, numerus earundem partium exprimens latus inventum ducetur in numerum laterum polygoni: productum dabit perime-

rimetrum polygoni in partibus radii. Innoteſcet ergo ratio perimetri ad radium, adeoque ad circuli diametrum; quæ ratio ſine ſenſibili errore cenſeri poterit vera ratio peripheriæ ad radium, vel ad diametrum.

Ratio hæc in uno circulo inventa, in omnibus circulis eadem erit; in omnibus enim circulis peripheriæ ſunt inter ſe ut radii, vel diametri (473).

700. NOTA. Ad ipſum obtinendum uſurpari poteſt polygonum regulare circulo *abdra* circumſcriptum, cujus radius datus eſt (*fig.*69).

Patet, perimetrum *polygoni* hujus *circumſcripti* multiplicatis lateribus tandem ad ſenſum in inſcriptam peripheriam caſuram. Latus quodvis M*b*N polygoni regularis circumſcripti convertitur in duas tangentes *b*M, *b*N. Quum vero omnium arcuum tangentes inveniantur (723); inveniri poteſt latus polygoni circumſcripti quorumcumque laterum, quorum ſumma erit polygoni perimeter.

Comparata deinde ratione radii ad *perimetrum circumſcriptam*, quæ vera major eſt, & ratione ejuſdem radii ad *perimetrum inſcriptam*, quæ vera minor eſt, ſumma præciſione definiri poterit, non fortaſſe quænam ſit vera ratio, ſed intra quos terminos contineatur *vera ratio* radii, & diametri ad peripheriam.

Archimedes hanc rationem quærens uſus eſt tantum polygonis inſcriptis, & circumſcriptis laterum 96. Metius, & Ludolphus van Ceulen polygonis uſi ſunt multo plurium laterum; unde propinquiorem peripheriæ polygoni perimetrum habuerunt; adeoque & propinquiorem veræ rationem radii ad peripheriam aſſequuti ſunt (479).

PA-

§. II.

USUS SINUUM.

THEOREMA.

701. **I***N quovis triangulo ſinus angulorum ſunt oppoſitis lateribus proportionales* (*fig.* 95).

DEMONSTRATIO. Dimidia ſunt toti proportionalia. Atqui ſinus angulorum ſunt dimidia laterum oppoſitorum. Si enim triangulum quodvis ABC circulo inſcribatur; tria latera fiunt tres chordæ, quarum dimidia ſunt ſinus angulorum oppoſitorum (639). Ergo ſinus anguli A eſt dimidium chordæ BC: ſinus anguli C dimidium chordæ AB: ſinus anguli B dimidium chordæ AB. Ergo quilibet ſinus eſt lateri oppoſito proportionalis. Q. E. D.

PROBLEMA I.

702. *Datis in triangulo quovis ABC duobus angulis, & latere duo alia latera invenire* (*fig.* 95).

SOLUTIO I. Datis duobus angulis habetur tertius, ſupplementum ad 180°. (387).

II. Noto latere quovis BC, & tribus angulis, innoteſcet latus AC hac proportione: ſinus notus anguli *a*, ſeu brevius S-A, eſt ad latus oppoſitum notum BC, ut ſinus notus anguli B ad latus oppoſitum C ignotum. Latus quoque AB hac alia proportione innoteſcet; ſinus notus anguli A eſt ad latus oppoſitum notum BC, ut ſinus notus anguli C ad latus oppoſitum AB ignotum (701). Proportiones, in quibus ſinus ſunt, ita ſcribuntur

S A:

S-A : BC :: S-B : AC ; vel *alternando* S-A : S-B :: BC : AC
S-A : BC :: S-C : AB ; vel *alternando* S-A : S-C :: BC : AB

III. Si ſupponatur angulus B 45°, 24′; & angulus C 71°, 42′; angulus A ignotus erit 62°, 54′. Si quoque ſupponatur latus notum BC hexapedarum 2160; ſumptis ſinubus ex tabulis prima proportio S-A : BC :: S-B : AC ad hanc redibit; 89021 : 2160 :: 94943 : *x*.

Primus terminus 89021 eſt ſinus anguli A: ſecundus 2160 eſt latus BC; tertius 94943 eſt ſinus anguli C: quartus *x* eſt latus AB ignotum per regulam auream inquirendum. Hujus ope quotiens habetur ferme 2304. Quare latus AB hexapedas ferme 2304 longum eſt. Hinc apparet quid agendum, ut alterum latus AC inveniatur. In tabulis notæ poſt punctum poſitæ negliguntur.

703. NOTA. Si ex tribus angulis unus eſſet obtuſus, puta 125°, 30′, angulus hic in tabulis non inveniretur. Ut hujus anguli ſinus habeatur, ejus ſupplementum quærendum eſt, quod eſt angulus 54°, 30′; & hujus ſinus ſumendus qui idem eſt ſinus utriuſque anguli, t alibi oſtendimus (636).

In proportione igitur ponetur ſinus anguli 54°, 30′ pro angulo 125°, 30′; & methodus æque dabit rationem laterum in partibus radii circuli triangulo circumſcripti, adeoque & in partibus unius ex lateribus notis trianguli.

Exemplum (*fig.* 96): Ponamus, in triangulo CAB angulum A eſſe 125°, 30′. Angulus C ſit 26°, 46′; baſis vero, ſeu latus notum AB hexapedarum 200. Habebitur proportio; S C : AB :: S-A : CB; vel notis arithemeticis; 35456 : 200 : 81412 : *x* (691). Diviſo mediorum producto per primum extremum habebitur quotiens exprimens latus ignotum CB.

PRO-

PROBLEMA II.

704. *Aream trianguli, cujus tria latera, & tres anguli innoteſcant, invenire.*

SOLUTIO I. Si triangulum ſit rectangulum (*fig.* 83); latera AB, BC angulum rectum efficientia ſunt hujus trianguli baſis, & altitudo; alteram in alterius dimidium ducito: productum erit area quæſita (448).

II. Si triangulum non ſit (*fig.* 98), a vertice majoris anguli duc BD ad oppoſitum latus perpendicularem; hæc triangulum datum dividet in duo triangula rectangula. Hujus BD valorem invenies hac analogia. S-D : AB :: S-A : BD. Notis perpendiculari BD, & baſi AC, alteram in alterius dimidiam ducito: productum erit area quæſita.

Facile noſces quinam ſit major angulus trianguli, cujus latera nota ſint; major enim angulus majori lateri opponitur (389). Si triangulum ſit ęquilaterum, perpendicularis ab angulo quovis in oppoſitum latus demitti poteſt.

PROBLEMA III.

705. *Datis duobus trianguli lateribus, & angulo comprehenſo, tertium latus invenire.*

SOLUTIO. Angulus datus lateribus datis comprehenſus vel rectus eſt, vel acutus, vel obtuſus.

I. *Si rectus ſit* (*fig.* 83), latus oppoſitum ignotum eſt hypothenuſa, cujus quadratum æquale eſt duobus laterum datorum quadratis (517). Ex ſumma igitur horum quadratorum AB, BC radix extracta dabit latus quæſitum AC.

II. *Si ſit acutus* (*fig.* 98), a majore angulo ignoto demitte perpendicularem BD in latus oppoſitum: habebis triangulum rectangulum BDA cu-

cujus latus, ſeu perpendicularis BD innoteſcet hac proportione, cujus tres primi termini noti ſunt; S-D : AB :: S-A : BD.

Jam ſi ex quadrato hypothenuſæ BA dematur quadratum lateris BD, reſiduum erit quadratum ſegmenti A D, cujus radix erit latus A D.

Notum eſt itaque ſegmentum AD, & latus AC ex hypotheſi; ſi ergo ab AC auferas AD, remanet DC nota. In triangulo rectangulo B DC nota ſunt igitur latera DC, BD. Suorum quadratorum ſumma æqualis eſt quadrato hypothenuſæ BC; extracta igitur radice innoteſcet latus BC.

III. *Si ſit obtuſus*, (*fig.*96); produc BA donec C D illi ſit perpendicularis. Jam vero in triangulo rectangulo A C D datum eſt latus A C, angulus D rectus notus eſt, tum, & angulus DAC dati anguli BAC ſupplementum (342): adeoque, & angulus D C A ſupplementum ad duos rectos; ergo & latera DA, DC innoteſcent (702).

Si modo addam latus inventum D A lateri dato B A; innoteſcet latus B D. Quare in triangulo rectangulo D B C nota ſunt latera BD, DC; adeoque, & hypothenuſa BC, ex dictis in primo caſu hujus problematis.

T H E O R E M A IV.

706. *Datis duobus trianguli lateribus, & angulo comprehenſo trianguli aream invenire.*

SOLUTIO I. In primo caſu (705) habetur altitudo AB, & baſis BC; ergo & area, quæ eſt productum unius in dimidiam alteram (*fig.* 83).

II. In ſecundo caſu habetur baſis data AC, & inventa eſt altitudo BD; ergo inveniretur area (*fig.* 98).

III. In tertio caſu (*fig.* 96), ducto latere A B ſum-

B ſumpto tamquam baſi in dimidiam perpendicularem inventam CD habebitur area trianguli ACB (448. II).

PROBLEMA V.

707. *Datis trianguli lateribus, & angulo reliquos angulos invenire* (*fig.* 96).

SOLUTIO. Sit triangulum quodvis ACB, cujus nota latera, & angulus quivis A. Sit angulus A 125°: latus AB hexapedarum 1000; AC 1850; CB 2428. Quum angulus obtuſus A proprium ſinum non habeat, erit ejus ſinus ſinus ſui ſupplementi, anguli ſcilicet 55° 656).

I. Quum ſinus ſint lateribus oppoſitis proportionales, etiam latera ſunt ſinubus angulorum oppoſitorum proportionalia. Habebis igitur has proportiones, unde ſinus ignoti angulorum C, vel B innoteſcant.

S-C : AB :: S-A : CB : ſive; x : 1000 :: 70711 : 2428
S-B : AB :: S-A : CB, ſive, x : 1850 :: 70711 : 2428

Quare diviſo producto mediorum per extremum notum, quotiens erit ſinus anguli ignoti.

II. Nota, ſinus angulorum in tabulis creſcere a zero ad 10000000: Quare in hac ſerie creſcente quotiens inventum hoc, ſeu *ſinus inventus* erit angulus quæſitus,

Exemplum. Quotiens, ſeu ſinus anguli ignoti C quum ſit 17168 cum fractione, quæ negligitur invenies in tabulis numerum hunc proximum eſſe numero 17164, ſinui angulo 9°, 53′ (661). Quare angulus C erit 9°, 53′, addita minuti fractione, quæ negligitur aut proxime æſtimatur.

III. Nota quoque, invento alterutro angulo C, eſt alterum B innoteſcere; eſt enim ſupplementum dati A, & inventi C (386).

LO-

LOGARITHMI.

708. OBSERVATIO. Additio, & ſubductio operationes ſunt multiplicatione, & diviſione ſimpliciores, & faciliores. Multiplicatio quoque, & diviſio facilius peraguntur, quam elevatio, & extractio. Percommoda itaque eſſet methodus, qua omnes multiplicationum, & diviſionum ſpecies in additiones, & ſubductiones mutarentur; & ſupputationes multo facilius fierent.

Methodum hanc celebris Neperus Scotus invenit: artem hic tradidit numeros artificiales communibus ſubſtituendi, quibus per additionem, & ſubductionem ea fierent, quæ numeris communibus per multiplicationem, & diviſionem facienda eſſent. Numeri hi artificiales naturalibus ſuffecti ii ſunt, qui *logarithmi* vocantur; & eorum uſus *calculus logarithmicus* appellatur.

Logarithmi ſunt numeri arithmetice proportionales aliis numeris geometrice proportionalibus correſpondentes. Eorum ope multiplicationes, & diviſiones faciendæ ad invenienda latera, vel ad ſinus angulorum inveniendos in triangulo mutantur in ſimplices additiones, & ſupputatio facillime fit, & breviſſime.

Qui ſæpius magnas ſupputationes geometricas facere debent tabulis logarithmorum indigent. In theoria, quæ tabulas præcedit, logarithmorum principia, uſum, ea omnia, quæ ad hunc calculum, & ad hoc pulcherrimum recentioris matheſeos inventum ſpectant, prorſus invenient.

At alii ſunt plurimi, qui etſi geometriam, & aſtronomiam non pertractent, tamen mathematicis, & phyſicis diſciplinis eruditi, ſine logarithmis, poſſunt tabulis ſinuum ea omnia, quæ cupiunt, invenire, quum triangulum ali-

quod

quod methodo trigonometrica reſolvere velint: Aliquantulo plus operi immorabuntur; at a logarithmorum ſtudio liberabuntur.

§. III.

SINUS SECUNDORUM.

709. OBSERVATIO. Tabulæ ſinuum ſinus tantum graduum, & minutorum continent ſecunda non exhibent. Ut facilius hominum cognitiones augeantur, *methodum ſimplicem, & facilem* excogitavimus, qua harum tabularum ſinus in *ſinus ſecundorum* mutantur, quorum aliquando in aſtronomia indigemus.

Hujus transformationis principia, & methodum ſubjicimus, quam a nemine mutuati ſumus.

THEOREMA I.

710. *In circulo arcus duorum minutorum, & his minores æquivalenter cum chordis confunduntur* (*fig.* 69).

DEMONSTRATIO I. Si in eodem circulo inſcribantur ſucceſſive polygona regularia laterum 6, 12, 24, 48, 96, patet latera MN, MB, Mx eo magis ad arcum, quem ſubtendunt, accedere, quo plura polygonum habet latera. Ergo aucto ſucceſſive numero laterum polygoni inſcripti eo devenietur, ut latera Mx polygoni fiant æquivalenter æqualia arcubus Mx quos ſubtendunt, ita, ut ab his arcubus non niſi quantitate differant infinite minima, adeoque ſine errore ſenſibili negligenda.

Exemplum. Chorda MB eſt latus dodecagoni: chorda Mx eſt latus polygoni 24 laterum; chorda arcus $\frac{1}{4}$ Mx erit latus polygoni 96 laterum. Atqui ſi chorda Mx videtur jam in ar-

cum

cum cadere, chorda arcus quater minoris minima tantum quantitate a ſuo arcu differet; adeoque ſine ſenſibili errore chorda, & arcus promiſcue ſumi poterunt.

II. Archimedes rationem quærens diametri ad circuli peripheriam (663), invenit, polygonum regulare 96 laterum circulo inſcriptum jam æquivalenter cum arcubus, quos latera ſubtendunt, confundi; quare arcuum, & chordarum differentia jam ſatis parva eſt, ut in calculo negligi poſſit, quum peripheriæ ſatis magnæ non ſunt.

Si quæratur chorda dimidii arcus ſubtenſi a latere polygoni 96 laterum, invenietur (657), chordam hanc bis ſumptam minimum quid excedere chordam arcus totius. Si enim hujus polygoni latus eſt unius hexapedæ, duo latera, quæ eundem arcum ſubtendent in polygono duplum laterum numerum habente, ſimul ſumpta erunt longa hexapedam, & ferme $\frac{1}{3458}$ hexapedæ, nempe nec $\frac{1}{4}$ lineæ.

III. Latus polygoni regularis 96 laterum eſt chorda arcus 3°, 45′. Si ergo ita jam chorda hæc in arcum cadit æquivalenter, ut ambo promiſcue ſumi poſſint, potiori jure chorda arcui multo propinquior, æquivalenter in arcum cadet; eſt enim latus polygoni regularis laterum 10800 circulo inſcripti. Q. E. D.

711. COROLLARIUM. *In circulo arcus 2′, & his minores æquivalenter cum ſinubus confunduntur ita, ut ſinus, & arcus promiſcue ſumi poſſint.*

DEMONSTRATIO I. In circulo ſinus 1′ eſt dimidia chorda arcus 2′ (639). Atqui chorda arcus 2′ æquivalenter cum arcu confunditur, ut modo oſtenſum eſt; ergo chordæ hujus dimidium, quæ eſt ſinus arcus 1′, ipſa quoque æquivalenter cum arcu confunditur ita, ut ſinus, & arcus promiſcue ſumi poſſint.

II.

II. In tabulis ſinuum arcus omnes 12 minutis minores rigida ſupputatione inventi ſunt jam inter ſe ut arcus; exempli gratia ſinus arcus 2′ eſt ad ſinum arcus 4′, ut arcus 2′ ad arcum 4′; atque ita porro uſque ad arcum 12′, poſtea ſinus rationem arcuum non ſequuntur (604). Ergo ſinus potiori jure erunt ut arcus in arcubus minoribus arcu unius minuti, nempe in arcubus ſecundorum, & tertiorum.

Habebitur ergo proportio. Sinus arcus unius minuti ad ſinum arcus 30″; ut arcus unius minuti ad arcum 30″; ut arcus 30′ ad arcum 15″; atque in porro (*fig.* 94).

III. Si arcus GA ſit 1′, vel minor, linea AG eſt ad ſenſum recta. Tunc triangula GHA, *nm*A ſunt ſimilia. Ergo; GH:*nm*::GA:*n*A; atque ita de ceteris. Q. E. D.

712. NOTA. Proportio hæc omnino exacta geometrice non eſt; arcus enim unius minuti ſinum ſuum excedit minima quantitate; atque hic exceſſus eſt aliquantulum proportionaliter major exceſſu arcus 30″ ſupra ſuum ſinum, qui magis ad arcum accedit. At perfectæ rationis defectus quum quid minimum ſit, & in partibus radii inaſſignabile, nullo ſenſibilis erroris metu negligi poteſt (238). Quare proportio in praxi accuratiſſima cenſeri poteſt.

Dixi perfectæ rationis defectum in hac analogia minimum eſſe, & in partibus radii inaſſignabile. Poſito enim radio 10000000, ſinus 1′ bis ſumptus eſt ferme partium radii 5818, ut, & ſinus 2′: hic bis ſumptus eſt ferme 11636 partium radii, ut & ſinus 4′. Ergo in ſinubus omnibus ab 1′ ad 12′ defectus proportionis non eſt $\frac{1}{10000000}$ radii. Si enim eſſet, ſinus 1′ bis ſumptus ſaltem unitate ſinum 2′ excederet; & hic bis ſumptus ſaltem unitate excederet ſinum 4′.

Si ergo perfectæ accurationis defectus in hac

pro-

proportione minor $\frac{1}{10000000}$ radii, in partibus radii aſſignari nequit in arcubus omnibus infra 12′; multo minus in partibus radii aſſignari poterit in arcubus arcu unius minuti minoribus; veluti in arcubus ſecundorum, & tertiorum. Semper igitur in his arcubus ſinus & arcus promiſcue ſumi poterunt nullo erroris metu in partibus radii aſſignabilis.

THEOREMA II.

713. *Idem numerus nullitatum omnibus ſinubus addi poteſt ſalva eorum ratione.*

DEMONSTRATIO. Nullitates ſinubus addere eſt eos per datum numerum multiplicare. E. gr.; unum zero addere omnibus ſinubus eſt illos omnes per 10 multiplicare; duos, per 100; tres, per 1000; atque ita porro (42). At quum plures numeri in eandem quantitatem ducuntur, eorum ratio non mutatur: producta inter ſe ſunt, ut erant radices, ſeu numeri ante multiplicationem (164).

Exemplum. In tabulis ſinus totus eſt 10000000; ſinus 30° eſt 5000000: alter eſt alterius duplus: adde omnibus ſinubus duo zero: perinde eſt, ac ſi in 100 duceres. Sinus totus erit 1000000000; ſinus 30° erit 500000000; adhuc alter alterius duplum erit; & eorum ratio perſeverat. Idem dicas de ceteris ſinubus. Q. E. D.

714. COROLLARIUM. Ex his theorematibus ſequitur, *habitum iri ſinus ſecundorum, ſuppoſitis omnibus ſinubus acutis duobus zero, & ſinum unius minuti dividendo in partes ſecundis analogas.*

Exemplum. Sinus arcus *unius minuti* quum ſit 290900, hujus numeri dimidium erit ſinus arcus 30″ (711); $\frac{1}{4}$ hujus numeri erit ſinus arcus 15″; $\frac{1}{60}$ hujus numeri erit ſinus arcus *u-*

nius

nius ſecundi; $\frac{1}{120}$ hujus numeri erit ſinus arcus dimidii ſecundi, ſeu 30‴; atque ita porro. Q. E. D.

THEOREMA III.

715. *Si idem numerus unitatum a duobus numeris inæqualibus auferatur; proportionaliter magis minuitur minor numerus, quam major.*

DEMONSTRATIO. Sint numeri inæquales 20, & 20000, qui ſunt ut 1 ad 1000. Si ab utroque demas 10 unitates, reſidua erunt 10, & 19990. Primus dimidium ſui valoris amiſerit, alter ſui partem tantum bis milleſimam. Q. E. D.

THEOREMA IV.

716. *Quum duorum numerorum differentia maxima eſt, ſi datus numerus unitatum a majore auferatur, minore intacto; eadem ratio proxime inter illos perſeverat.*

DEMONSTRATIO. Sint duo numeri 2909, qui eſt ſinus unius minuti, & 29090000, qui decies millies major eſt. Horum ratio eſt 1 ad 10000.

Si a majore auferantur 50 unitates, reſiduum erit 29089950. Atqui ratio 2909 ad 2908950, quæ invenietur utrumque numerum dividendo ſeorſim per 2909, eſt 1 ad $9999 + \frac{2856}{2909}$ proxime æqualis rationi 1 ad 10000. Quare duæ hæ rationes veluti infinite parum invicem differunt; & ſine errore ſenſibili uterque numerus promiſcue uſurpari poteſt. Q. E. D.

PRO-

P R O B L E M A I.

717. *Tabulam ſinuum ſecundorum conſtruere.*

SOLUTIO I. In tabulis, in quibus ſinus totus ſit 10000000 ſumo ſinum arcus unius minuti, qui eſt 2909 partium, quarum quælibet eſt $\frac{1}{10000000}$ radii.

II. Suppono, ſinus omnes, ut ſunt in tabulis, augeri duobus zero poſt duas poſtremas notas. Hi ita aucti primam rationem inter ſe ſervabunt.

III. Sinum unius minuti auctum duobus zero 290900 divido cum proportione ad ſuum arcum. Dimidius hic ſinus dat ſinum arcus 30″; hujus $\frac{1}{4}$ dat ſinum arcus 15″; $\frac{1}{60}$ hujus ſinus $\frac{290900}{60}$ dat ſinum acus *unius ſecundi*; $\frac{290900}{120}$ dat ſinum arcus 30‴; atque ita porro (714). Quare ſucceſſive dividendo 290900 per 2, 4, 60, 120 habebo ſinus 30″, 15″, 1″, 30‴; atque ita porro. Sinus hi erunt proportionales ſinubus tabularum auctis duobus zero.

IV. Juxta evidentia hæc principia conſtructa fuit tabula ſequens ſinuum ſecundorum ab uno ad ſexaginta, quæ ſunt unum minutum. In hac tabula ſinus totus ſupponitur partium 1000000000. Poſitis ſinubus omnibus tabularum auctis duobus zero, earum ſinus totus erit 1000000000. In hoc problemate, & in ſequente cujuſque ſinus notæ omnes ſumuntur, etiam quæ punctum interjectum ſequuntur, & poſt has duo zero adduntur.

TABULA SINUUM SECUNDORUM.

Secunda.	Sinus.	Secunda.	Sinus.
1	4848.	36	174540.
2	9697.	37	179388.
3	14545.	38	184237.
4	19393.	39	189085.
5	24242.	40	193933.
6	29090.	41	198782.
7	33938.	42	203630.
8	38787.	43	208478.
9	43635.	44	213327.
10	48483.	45	218175.
11	53332.	46	223023.
12	58180.	47	227872.
13	63028.	48	232720.
14	67877.	49	237568.
15	72725.	50	242417.
16	77573.	51	247265.
17	82422.	52	252113.
18	87270.	53	256962.
19	92118.	54	261810.
20	96967.	55	266658.
21	101815.	56	271507.
22	106663.	57	276355.
23	111512.	58	281203.
24	116360.	59	286052.
25	121208.	60	290900.
26	126057.		
27	130905.		
28	135753.		
29	140602.		
30	145450.		
31	150298.		
32	155147.		
33	159995.		
34	164843.		
35	169692.		

Sinus 2 minutorum, 581800.

Sinus 85 *graduum*, 996194700.

Sinus totus, 1000000000.

Sinus 30 *tertiorum*, 2424.

PROBLEMA II.

718. *Dato latere, angulo aliquot ſecundorum & alio angulo, reſolvere triangulum (fig. 102).*

SOLUTIO. Ploblema inſervit præcipue angulis parallacticis reſolvendis, de quibus in noſtra aſtronomia, & diſtantiæ nonnullorum planetarum a terra inveniendæ (*Phy.* 1221).

Sit triangulum ACB, cujus noti ſint anguli A, & B, & latus AC, quod ſuppono leucarum communium Gallicarum 1430. Angulus A rectus ſit, & angulus B 10′, 30″. Angulus C, ſupplementum ad duos rectos erit 89°, 59′, 49″, 30‴ (387). Ut unum ex ignotis lateribus, puta BC, inveniatur, fiat proportio, ſinus notus anguli B eſt ad latus oppoſitum, & notum AC, ut ſinus notus anguli A ad latus oppoſitum ignotum CB (702).

I. Ut habeatur ſinus anguli B, in tabula præcedente capiatur ſinus 10″ addito dimidio ſinu 1″. Numeri 48483 + 2424 ſimul additi erunt ſinus anguli B, qui eſt partium radii 50907.

II. Sinus anguli recti A eſt 100000000 juxta tabulam præcedentem. Quare habitis ſinubus angulorum B, & A fiet in numeris indicata proportio; 50907 : 1430 :: 100000000 : x.

Diviſo producto mediorum 143000000000 per primum extremum, emerget quotiens 28090439 cum fractione negligenda exprimens latus CB, ſeu numerum leucarum communium, quas continet. Hæc methodus eſt, qua inveniri poteſt diſtantia alicujus aſtri a centro terræ, puta, ſolis, quum innoteſcit angulus B, qui eſt angulus ſuæ parallaxeos horizontalis. (*Phyſ.* 1216, & 1221).

III. Ad inveniendum alterum latus BA fiat proportio inter ſinus, & latera. S B : AC :: S.C : AB. Ad habendum ſinum C capiatur in tabulis ſinus 89°, 59′, & hujus ſinus notis addan-

tur duo zero; erit hic 999999900. Ut hic ſit accurate ſinus 89°, 59′, 49″, 30‴ deſunt illi ferme 50 unitates. At ſuperſedere poſſumus ab his unitatibus ſinui huic, & illi ſimilibus addendis; exiguus enim hic unitatum numerus, qui eſt infra 100, quum non valeat duas poſtrema notas, non niſi quantitate minima immutat rationem ſinus 50907 ad ſinum 999999900, cui hic comparatur (716). Sumi ergo poteſt ſinus 999999900 pro accurato ſinu anguli C, de quo hic agitur.

Quum itaque habeantur ſinus angulorum B, & C, inſtituetur in numeris indicata proportio; 50907 : 1430 :: 999999900 : x. Diviſo mediorum producto per primum extremum, emerget quotiens exprimens latus A C, quod eſt diſtantia aſtri B a puncto A telluris. Hinc apparet quid agendum, ſi angulus A non rectus eſſet, ut illum ſuppoſuimus, ſed acutus, aut obtuſus.

719. NOTA. In reſolutione hujus trianguli certi eſſemus, inventuros accuratiſſime latera CB, AB, ſi anguli dati, & latus datum accurate haberentur. Quum tamen nunquam certi eſſe poſſimus, nos obtinere accuratiſſime angulos minutorum, & ſecundorum, ut neque latus AC; fruſtra majorem curam in ſupputationibus impenderemus, quæ non niſi quid proximum tum theorice, tum practice præbere poſſunt.

§. IV.

TANGENTES, ET SECANTES.

720. DEFINITIO I. T*angens arcus*, aut anguli dicitur linea A N radio B A perpendicularis per unam arcus extremitatem tranſeunti, & alio radio producto B N terminata per aliam

aliam arcus extremitatem *n* tranſeunte (*fig.* 104).

Quare linea NA eſt tangens anguli AB*n*, & arcus A*n*. Ita linea MA eſt tangens anguli AB*m*, & arcus A*m*.

721. DEFINITIO II. *Secans arcus* dicitur radius productus uſque ad occurſum tangentis. Quare BN eſt ſecans arcus A*m*, & anguli ABM.

THEOREMA.

722. Tangens eſt ad ſinum totum, ut ſinus ſui anguli ad ſinum anguli complementi (*fig.* 104).

DEMONSTRATIO. Sit triangulum quodvis NBA effectum a radio AB, a ſecante BN, & a tangente NA. Hoc triangulum eſt rectangulum ad A, & ejus ſinus eſt *na*.

I. Habentur igitur duo triangula ſimilia AN B, & *an*B. Angulus enim ABN eſt communis; & anguli NAB, *na*B effecti alter a tangente NA, alter a ſinu *na* radio BA perpendicularibus, recti ſunt. Ergo habemus; NA:AB:: *na*:*a*B.

Atqui *a* B æqualis eſt coſinui *nb*, qui eſt ſinus anguli complementi NBD (637); ergo quoque; NA : AB:: *na*: *nb*.

At hæc proportio eſt enunciata in theoremate; ergo tangens ignota eſt ad ſinum totum notum, ut ſinus notus anguli ABN, quo intercipitur, ad ſinum notum anguli NB*b* complementi.

II. Patet, eandem demonſtrationem valere in triangulo ABM, cujus MA tangens eſt. Nam triangula MBA; *m*B*d* ſunt ſimilia, quum angulus MBA ſit communis, & anguli MAB, *md*B alter a tangente MA effectus, alter a ſinu *md* recti ſint. Q. E. D.

PROBLEMA I.

723. *Dato angulo quovis ejus tangentem invenire*.

SOLUTIO. Inſtitue analogiam theorematis præcedentis. Tangens ignota ad ſinum totum notum, ut ſinus notus anguli dati ad ſinum notum anguli complementi. Tres termini noti quartum dabunt, qui erit tangens quæſita.

I. Exemplum. *Ad inveniendam tangentem anguli*, ſeu arcus 10°, 25′; dic tangentem ignotam x. Sume ex tabulis ſinum totum 100000, ſinum anguli dati 18081, ſinum anguli complementi 98352, qui eſt 79°, 35′. Habebis; x: 100000 : 18081 : 98352.

Productum 1808100000 mediorum divide per ultimum extremum. Quotiens 18384 erit tangens anguli 10°, 25′. Hic duæ poſtremæ notæ poſt punctum negliguntur.

II. Si poſtremam hujus analogiæ rationem invertas, aliam analogiam habebis, a qua innoteſcat *tangens anguli complementi*; ſcilicet x: 100000 :: 98352 : 18081.

Productum 9835200000 mediorum divide per ultimum extremum. Quotiens 543966 erit tangens anguli 79°, 35′ in partibus radii.

PROBLEMA II.

724. *Data anguli tangente ſecantem invenire* (*fig.* 104).

SOLUTIO. In triangulis ABN, vel ABM ſecans BN, vel BM eſt hypothenuſa: triangula enim ſunt ad A rectangula*. Ergo quadratum ſecantis cujuſque BN eſt æquale quadratis tangentis NA, & radii BA (517): ergo ſumma horum quadratorum erit quadratum ſecantis: a ſumma extrahe radicem quadratam (129): erit hæc ſecans quæſita.

725. NO-

725. NOTA. Secantis uſus inter ceteros eſt in determinanda curva veræ libellæ infra apparentem, de qua alibi (434). Secans arcus minimi vix radium excedit; ſed quo arcus creſcit, eo magis creſcit ſecans. Secans anguli 60° eſt dupla radii; in angulo recto fit tangenti parallela, & infinita.

ARTICULUS II.

TRIGONOMETRIA SPHÆRICA.

726. OBSERVATIO. T*rigonometria ſphærica* ſcientia eſt, quæ docet calculo reſolvere triangula in ſphæræ ſuperficie formata, ſeu triangula, quorum latera ſunt arcus circuli maximi. Minores ſphæræ circuli in calculo trigonometrico locum non habent; ſive quia eorum radii radiis maximorum circulorum non ſunt æquales; ſive quia eorum plana eundem axem non neceſſario ſecant, nec per centrum tranſeunt, ut plana circulorum maximorum. De ſcientia hac ea tantum trademus, quæ geographiæ, & aſtronomiæ magis neceſſaria ſunt, & oſtendemus qua ratione trigonometria rectilinea in triangulis adhibeatur, quorum latus unum eſt arcus circuli maximi. At huc revocanda ſunt quæ de ſphæræ geneſi, & proprietatibus tradidimus (554, & 557); hoc enim eſt hujus articuli, & eorum, quæ ab eo pendent, prolegomenon.

I. In ſphæra tria præcipue triangulorum genera conſiderari poſſunt: rectilinea a duobus radiis, & chorda effecta: mixtilinea a duobus radiis, & arcu circuli maximi his radiis incluſo: ſphærica a tribus circulis maximis ſe

interſecantibus, ſive a tribus horum circulorum arcubus effecta.

In *triangulo rectilineo* vel in ſphæra, vel extra ſphæram ſumpto anguli & latera eaſdem proprietates habent, quas in longimetria, in planimetria, in trigonometria rectilinea tradidimus. Cujuslibet anguli rectilinei menſura eſt hiatus rectilineus duabus lineis interceptus, quibus efficitur. Hiſce triangulis nihil cum trigonometria ſphærica commune eſt.

In *triangulo mixtilineo* a duobus radiis, & arcu circuli maximi his incluſo effecto, menſura anguli mixtilinei eſt hiatus arcu, & radio interceptus.

In *triangulo ſphærico* a tribus arcubus circuli maximi effecto, exempli cauſa a meridiano, ab æquatore, & ab alio circulo maximo illos oblique ſecante, quilibet *angulus ſphæricus* menſuram habet hiatum duobus arcubus, quibus efficitur, interceptum.

II. *Ad ignotam ſphæræ diametrum inveniendam* in qua diverſos circulos deſcribere velis, ſphæram colloca inter duo plana ZO, YQ parallela, & ſphæræ contigua: planorum diſtantia erit ſphæræ diameter, diſtantia dimidia ſphæræ radius AC (*fig.* 86).

III. *Ad deſcribendum circulum maximum in ſphæra, cujus notus radius*, circino communi, & ſphæræ radio deſcribe in plano circulum APBRA. Erit hic æqualis circulo ſphæræ maximo. Circulum hunc quadrifariam divide duabus diametris invicem perpendicularibus AB, PR, & ab unius diametri extremitate A cape circino intervallum ad P alterius diametri extremitatem. Erit AP chorda arcus 90° circuli maximi.

Deinde circino cruribus recurvis, (qui dicitur *circinus ſphæricus*) cape in circulo in plano deſcripto intervallum æquale chordæ AP 90°; & hujus circini crure ſtatuto in aliquo pun-

puncto P ſeu dato, ſeu pro voluntate ſumpto, in ſphæra deſcribe peripheriam ABA: erit hæc circulus ſphæræ maximus. Punctum P, a quo circulus hic deſcriptus fuit, erit unus ex ſphæræ polis (*fig.* 86).

IV. *Ad circulum maximum alteri circulo maximo in ſphæra perpendicularem deſcribendum*; eodem circino, eodemque intervallo AP deſcribe ab aliquo puncto B ſeu dato, ſeu pro libito aſſumpto in circulo modo deſcripto alterum circulum. Hic PRP ubique gradibus 90 diſtabit a puncto, a quo deſcriptus fuit, & erit primo ABA perpendicularis.

Hinc intelliges qua ratione *quot libuerit circuli in ſphæra deſcribi poſſint* invicem perpendiculares, aut obliqui.

727. DEFINITIO I. *Axis maximi circuli* dicitur perpendicularis per centrum tranſiens, & utrinque radio æqualis (*fig.* 110).

I. Recta DCF eſt axis circuli ABA: recta ACB eſt axis circuli DFD: recta PCR eſt axis circuli MNM. Extrema axis ſunt *poli circuli*.

II. Axis DCF maximi circuli ABA eſt quoque axis omnium minorum circulorum parallelorum MRM; tranſit enim per centra omnia tum maximi circuli ABA, tum minorum parallelorum MRM in eadem ſphæra ſumptorum; quum vero ſit maximo circulo perpendicularis, & minoribus huic parallelis perpendicularis eſt.

III. *Planum circuli* eſt ejus area, ſeu ſuperficies plana profunditate carens peripheria circumſcripta. Quævis recta, quæ plura quam duo puncta contingat hujus ſuperficiei circularis, eſt in plano circuli.

728. DEFINITIO II. *Angulus ſphæricus* dicitur hiatus duobus arcubus interceptus circuli maximi ſe in ſphæra interſecantibus. Angulus hic aut rectus eſt, aut acutus, aut obtuſus (*fig.* 110).

I. *Angulus ſphæricus* A *v* D *rectus eſt* quum duo ejus latera producta ad 90 gradus ultra punctum interſectionis *v* arcum comprehendunt 90 graduum AMD circuli maximi.

II. Angulus ſphæricus A *m* M eſt acutus, quum ejus duo latera producta uſque ad 90 gradus ultra punctum interſectionis *m* arcum AM maximi circuli comprehendunt minorem 90 gradibus.

III. *Angulus ſphæricus* M *m* B *eſt obtuſus*, quum duo ejus latera uſque ad 90 gradus producta ultra punctum interſectionis *m* comprehendunt arcum MDB maximi circuli majorem 90 gradibus.

Generatim *quantitas anguli ſphærici* duobus circulis maximis ejuſdem ſphæræ intercepti eſt *breviſſima via circularis*, qua ab uno ad alterum pergi poſſit, a duobus analogis remotiſſimis punctis peripheriarum procedendo; nempe a duobus analogis punctis duorum arcuum indefinite productorum a communi interſectione arcuum diſtantibus gradus 90.

Quare quantitas arcus ſphærici A *n* M eſt arcus A M, poſitis punctis A, M diſtantibus gradus 90 a communi interſectione *n* duorum circulorum ABA, MNM.

T H E O R E M A I.

729. *Si duo maximi ejuſdem ſphæræ circuli ſunt invicem perpendiculares, axis unius eſt diameter alterius* (*fig.* 110).

DEMONSTRATIO. Sint ABA, DFD duo maximi circuli, quorum plana (523) ſint invicem perpendicularia. Ex definitionibus axis, & diametri DCF eſt diameter circuli DFD, & axis circuli ABA; & ACB eſt diameter circuli ABA, & axis circuli DFD. Idem de aliis quibuſque duobus maximis circulis invicem perpendicularibus demonſtrari poteſt. Q.E.D.

THEO-

THEOREMA II.

730. *Quum axis maximi circuli eſt diameter alterius maximi circuli, hi circuli ſunt invicem perpendiculares; & eorum poli diſtant 90 gradibus* (*fig.* 110).

DEMONSTRATIO. Sint circuli ABA, DFD; & axis DCF circuli ABA ſit in plano circuli DFD. Jam axis DCF circuli ABA eſt diameter circuli DFD; & reciproce. At hæ diametri ACB, DCF invicem perpendiculares exhibent ſuorum circulorum poſitiones. Si ergo diametri, & axes ſunt invicem perpendiculares, etiam plana ABA, DFD ſunt invicem perpendicularia Q. E. D.

THEOREMA III.

731. *Quum duo circuli maximi ſunt invicem inclinati, inclinationis menſura eſt arcus circuli maximi diſtans gradibus 90 a communi circulorum interſectione* (*fig.* 110).

DEMONSTRATIO. Sint circuli maximi ABA, MVM, quorum plana ſint invicem inclinata, & peripheriæ interſecentur in *m*, & *n*. Facile intelliges, angulum ſphæricum A*n*M, exempli gratia, eſſe æqualem angulo rectilineo, quem ad punctum interſectionis *n* efficerent duę tangentes arcuum *n*A, *n*M; & ad dimetiendum arcum duabus tangentibus interceptum in gradibus ęqualibus illis duorum circulorum æqualium, opus eſſe, ut hic arcus deſcriptus ſit a puncto interſectionis *n*, vel *m* radio æquale ſphæræ radio CA.

I. Patet, latera anguli ſphęrici A*m*M magis, magiſque divaricari uſque ad 90° in A, & M; ultra vero 90° magis magiſque invicem accedere uſque in *n*.

II. Patet quoque ſi circulus DFD circa ſuam

diametrum DCF convertatur, ſemiperipheriam DxvF inęqualiter primo ſecturam peripherias ABA, MNM; ſectio enim mr major erit ſectione mv.

Quum vero planum hoc converti pergens circa diametrum DCF pervenerit in ADBFA ad gradus 90 ab interſectionibus m, & n; tunc planum circulare tranſibit per polos PR, DF duorum circulorum ABA, MNM, & erit utrique circulo perpendiculare; axis enim circuli ADBFA erit diameter tum circuli ABA, tum circuli MNM (730).

Quare arcus MA maximi circuli ADBFA ambobus circulis ABA, MNM perpendicularis verum hiatum anguli ſphærici MmA dimetietur: quod non fieret, ſi arcus AM eſſet alteri circulo perpendicularis, alteri obliquus, ſeu ambobus inæqualiter obliquus (728). Q. E. D.

COROLLARIA.

732. COROLLARIUM I. *Menſura ergo arcus duobus circulis intercepti eſt arcus tertii circuli illis duobus perpendicularis (fig. 110).*

EXPLICATIO. I. Quum duo circuli ABA, MRM ęquales, vel inæquales ſunt paralleli, menſura arcus illos ſeparantis eſt arcus quivis xv interceptus circuli maximi DFD per eorum communes polos tranſeuntis: hic enim circulus per polos tranſiens D, F circulis parallelis ABA MRM communes, utrique circulo parallelo eſt perpendicularis.

II. Quum duo circuli maximi ſunt invicem obliqui, menſura arcus illos ſeparantis eſt arcus ab illis interceptus circuli maximi per eorum quatuor polos tranſeuntis; hic enim arcus eorum planis interceptus, & utrique plano perpendicularis, horum planorum veram diſtantiam me-

metitur. Arcus hic ſemper diſtat a duabus interſectionibus 90 gradus.

III. In ſphæra cæleſti, & terreſtri meridiani omnes ſunt *æquatori perpendiculares*; axis enim cujuſque meridiani eſt diameter æquatoris. Meridiani omnes ſunt *ecliptica obliqui*, exceptis duobus meridianis diſtantibus gradus 90 a punctis interſectionis eclipticę, & æquatoris: horum enim meridianorum axis duntaxat eſt diameter eclipticæ in his duobus punctis dumtaxat in æquatorem cadentis. Meridiani omnes quum æquatorem perpendiculariter ſecent, perpendiculariter quoque ſecant *circulos omnes æquatori parallelos*; hi omnes enim cum æquatore axem communem habent.

733. COROLLARIUM II. *Spatium duobus circulis parallelis ABA, MRM interceptum eſt zona, cujus latitudo eſt arcus circuli maximi duobus iis circulis perpendicularis*. Hic enim arcus MA, vel RB perpendiculariter metitur breviſſimam diſtantiam circularem intercedentem inter circulum MRM, & huic parallelum ABA.

734. COROLLARIUM III. Superficies zonæ eſt productum peripheriæ maximi circuli in partem axis duobus circulis parallelis interceptam. Eſt enim zona hæc ſuperficie æqualis ſuperficiei partis ſibi analogæ cylindri ſphæræ circumſcripti (576).

HYPOTHESIS, SIVE APPLICATIO.

735. *Si ſphæra ADBFA ſit globus terreſtris, vel cæleſtis (fig. 110)*:

I. Punctum C erit *centrum* terræ, & *centrum ſenſibile* univerſi. Ab hoc centro quot lubet mente duci poſſunt lineæ ad terrę ſuperficiem, vel ad firmamentum.

II. Si globus terreſtris, aut cæleſtis circa lineam DCF convertantur: erit hęc *axis* terræ,

ræ, & mundi; & puncta D, F erunt *poli*. Circulus ABA erit *æquator*: circulus MRM erit *circulus* æquatori *parallelus*: ſpatium MRBA erit *zona*: linea recta mCn erit communis interſectio circulorum ABA, MNM, & ambos bifariam ſecabit: puncta m, n, in quibus horum circulorum peripheriæ ſe interſecant erunt *nodi*. Arcus MA, cujus extrema utrinque diſtant gradibus 90 a nodis m, n, eſt inclinationis horum circulorum menſura.

III. Duo radii CA, CM a centro ad extrema arcus MA ducti triangulum mixtilineum efficient ACM, cujus MS erit *ſinus rectus*, & SA *ſinus verſus*. Huic ergo triangulo adhiberi poterit tota theoria ſinuum, tangentium, & ſecantium a nobis tradita in trigonometria rectilinea.

PROBLEMA I.

736. *In cælo arcum ſphæricum duobus circulis parallelis interceptum metiri* (*fig.* 110).

SOLUTIO. Sint in cælo duo circuli paralleli ABA, MRM: metiri oporteat arcum MA, vel RB circuli ADBFA illis perpendicularis, ſeu cujus planum per eorum communes polos tranſit. Quum circuli hi ſint paralleli, patet arcum eorum peripheriis interceptum eſſe ubique æqualem. Quare arcus perpendicularis inter duo quævis puncta erit arcus perpendicularis duobus quibuſvis aliis punctis interceptus.

I. Ad hunc arcum dimetiendum, quadrans ingens aſtronomicus (421) ſtatuatur ita, ut ejus planum ſit planis circulorum parallelorum perpendiculare, ſive ut ad eorum polos directum ſit.

Exemplum. Si dimetiendus ſit arcus æquatore celeſti ABA, & circulo parallelo MRN interceptus; poſito quadrantis plano in plano me-

meridiani DAFBD dirigetur dioptra mobilis primo ad punctum A æquatoris, dein ad punctum M circuli paralleli; & diligenter in quadrante numerabuntur gradus, minuta, & ſecunda, quibus habebis menſuram anguli ACM duobus his circulis intercepti.

Quum enim radius terreſtris ſit infinite minimus diſtantię firmamenti comparatus (*Phy.* 1354.); quadrans in ſuperficie terræ ſitus perinde eſt, ac ſi in centro firmamenti ſtatueretur. In hac hypotheſi dioptra, & radius viſivus ab ea directus caderent in radios CA, CM; & anguli ACM menſura in quadrante (*fig.* 3) haberetur ex numero graduum, minutorum, & ſecundorum duabus dioptræ poſitionibus interceptorum.

II. Hic diligenter nota, *in aſtronomia ſæpius ſinus arcuum ſuorum locum occupare.* Ut hoc explicem ſuppono, planetam A deſcribere orbitam ADFHA circa centrum C; & me eſſe in O ad ejus motum obſervandum (*fig.* 121).

Planeta A diſcedens a ſinea ACO centrorum deſcribet arcum AB, quem in ſe metiri non poſſum: ille mihi non videbitur in B diſtare a linea centrorum niſi quantitate BS, quę eſt ſinus arcus AB a planeta deſcripti.

Quum planeta percurrerit arcum ABD graduum 90 erit ergo in maxima diſtantia a linea CO centrorum; atque hanc diſtantiam metiar linea CD, quę eſt ſinus anguli recti ACD. Punctum D erit maxima ejus diſtantia a linea centrorum, & ſui reditus initium. Poſtea perget ille in E, ubi ejus diſtantia apparens a linea centrorum erit ſinus ET; deinde perget in F, ubi ejus diſtantia a linea centrorum erit = o.

Tranſibit deinde planeta in G, in H, in K; & ejus quoque diſtantiam a linea centrorum metiar per ſinus GT, HC, KS, qui erunt

in

in directione præcedentibus oppoſita; quare ſi primi ſinus ſunt poſitivi, hi erunt negativi. Si planeta in D eſt ad orientem reſpectu lineæ AOC centrorum in H; idem planeta erit ad occidentem reſpectu ejuſdem lineę centrorum.

PROBLEMA II.

737. *Arcum ſphæricum duobus circulis ſe interſecantibus interceptum in cælo metiri* (*Fig.* 110).

SOLUTIO. Arcus dimetiendus intercipiatur circulis ABA, MNM, quorum poli ſunt DF, PR. Quadrantem ita colloca, ut ejus planum indefinite productum tranſeat per quatuor polos DF, PR circulorum, quorum inclinatio capienda eſt.

I. Radius indefinitus, qui ſupra quadrantis planum converteretur; deſcriberet circulum ADBFA circulis, quorum arcus capiendus eſt, perpendicularem; ejus enim planum per horum circulorum polos tranſiret (730). Quare ſi ex puncto C in ſuperficie terrę dirigatur dioptra, & radius viſivus in M; angulus MCA quadrante dimenſus dabit numerum graduum, minutorum, & ſecundorum arcus MA, ut in prçcedente problemate (*fig.* 3).

Facile intelliges pluribus modis hos arcus capi poſſe. Hic dumtaxat oſtendere volumus, menſuram hanc obtineri poſſe modum unum eam capiendi indicantes.

TRA-

TRACTATUS V.

INTRODUCTIO AD SECTIONES CONICAS.

THeoria ſectionum conicarum a Platone, aut in ejus ſchola inventa ab Archimede, & ab Apollonio Pergæo amplior, atque perfectior effecta præclariſſima eſt matheſeos pars, qua ab elementis excedere incipit. Nonnulla tantum præcipua de his trademus, quæ ſcilicet ad phyſicæ phænomena, quibus omnes erudiri cupiunt, intelligenda omnino neceſſaria ſunt. Qui hac in re plura quærent, ea in pleriſque operibus invenient, in quibus de hiſce ſectionibus fuſius agitur.

SECTIONUM CONICARUM NOTIO GENERICA.

738. OBSERVATIO. *Sectiones conicæ* dicuntur figuræ quædam planæ curvis lineis terminatæ, & ſectioni ſimiles, quæ a plano (522) in cono recto, aut obliquo fierent diverſis directionibus (*Fig.* 107).

I. Exemplum. Si planum conum ſecans rectum, aut obliquuum BAD ſectionem incipit a vertice A; ſectio hæc ſive per centrum baſeos circularis coni tranſeat, ſive non, erit *triangulum* BAD.

II. Si plani ſectio in cono ſit coni baſi parallela; ſectio erit *circulus* major, aut minor *bdb*, VXV, *vxv* (*Fig.* 107, 112).

In circulo ADXDA conſiderato ut ſectione conica, ſeu reſpectu ſectionum conicarum (*Fig.* 111.); vocatur *axis* diameter quævis AX; *vertex* extremitas quævis axis A; vocantur *or-*

ordinatæ rectæ axi perpendiculares, ut MB, MK, MG, MH: *abſciſſæ* axis partes AB, AK, AG, AH ſumptæ ab axis vertice uſque ad analogas ordinatas; abſciſſę dicuntur, quod ſint partes axis ab ordinatis abſciſſæ.

In circulo, & in tribus ſectionibus conicis, de quibus acturi ſumus, ordinatæ curvarum paſſim indicantur per *x*, abſciſſæ per *y*; eſt enim hæc earum expreſſio algebrica; quare familiariter dicere ſolemus: *x*, & *y* alicujus curvæ, ut ejus ordinatas, & abſciſſas quaſvis indicemus.

Sectio triangularis, & circularis, quarum proprietates ex geometria elementari innoteſcunt, inter conicas ſectiones a geometris non recenſentur: nomen hoc tribus ſequentibus tantum eſt reſervatum. Notæ trianguli, & circuli proprietates in hac theoria adhibentur dumtaxat ad trium reliquarum ſectionum proprietates detegendas: hæ vero ſunt Parabola, Ellipſis, & Hyperbola, quarum geneſim explicandam aggredimur.

SECTIONES CONICÆ IN CONO.

III. Si planum coni recti, aut obliqui ſectionem ineat extra verticem in puncto quovis S, & ſectio fiat *alteri laterum AB parallela*, ſeu plano lateri AB contiguo, ſectio hæc MSM eſt *parabola*; & ſi conus BAD ſupponatur productus in infinitum ſervata eadem divaricatione BAD; ſectio hæc parabolica MSM in infinitum producta nunquam a cono exibit (*Fig.* 107).

Curva MSM unicum axem habet SN, qui in infinitum produci poteſt ſemper curvam bifariam dividendo. Huic curvæ ordinatæ axi SN perpendiculares ſunt *nm*, NM. Abſciſſæ hujus curvę ſumuntur in axe ab ejus vertice ad analogam ordinatam: hæ ſunt S*n*, SN.

IV. Si

IV. Si planum conum quemvis ſecans (*Fig.* 112), ſectionem incipiat extra verticem in puncto quovis E, & ſectio indefinite producta e cono exeat intacta baſi, nec ſit baſi parallela, ſectio erit ellipſis magis minuſve elongata EMRME (*Fig.* 112).

In hac curva RER habetur *axis major* ENR & *axis minor* majorem perpendiculariter ſecans. Ordinatę majori axi perpendiculares ſunt *mn*, MN. Abſciſſæ ab alterutro vertice E, vel R ad extremum majoris axis ſumuntur uſque ad occurſum ordinatę analogæ: hę ſunt E*n*, EN.

V. Si planum conum quemvis ſecans BAD (*fig.* 125), ſectionem incipiat extra verticem in puncto quovis H, & ſectio PHI ſit aut axi AX coni parallela, aut huic axi inclinata, quin alicui lateri AB, AD ſit parallela, ſectio IHP erit *hyperbola*; & ſi conus ſit infinitus, ſectio hæc in infinitum producta nunquam e cono exibit (*Fig.* 125).

Si ad verticem A coni BAD ſupponatur poſitus alter conus ZAV, qui eundem axem XA*x* habeat cum primo; planum efficiens ſectionem HIPH infinite productum aliam ſimilem ſectionem *hiph* efficiet, quæ dicitur *hyperbola conjugata*.

In quavis hyperbola IHP duo ſunt axes ambo extra curvam. Vocatur *axis primus* linea OH jungens vertices hyperbolarum oppoſitarum, quæ producta hyberbolas biſariam divideret. In hac productione HK capiuntur abſciſſæ, & ordinatæ hyperbolæ IHP. Dicitur *axis ſecundus* recta AS primo axi OH perpendicularis illum biſariam ſecans, & a quo pariter biſariam ſecatur. Axis hic ſecundus AS primo eſſe poteſt æqualis, vel inæqualis. Centrum hyperbolæ IHP vel *ihp* extra curvam eſt in C.

In hac curva IHP ordinatæ PK ſunt perpendiculares ductæ ab aliquo curvæ puncto ad pro-

productionem HK axis primi OH: abſciſſæ H K ſumuntur a vertice curvæ H uſque ad analogam ordinatam PK. At ad faciendum rectangulum alicujus abſciſſæ HK ducitur hæc abſciſſa in ſe ipſam auctam primo axe. Quare rectangulam abſciſſæ HK eſt HK × OK.

VI. Alibi oſtendemus, planum conum quemvis ſecans diverſas a quinque expoſitis ſectiones efficere non poſſe. *Theoria parabolæ* projecta reſpicit gravia horizonti parallela, aut obliqua (*Phy.*381.). *Theoria ellipſeos* in dioptrica, & catoptrica neceſſaria eſt ad quædam ſpecula cauſtica conſtruenda; in acuſtica ad ſoni directionem; in aſtronomia ad motus planetarum, & cometarum definiendos, qui omnes circa ſui motus centrum ellipſes deſcribunt (*Phy.*1307). *Theoria hyperbolæ* uſum habet in dioptrica, in catoptrica, in aliqua aſtronomiæ parte. Quoniam tamen illius in phyſica noſtra mentionem non facimus, tantum de illa generica quædam afferemus, proprietates non explicabimus.

SECTIONES CONICÆ IN PLANO.

Sectionibus conicis in cono conſideratis, non abs re erit eas quoque generatim in plano conſiderare (*fig.* 115).

VII. *Tres ſectiones conicæ*, parabola, ellipſis, & hyperbola ſunt figuræ planæ lineis curvis terminatæ *mm*SMM, quæ juxta diverſas leges inflectuntur reſpectu cujuſdam rectæ AGG extra curvam ſumptæ, & reſpectu alterius rectæ SPP in curva ſumptæ.

Ad definiendam puncti poſitionem, adeoque, & punctorum ſeriem totius curvæ in plano, aptior methodus eſt, & apud geometras uſitatior punctum hoc, & ſucceſſive aliud quodvis curvæ punctum ad duas rectas referre in plano deſcriptas: hoc autem facile fit quum

nota

nota eſt puncti ab utraque recta diſtantia, & ad quam earum partem ſtatuendum ſit.

Exemplum, (*fig.* 105. Si dicatur punctum *s* diſtare a recta ZR intervallo *sr*, & ab alia recta SH intervallo *s*X; facile erit poſitionem *s* puncti hujus definire.

VIII. In tribus ſectionibus conicis primo ſex præcipua conſiderantur; ſcilicet (*fig.* 115).

Recta GAG extra curvam ſumpta, quæ *directix* vocatur.

Recta altera SX directrici perpendicularis, & curvam bifariam ſecans, quæ dicitur *axis* curvæ.

Punctum F in curva ſumptum, quod dicitur *focus* curvæ.

Perpendiculares MP, *m*P a puncto curvæ ad rectam SPX ductæ, quæ dicuntur *ordinatæ*, ſive *y* curvæ.

Una ex his ordinatis *p*F*p* per curvæ focum tranſiens, quæ dicitur curvæ *parameter*.

Rectæ SF, SP in axe, aut in axis productione ſumptæ, quæ dicuntur abſciſſæ, ſive *x* curvæ.

IX. Quædam ſunt in tribus ſectionibus conicis generica diſcrimina adnotanda (*fig.* 115).

In parabola vertex S *æque diſtat* a directrice A, & a foco F. In ellipſi vertex S *magis diſtat* a directrice A, quam a foco F. In hyperbola vertex S *minus diſtat* a directrice A, quam a foco F.

Si ad verticem cujuſque ex tribus ſectionibus ſtatuatur *tangens* SB diſtantiæ SF verticis a foco æqualis; & a puncto A directricis ſumpto in directione axis producti ducatur per hujus tangentis extremum B recta indefinita ABDD; angulus SAB erit graduum 45 in parabola; *minor gradibus* 45 in ellipſi; *major gradibus* 45 in hyperbola.

In quovis tractatu de ſectionibus conicis demonſtratur, & nos hic demonſtratum ſupponemus, in parabola quadratum ordinatæ cujuſvis

eſſe

eſſe *æquale* rectangulo ſuæ abſciſſæ in parametrum *pFp*; in ellipſi quadratum ordinatæ cujuſvis MP *minus* eſſe rectangulo ſuæ abſciſſæ SP in parametrum *pFp*; in hyperbola quadratum ordinatæ cujuſvis MP *majus* eſſe rectangulo ſuæ abſciſſæ SP in parametrum *pFp*; ſive algebrice (75), in parabala, $y^2 = px$; in ellipſi, $y^2 < px$; in hyperbola, $y^2 > px$.

Ex his orta etymologia cujuſque ſectionis conicæ; ſignificant enim *æqualitatem*, *defectum*, *exceſſum*. Parabola a παραβολὴ, *ſimilitudo*, *æqualitas*: ellipſis ἐλλείπω, *deficio*; *figura ab æqualitate deficiens*; hyperbola, ab ὑπερβολὴ; *figura æqualitatem excedens*.

X. Si hæ curvæ caſu, & nulla lege certa inflecterentur; nihil in illas geometria poſſet; neque enim nota ulla haberet, a quibus ad ignota in his curvis ferri poſſet. At ſi certis, & immutatis legibus curvæ hæ flectuntur, ipſas geometria ſibi ſubjicere poteſt; & a quibuſdam datis, aut inventis rationibus curvæ proprietates aſſequi in omnibus ejus incrementis, & flexibus; & expreſſio algebraica exprimens qua lege ſectio quævis conica gignatur, & inflectatur dicitur *æquatio ad curvam*. Exempli gratia, ſi parabola curva eſt, in qua quadrata ordinatarum ſint æqualia productis abſciſſarum in parametrum, æquatio curvæ erit $y^2 = px$; atque ita de ceteris.

Toto hoc tractatu ſupponemus menti præſentem & *præcipuam trianguli rectanguli proprietatem*, quadratum ſcilicet hypothenuſæ eſſe æquale quadratis amborum laterum (517); & *præcipuam circuli proprietatem*; ſcilicet, quadratum ordinatæ cujuſvis MG (*fig.* 111) eſſe æquale rectangulo ſub diametri ſegmentis AG, GX, ſive axis AX; ſive $\overline{MG}^2 = AG \times GX$ (410); ſive algebrice, dicto *a* ſemiaxe, & $2a$ axe, $y^2 = 2ax - x^2$. Eſt hæc æquatio ad circu-

culum, qua æquatio ad alias curvas invenitur.

Ad parabolæ, & ellipſeos proprietates dignoſcendas primum illa in plano, mox in cono conſiderabimus.

PARAGRAPHUS PRIMUS.

PARABOLA IN PLANO.

739. PROBLEMA. P*Arabolam in plano deſcribere* (*fig.* 105).

SOLUTIO. Sit recta indefinita ZDR in plano deſcripta: erit hæc *directrix* parabolæ deſcribendæ MMS*mm*.

I. Ad rectæ hujus, ſeu directricis punctum quodvis D eleva perpendicularem indefinitam DX; & in hac ad libitum ſume punctum F: erit hoc *focus* parabolæ.

II. Rectam FD bifariam ſeca in S: erit punctum hoc *vertex parabolæ*. Recta SX indefinita erit *axis parabolæ*: recta VST erit *tangens ad verticem* parabolæ.

III. Ad quot libuerit puncta axis indefiniti SX duc indefinitas directrici ZDR parallelas BM, EM, HM, B*m*, E*m*, H*m* quæ axi perpendiculares erunt *ordinatæ parabolæ*; & partes axis SB, SE, SG, SH inter verticem, & quamvis ordinatam comprehenſæ erunt *abſciſſæ parabolæ*.

IV. Quoniam ordinatæ adhuc indefinitę ſunt, ſingulæ determinandæ ſunt. Curva, quæ per determinatam cujuſvis ordinatæ extremitatem M tranſibit, erit parabola deſcribenda.

Ut cujuſvis ordinatæ longitudo definiatur, a puncto, in quo ordinata quævis ME axem ſecat, cape circino diſtantiam ED ordinatæ a directrice; & circini crure ſtatuto in foco F, altero crure ſeca ordinatam EM. Punctum ſectio-

ctionis M erit ordinatæ EM antea indefinitæ, modo definitæ longitudo.

Idem fac in omnibus aliis ordinatis MB, MG, MH; ita ut quodvis M æquale ſit diſtantiæ BD, GD, HD ordinatæ cujuſvis a directrice: habebis definitas ordinatarum omnium BM, GM, HM, B*m*, G*m*, H*m* extremitates.

V. Per has omnes ordinatarum extremitates SMM ubique a foco, & a directrice æque diſtantes tranſeat curva: curva hæc SMM erit *parabola*. Si quoque curva tranſeat per omnes extremitates S*mm* earundem ordinatarum ad alteram axis partem, curva quoque S*mm* erit *parabola*.

VI. Recta quadrupla ipſius DS = SF eſt *parameter parabolæ*. Oſtendemus, hanc parametrum ſemper æqualem eſſe duplici ordinatæ *p*F*p* per focum tranſeunti. Præcipua curvæ hujus proprietas eſt, quadratum ordinatæ cujuſvis EM ſemper æquale eſſe rectangulo ſuæ abſciſſæ ES in paramertum 4DS, vel 4SF quadrata ordinatarum eſſe ut ſuas abſciſſas.

VII. Recta MN, vel *mn* a puncto quovis curvæ parabolicæ ducta axi SX parallela eſt *diameter parabolæ*.

Oſtendemus, curvam modo deſcriptam eſſe veram parabolam, *easdem* enim *proprietates* habet, quas parabola in cono a nobis conſiderata, & adhuc conſideranda (741, & 766). Hic ſupponimus, lineam M*s*MMS*mm*C eſſe perfecte curvam, ſeu lineas SM, MM duobus tantum punctis contiguis conſtare.

T H E O R E M A I.

740. *In curva modo deſcripta, ſive in parabola quavis, quadratum cujuſvis ordinatæ eſt æquale rectangulo ſua abſciſſæ in parametrum* (*fig.* 105).

DEMONSTRATIO. Ordinata axi SX perpen-

pendicularis aut infra, aut ſupra focum F, aut in foco ipſo ſumi poteſt.

I Sit primo ordinata EM *infra focum* ſumpta: hæc dicatur y; abſciſſa SE, x: quantitas conſtans SD, ſeu SF, quarta pars parametri, a. In triangulo rectangulo FEM erit ex conſtructione $FM = MZ = ES + SD = x + a$; & quoque $EF = ES - SF = x - a$.

At in triangulo rectangulo FEM erit $\overline{FM}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{EF}^2$; ergo algebrice . . . .

primo; $x + a \times x + a = x^2 + 2ax + a^2 = \overline{FM}^2$:

deinde . . . . $y \times y = y^2 = \overline{EM}^2$;

tandem $x - a \times x - a = x^2 - 2ax + a^2 = \overline{EF}^2$.

His ergo productis juxta exigentiam æquationis a triangulo rectangulo FEM datæ diſpoſitis, habebimus: $x^2 + 2ax + a^2 = y^2 + x^2 - 2ax - a^2$;

& tranſponendo; $y^2 = x^2 + 2ax + a^2 - x^2 - 2ax - a^2$

& reducendo; . . . . . $y^2 = 4ax$

Atqui ex definitione parametri $4a = p$; ergo hoc illi ſubſtituto erit $y^2 = px$.

Facile intelliges, idem demonſtrari in triangulo quovis rectangulo FMH, FmG, ubi ordinata HM, Gm ſumetur infra focum; ergo quadratum cujuſvis ordinatæ y infra focum ſumptæ ſemper æquale eſt rectangulo ſuæ abſciſſæ in parametrum.

II. Sit modo ordinata BM ſumpta *ſupra focum*. In triangulo rectangulo BMF erit ex conſtructione $FM = MK = BS + SD = x + a$. Et pariter $BS = SF - SB = a - x$.

At in triangulo BMF rectangulo $\overline{MF}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BF}^2$; ergo algebrice, ... :

primo $x + a \times x + a = x^2 + 2ax + a^2 = \overline{MF}^2$

deinde . . . . . $y \times y = y^2 = \overline{BM}^2$

tandem $a - x \times a - x = a^2 - 2ax + x^2 = \overline{EF}^2$

Quibus diſpoſitis juxta æquationem a triangulo

rectangulo datam BMF . . . . . .
habebimus $x^2 + 2ax + a^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$
& tranſpnon. $y^2 = x^2 + 2ax + a^2 - a^2 + 2ax - x^2$
& reducendo . . . . $y^2 = 4ax = px$

III. Sit tandem ordinata Fp ſumpta *in foco*. Per conſtructionem eſt $Fp = pv = 2a$; & $SF = x = a$. Hic ergo ordinata ad abſciſſam eſt ut 2 ad 1. At quadratum ordinatæ $2 = 4$; rectangulum abſciſſæ 1 in parametrum $4 = 4$; ergo y^2, ſeu $2 \times 2 = 4$ ordinatæ hic quoque æquale eſt $1 \times 4 = 4$ ſuæ abſciſſæ $x = 1$ in parametrum conſtantem $p = 4$. Q. E. D.

COROLLARIA.

741. COROLLARIUM I. *In hac curva quadrata ordinatarum ſunt ut abſciſſa* (*fig.* 105).

DEMONSTRATIO. Quum parameter p conſtans ſit, ejus loco 1 ſubſtitui poteſt; ergo formula $y^2 = px$ fiet $y^2 = 1x = x$ in ſingulis ordinatis, & abſciſſis analogis.

Ergo erit quadratum cujuſvis ordinatæ $HM = y^2$ ad ſuam abſciſſam $HS = x$, ut quadratum alius cujuſvis ordinatæ $EM = y^2$ ad ſuam abſciſſam $BS = x$; atque ita de ceteris.

Ergo etiam creſcentibus in infinitum abſciſſis SB, SG, SX, etiam ordinatæ analogæ creſcent proportionaliter in infinitum; ſemper enim y^2 eſt ipſi x proportionale.

Ergo tandem ob $y^2 = px$ ordinatæ y ſemper erunt æquales radici quadratæ rectanguli abſciſſarum in parametrum. Quare data parabolæ parametro, puta, 4 hexapedarum, invenietur valor ordinatæ ad quamcumque a vertice diſtantiam, puta 1000 hexapedarum, extrahendo radicem quadratam ex 4000, producto abſciſſæ x in parametrum p: hæc radix erit ordinata abſciſſę hexapedarum 1000; atque ita de ceteris. Q. E. D.

742. COROLLARIUM II. *Parameter eſt ter-*

tertia proportionalis abſciſſa, & ordinata analoga. Quum enim ſit $y^2 = px$; erit $x : y :: y : p$; ſive $\div x . y . p$.

743. COROLLARIUM III. *Ex hac parabolæ proprietate deſcendit ejus uſus, definiendi ſcilicet rationem longitudinis parabolæ ad latitudinem, quæ eſt ratio ordinatæ ad ſuam abſciſſam.*

EXPLICATIO. In æquatione $y^2 = px$ fiat $p = 1$; erit æquatio $y^2 = x$.

I. Si ſupponatur abſciſſa $x = \frac{1}{9}$ parametri; erit $y^2 = \frac{1}{9}$, & $y = \frac{1}{3}$. Hoc eſt: quum abſciſſa eſt $\frac{1}{9}$ parametri, ordinata eſt $\frac{1}{3}$ parametri; quare tunc magis parabola latitudine, quæ ex ordinata habetur, creſcit, quam longitudine, quæ a puncto axis ad verticem ſumitur.

II. Si ſit abſciſſa $x = \frac{1}{4}$ parametri; erit $y^2 = \frac{1}{4}$; & $y = \frac{1}{2}$; hoc eſt tunc ordinata eſt dimidia parameter. At punctum axis, in quo abſciſſa eſt $\frac{1}{4}$ parametri, eſt focus; ex definitione enim parametri, ipſa eſt quadrupla diſtantiæ verticis a foco. Ergo *in parabola dupla ordinata per focum tranſiens eſt æqualis parametro*; & tunc quoque parabola adhuc latior eſt, quam longa ſit.

III. Si fiat abſciſſa $x = 1$, ſeu parametro; erit $y^2 = 1$, & $y = 1$; hoc eſt: ordinata, & abſciſſa ſunt æquales, & parabolæ longitudo, & latitudo æquales ſunt.

IV. Si fiat abſciſſa $x = 4$, ſeu quadrupla parametri, erit $y^2 = 4$, & $y = 2$; hoc eſt ordinata erit dupla parametri. Tunc parabola magis creſcit latitudine.

V. In genere quum abſciſſæ exhibentur fractionibus unitatis $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{4}$, ordinatæ exhibentur earum radicibus $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$: quæ in majori ratione creſcunt. Quum vero abſciſſæ exhibentur numeris 1, 4, 9, 16, 25, ordinatæ ſunt ut 1, 2, 3, 4, 5, qui numeri in minori ratio-

tione ſunt inter ſe, quam eorum quadrata.

Quamobrem in primo caſu parabola latior eſt quam longa ſit; in altero longior eſt, quam lata ſit; ſeu magis a directrice, quam ab axe recedit.

TANGENTES PARABOLÆ.

744. DEFINITIO. *Tangens curvæ* cujuſvis dicitur recta curvam in unico puncto tangens, quæ indefinite utrinque producta non niſi in puncto curvam tangit, nec intra curvam penetrat. Tangens circuli ſemper radio perpendicularis eſt; non ita tangens parabolæ, ellipſeos, & hyperbolæ.

PROBLEMA.

745. *Ad punctum quodvis parabolæ tangentem ducere* (*fig.* 109).

SOLUTIO I. A dato puncto M duc MV axi SX parallelam, & ad directricem in V terminatam: a foco F duc rectam FV ad id punctum V.

II. Rectam FV bifariam ſeca perpendiculari P*m*: hæc indefinite producta in N erit tangens parabolæ ad datum punctum M.

DEMONSTRATIO I. Latera VM, MF trianguli VFM ſunt æqualia per conſtructionem. Ergo ſi a puncto M radio MV, vel MF deſcribatur arcus VF, punctum M erit ſimul punctum parabolæ, vertex trianguli iſoſcelis MVF, & centrum arcus circularis VF.

II. Si recta, ſeu chorda V*m*F bifariam ſecetur perpendiculari P*m*; hæc P*m* indefinite producta tranſibit per centrum circuli M (407), quod eſt punctum parabolæ.

III. Perpendicularis PM indefinite producta uſque in N parabolam non ſecabit: tranſibit enim per puncta omnia ab V, & F æque diſtan-

ſtantia (320). Atqui puncta parabolæ infra M ſemper magis ab V, quam ab F recedunt; omia enim, per conſtructionem, a foco, & a directrice æque diſtant. Ergo puncta hæc parabolæ, veluti R, propiora erunt foco F, quam puncto V, nec in illa incurret perpendicularis PMN, quæ per omnia puncta tranſit æque diſtantia ab F, & V. Patet, lineam RF = RZ non eſſe lineæ RV æqualem; etenim RZ eſt directrici ZVD perpendicularis, RV obliqua (398).

Ab F pariter duc rectam ad Z; hanc biſeca, & a puncto biſectionis duc rectam ad R: hæc erit tangens ad punctum R; atque ita de quovis alio parabolæ puncto. Q. E. D.

SPECULA PARABOLICA.

746. NOTA I. Angulus VMF a recta PMN bifariam dividitur (407): ergo VMP = FMP. Atqui VMP = NMH (343); ergo NMH = PMF. Quare (*fig.* 109),

I. Si radius lucis pergat per HM axi SX parallelus, reflectetur ad focum F faciens angulum reflexionis PMF angulo incidentiæ HMV æqualem in quovis parabolæ puncto. Pari modo, & ratione eadem ſi radius lucis a foco F ad punctum quodvis parabolæ dirigatur M, reflectetur, & poſt reflexionem perget directione MH axi parallela.

II. Si curva parabolica RMS circa ſuum axem SX converteretur, deſcriberet *ſolidum cavitate parabolica* aptum ad idem punctum F reflectere radios omnes in ſuam cavitatem incidentes directione axi parallela; & reflectere directione axi parallela radios omnes a foco F emiſſos, & in quævis cavitatis puncta incidentes.

Hæc figura eſt, hi effectus *ſpeculorum concavorum parabolicorum*. Hujuſmodi etiam re ipſa

eſt portio *tubæ ſtentoreæ* ; qua directio parallela datur moleculis omnibus aereis a lingua, ore, & metallo ſumma vi, & opportuna ratione modificatis (*Phyſ*.778).

III. Linea quævis MH axi SX parallela eſt parabolæ diameter: hæc in infinitum producta ad ſenſum incurreret in alium parabolæ focum qui in axe eſt ad diſtantiam a foco F. Unde ſequitur, radium lucis, juxta notam præcedentem, ab alterutro foco emiſſum, & ad punctum quodvis cavitatis parabolicæ directum, ad alium focum reflexum iri (*fig*.109).

IV. In hac curva recta quævis FM, FR a foco F ad punctum quodvis parabolæ ducta dicitur *radius vector*.

747. Demonſtravimus, in parabola quadratum ordinatæ eſſe æquale rectangulo ſuæ abſciſſæ in parametrum; & ordinatas eſſe inter ſe ut radices quadratas rectanguli ſuarum abſciſſarum in parametrum. Quare (*fig*.105).

I. Si parameter, & abſciſſæ SB, SE, SG, SH eædem perſeverarent, & ordinatæ BM, EM, GM, HM omnes proportionaliter creſcerent: curva SMM non eſſet amplius parabola: fieret *hyperbola*.

II. Contra vero ſi, parametro, & iiſdem abſciſſis perſeverantibus, ordinatæ omnes proportionaliter decreſcerent; curva SMM non amplius eſſet parabola: fieret *ellipſis*, aut *portio ellipſeos*.

III. In *parabola* quadratum ordinatæ eſt æquale rectangulo ſuæ abſciſſæ in parametrum In *ellipſi* quadratum ordinatæ ad majorem axem eſt æquale rectangulo ſuæ abſciſſæ in rectam minorem parametro hujus axis. In *hyperbola* quadratum ordinatæ majus eſt rectangulo ſuæ abſciſſæ in parametrum. Hinc, ut monuimus (738 IX.), etymologia harum curvarum.

748. PROBLEMA. *Spatium parabolicum axe, cur-*

curva, & ordinata quavis incluſum metiri (*fig.* 107).

SOLUTIO. Sit SXCmmS ſpatium parabolicum dimetiendum. Hic ſupponimus ſpatium curva perfecte parabolica, nullis angulis ſenſibilibus aſpera terminari. Circa hoc ſpatium fiat rectangulum circumſcriptum STCXS. Dico, $\frac{2}{3}$ hujus rectanguli eſſe ſpatium parabolicum dimetiendum.

I. Concipe lineam ST in partes æquales infinite parvas diviſam *Sb*, *be*, *e*T; & a punctis diviſionis ductas eſſe ad curvam infinitas rectas *bm*, *em*, TC, quæ erunt *elementa* complementi *SmmCTS*, ſive ſuperficies infinite parva latitudine, quæ a recta ST ductæ ſint ad curvam perfecte parabolicam *Sm*C.

Ab extremitate cujuſque ex his *elementis complementi* concipe ductas infinitas ordinatas *m*B, *m*E, CX ad axem SX. Tunc omnia elementa *bm*, *em*, TC complementi erunt æqualia analogis abſciſſis SB, SE, SX; & diſtantiæ *Sb*, *Se*, ST rectarum, aut elementorum *bm*, *em*, TE a vertice S complementi erunt æquales analogis ordinatis *m*B, *m*E, CX.

Jam vero ex proprietate parabolæ (741, & 766) abſciſſæ SB, SE, SX ſunt inter ſe ut quadrata ſuarum ordinatarum *m*B, *m*E, CX: ergo elementa *bm*, *em*, TC complementi erunt inter ſe ut quadrata ſuarum diſtantiarum a vertice S, ſive ut quadrata rectarum *Sb*, *Se*, ST.

II. Alibi oſtendimus (590), ſi pyramis infinitis planis baſi parallelis ſecetur, plana hæc eſſe inter ſe ut quadrata ſuarum altitudinum, ſive ut quadrata ſuarum diſtantiarum a vertice pyramidis. Ergo elementa *bm*, *em*, TC complementi, quæ ſunt inter ſe ut quadrata ſuarum diſtantiarum a vertice S, ſunt quoque inter ſe ut plana elementaria pyramidis.

At ſumma planorum elementarium pyramidis, a quibus ſimul fit ejus ſoliditas, æqualis

eſt producto baſis in tertiam partem ſuæ altitudinis, ſeu diſtantiæ baſis a vertice (604); Ergo ſumma elementorum *bm*, *em*, CT complementi *Smm*CTS æqualis eſt producto baſis, ſeu maximi elementi CT in tertiam partem altitudinis TS, ſeu in $\frac{1}{3}$ diſtantiæ maximi elementi a vertice S, ubi eſt primum, & minimum elementum hujus complementi.

III. Atqui baſis CT complementi ducta in totam altitudinem ST hujus complementi dat rectangulum SXCTS; & baſis CT ducta in $\frac{1}{3}$ hujus altitudinis; ſive CT X $\frac{1}{3}$ ST dat præciſe $\frac{1}{3}$ ejuſdem rectanguli; ergo ſumma elementorum complementi, quæ ſumma eſt ipſum complementum, ſive ejus area, æqualis eſt $\frac{1}{3}$ rectanguli SXCTS. Si ergo ab hoc rectangulo auferatur complementum S*mm*CTS, quod eſt geometrice $\frac{1}{3}$ rectanguli, reſiduum eſt ſemiparabola S*mm* CXS: ergo hæc ſemiparabola eſt accurate $\frac{2}{3}$ rectanguli SXCTS.

Quum vero eodem modo oſtendi poſſit, alteram ſemiparabolam SXSMMS æqualem eſſe $\frac{2}{3}$ ſimilis rectanguli circumſcripti; ſequitur, hanc, & aliam quamvis parabolam eſſe $\frac{2}{3}$ rectanguli circumſcripti. Quare hac ratione habetur *quadratura parabolæ*.

IV. Si a vertice S parabolæ ducatur recta ad extremitatem C ſuæ poſtremæ ordinatæ; recta hæc SC rectangulum STCXS bifariam ſecabit. Tunc, ſi rectangulum ſupponatur = 1, ſemiparabola erit $\frac{2}{3}$, & triangulum SCXS erit $\frac{1}{2}$.

Quare omnia ad eundem denominatorem reducendo, rectangulum, ſemiparabola, triangulum inſcriptum erunt inter ſe, ut $\frac{6}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{6}$, ſive ut 6, 4, 3.

Jam vero a ſemiparabola ablato triangulo SCXS, reſiduum eſt valor ſegmenti parabolici SC*mm*S: ergo triangulum circumſcriptum, ſemiparabola, triangulum inſcriptum, & ſegmen-

mentum parabolicum ſunt inter ſe, ut 6, 4, 3, 1.

Eædem rationes habebuntur, ſi loco ſemiparabolæ integra parabola ſumatur, & rectangulum illi circumſcriptum: tota enim ſunt inter ſe, ut dimidia.

§. II.

ELLIPSIS IN PLANO.

749. PROBLEMA. *Ellipſim in plano deſcribere* (*Fig.* 111).

SOLUTIO. Hic ſupponemus, quod alibi demonſtrabimus (767), ſcilicet, *in ellipſi quavis quadrata ordinatarum eſſe inter ſe, ut rectangula ſuarum abſciſſarum analogarum.* Ex præcipua hac ellipſis proprietate problema ſolvetur.

Sint duæ rectæ inæquales A X, *ax* ſe bifariam ad angulos rectos ſecantes. Punctum interſectionis C erit centrum ellipſis deſcribendæ.

I. A puncto C intervallo C A deſcribe circulum ADXDA: erit hic *circulus ellipſi circumſcriptus*; & diriget in ellipſi deſcribenda, cujus ACX erit *axis primus*, *a* C *x axis ſecundus*.

II. Ad axem primum ACX eleva perpendiculares quot libuerit ita, ut utrinque ad circuli circumſcripti peripheriam terminentur. Hæ BM, CD, GM, HM erunt ordinatæ huic circulo, in quibus invenientur partes B*m*, C*a*, G*m*, H*m*, quæ erunt *ordinatæ ad ellipſim* deſcribendam.

Ordinata quævis GM dividit axem primum AX in partes duas AG, GX: partes hæ ſunt *abſciſſæ ellipſis*, & circuli circumſcripti.

§. III.

SECTIONES CONICÆ IN CONO.

765. OBSERVATIO. Initio hujus tractatus oſtendimus ſectionum conicarum geneſim in cono ope plani variis modis conum ſecantis, quæcumque coni ſit ſive recti ſive obliqui magnitudo (738). Oſtendendum modo eſt, curvas has in cono iiſdem præcipuis proprietatibus donatas eſſe, quas illis in plano ſuppoſuimus; adeoque curvas in plano obſervatas eſſe veras ſectiones conicas.

THEOREMA I.

766. *In parabola quadrata ordinatarum ſunt ut abſciſſæ analogæ* (*fig.* 107).

DEMONSTRATIO. Per punctum D tranſeat circulus baſi coni parallelus. Per verticem coni fiat ſectio triangularis B A D baſi coni perpendicularis.

I. Si per punctum S fiat ſectio parabolica M SM plano trianguli B AD perpendicularis, plana parabolæ, & circuli *bdb*, & B D B ſe ſecabunt in punctis *mm*, vel MM. At plana circuli, & parabolæ ſunt plano trianguli perpendicularia; ergo communis eorum ſectio *mnm*, vel MNM erit plano trianguli perpendicularis; eſt enim linea plani parabolæ, quod ſupponitur plano trianguli perpendiculare. Ergo quoque *nm*, vel N M erit tum diametro *bd*, vel BD circuli, tum axi SN parabolæ perpendiculare. Ergo lineæ *nm*, NM ſunt ordinatę circulis, & parabolæ communes.

II. Atqui per præcipuam circuli proprietatem

mnium ordinatarum extrema tranſiens ordinatis ad circulum circumſcriptum proportionalium erit *ellipſis deſcribenda*. Ergo ita ellipſim deſcribendo, vel ellipſim hac theoria deſcriptam ſupponendo, ejus natura, & proprietates dignoſci poterunt.

Juxta hanc theoriam ellipſis ſupponi poteſt hac continua proportione deſcripta ; ∺ CD= CA . C*a* . GM . G*m*. HM . H*m*; atque ita porro in infinitum.

VI. Per præcipuam circuli proprietatem quadratum ordinatæ cujuſque KM æquale eſt rectangulo abſciſſarum KA×KX: quum ergo ordinata K*m* curvæ deſcriptæ ſit ordinatæ KM circuli proportionalis; ſequitur, quadratum ordinatæ K*m* fore, non æquale, ſed proportionale eidem rectangulo abſciſſarum KA × KX, quæ abſciſſæ eædem ſunt in circulo, & in ellipſi. Idem dicas de quavis ordinata ad circulum, & ad ellipſim. Ergo in curva deſcripta quadrata ordinatarum ſunt inter ſe ut rectangula abſciſſarum.

Atqui hæc eſt proprietas ellipſis diſtinctiva, ut alibi oſtendemus. Ergo curva deſcripta eſt ellipſis ipſa, cujus geneſim in cono vidimus.

VII. Recta *m*C*m* a puncto quovis hujus curvæ per centrum C ducta ad punctum oppoſitum eſt *ellipſeos diameter*.

Ordinata *p*F*p* per alterutrum ex ellipſeos focis tranſiens eſt *ellipſeos parameter*.

VIII. Ellipſis æque deſcribi poteſt ductis ordinatis ad axem ſecundum (*fig.* 114). Ad hoc deſcribe circulum N*a*M*b*N, cujus axis ſecundus datus NCM ſit diameter; & ducto axe primo dato ACB ſecundum bifariam, & perpendiculariter ſecante in C, quære quot libuerit ordinatas *rs*, *rs*, ita, ut quælibet ordinata ad ellipſim deſcribendam ſit ad analogam & minorem ordinatam circuli inſcripti, ut axis primus ad ſecundum. Curva NAMBN tranſiens

per determinatam omnium harum ordinatarum extremitatem erit ellipſis; & eaſdem cum præcedente proprietates obtinebit.

COROLLARIA.

750. COROLLARIUM I. *Summa omnium ordinatarum ad circulum eſt ad ſummam omnium ordinatarum ad ellipſim, ut una ordinata ad circulum ad analogam ordinatam ad ellipſim* (*fig.* 111).

DEMONSTRATIO. Evidens eſt, rationem aliquam dari inter ordinatam C D ad circulum & analogam ordinatam C *a* ad ellipſim. At per conſtructionem hæc eadem ratio datur inter omnes ordinatas analogas circuli, & ellipſeos. Ergo omnes ordinatæ ad circulum ſunt antecedentes, & omnes ordinatæ ad ellipſim ſunt conſequentes totidem rationum geometricarum, in quibus ſumma antecedentium eſt ad ſummam conſequentium, ut unus antecedens ad unum conſequentem (222). Q. E. D.

751. COROLLARIUM II. *Area circuli ellipſi circumſcripti eſt ad aream ellipſeos inſcriptæ, ut hujus axis primus ad ſecundum* (*fig.* 112).

DEMONSTRATIO. Quum ſumma omnium ordinatarum, quæ in circulo duci poſſint, ſit areæ circuli æqualis, & ſumma omnium ordinatarum, quæ in ellipſi duci poſſint, ſit quoque areæ ellipſeos æqualis; erit area circuli ad aream ellipſeos, ut ſumma omnium ordinatarum ad circulum, ut ſumma omnium ordinatarum ad ellipſim.

At ex corollario præcedente, ſumma ad ſummam, ut ordinata quævis CD ad circulum ad ſibi analogam C *a* ad ellipſim.

Atqui CD = CA eſt dimidium axis primi ellipſeos; & C *a* = C *x* eſt dimidium axis ſecundi ellipſeos; ergo quum dimidia ſint inter

ſe

ſe ut tota (163), area circuli erit quoque ad aream ellipſeos, ut dupla CD, vel CA ad duplam C*a*; ſive ut axis primus ad ſecundum.

Quare ſi axis primus AX ſit ad ſecundum *ax*, ut 6 ad 3, ſive ut 10 ad 9, ſive ut 1000 ad 999; area circuli circumſcripti erit ad aream ellipſeos inſcriptæ, ut 6 ad 3, vel ut 10 ad 9, vel ut 1000 ad 999; atque ita de ceteris. Q. E. D.

752. COROLLARIUM III. *Area ellipſeos eſt æqualis areæ circuli, cujus diameter ſit inter utrumque axem ellipſeos media proportionalis.* (*fig.* 111).

DEMONSTRATIO. Circulus ſupra axem primum ellipſeos deſcriptus dicatur C: ellipſis ſit E: circulus ſupra mediam proportionalem deſcriptus ſit M: Axis primus ellipſeos ſit *a*. ſecundus *b*: media proportionalis (414) inter utrumque axem ſit *m*.

I. Ex hypotheſi habebitur proportio continua $\div\!\!\div$ *a*. *m*. *b*. In hac primus terminus eſt ad tertium, ut quadratum primi ad quadratum ſecundi (234). Ergo erit quoque; $a : b :: a^2 : m^2$.

At per præcedens corollarium $C : E :: a : b$; Ergo quoque (168), $C : E :: a^2 : m^2$.

II. Aſt areæ circulorum ſunt inter ſe ut quadrata radiorum, vel diametrorum (501); ergo area circuli C ſupra axem primum *a* conſtructi erit ad aream circuli M ſupra mediam proportionalem *m* conſtructi; ut a^2 ad m^2. Ergo $C : M :: a^2 : m^2$.

III. Vidimus $C : E :: a^2 : m^2$, ergo E=M; eandem enim ambo ad m^2 rationem dicunt. Ergo area E ellipſeos eſt æqualis areæ circuli, cujus diameter ſit inter utrumque axem ellipſeos media proportionalis. Q. E. D.

753. PROBLEMA. *Ellipſeos, cujus uterque axis notus ſit, aream proxime invenire* (*fig.* 111).

SO-

SOLUTIO. Quære inter utrumque axem mediam proportionalem (414): hæc erit axis, ſeu diameter circuli ellipſi æqualis, ex corollario præcedente. Sumpto ergo producto peripheriæ hujus circuli in dimidium radium, habebitur proxime ejus area (481): ergo & area ellipſeos quæſita, quæ hujus circuli areæ æqualis eſt (752).

Si quadratura circuli geometrice haberi poſſet, & ellipſeos quadratura eadem præciſione haberetur; at quum illa non niſi proxime haberi poſſit, nec iſta, niſi proxime, haberi poteſt.

754. PROBLEMA II. *Sphæroidis ellipſoidalis, cujus uterque axis notus ſit, ſoliditatem invenire* (*fig.* 111).

SOLUTIO. Sit ellipſis, illique circulus circumſcriptus. Axis primus ellipſis, & circuli diameter ſit a: axis ſecundus b: ordinatæ ad circulum ſint x: ordinatæ ad ellipſim ſint y. Ex constructione (749) habemus $x : y :: a : b$; & $x^2 : y^2 :: a^2 b^2$ (225).

I. Si ſemicirculus ADXCA, & ſemiellipſis AaXCA ſimul revolventur circa communem axem ACX; ordinatæ BM, KM, GM, HM ad circulum *ſphæram* deſcribent, & analogæ ordinatæ ad ellipſim *ſphæroidem ellipſoidalem* deſcribent. Soliditas ſphæræ erit ſumma planorum circularium ab ordinatis ad circulum deſcriptorum: ſoliditas ſphæroidis ellipſoidalis erit par ſumma planorum circularium ab ordinatis ad ellipſim deſcriptorum. Plana hæc circularia inter ſe ſunt ut ſuorum radiorum quadrata (500), qui radii hinc ſunt ordinatæ ad circulum, illinc ordinatæ ad ellipſim. Ergo erit ſoliditas S ſphæræ ad ſoliditatem E ſphæroidis ellipſoidalis, ut x^2 ad y^2; ſive; S: E:: $x^2 : y^2$.

Quare inventa ſoliditate S ſphæræ (608); erunt in poſtrema hac analogia tres termini no-

noti, ex quibus innoteſcet quartus ignotus E, nempe ſoliditas ſphæræ.

II. Vel concipe cylindros duos deſcriptos revolutione linearum ST, OP circa axem AX. Cylindri hi circumſcripti alter ſphæræ, alter ſphæroidi eandem habebunt altitudinem AX; ergo erunt inter ſe ſoliditate ut eorum baſes, quæ ſunt circuli deſcripti alter ab axe primo, alter ab axe ſecundo: ergo erunt ſoliditate inter ſe ut quadratum axis primi ad quadratum ſecundi. Dictis cylindris C, & c, erit; C: $c :: a^2 : b^2$.

Quum vero jam ſit $x^2 : y^2 :: a^2 : b^2$; & S: E:: $a^2 : b^2$, erit quoque S: E:: C: c. Hoc eſt, ſoliditas ſphæræ eſt ad ſoliditatem ſphæroidis, ut ſoliditas cylindri ſphæræ circumſcripti ad ſoliditatem cylindri ſphæroidi circumſcripti. Atqui ſphæra eſt $\frac{2}{3}$ cylindri circumſcripti (624); ergo ſolidum ellipſoidale erit quoque $\frac{2}{3}$ cylindri circumſcripti, ſive cylindri, cujus altitudo ſit axis primus, diameter axis ſecundus.

IV. Nota; *eandem ſolutionem valere, ſi ordinata non ad axem primum, ſed ad ſecundum ducta fuiſſent* (*fig.* 114).

Sit ellipſis ANBMA, & circulus aNbMa axi ſecundo ellipſeos inſcriptus. Ordinatæ rs, rs eſſent proportionales analogis ordinatis circuli, cujus diameter eſſet ACB, per conſtructionem (749): erunt ergo quoque proportionales analogis ordinatis circuli, cujus diameter ſit aCb; in circulis enim inæqualibus, radii, chordæ, arcus, partes omnes ſimiles ſunt proportionales (475, *&* 648). Ergo ſi ſemiellipſis NAMCN, & ſemicirculus NaMCN convertantur ſimul circa communem axem NCM, alter ſolidum ellipſoidale, alter ſphæram deſcribent, quorum ſoliditates erunt reſpective æqualis ſumma planorum circularium inæqualium in revolutione deſcriptorum hinc ab ordina-

dinatis ad ellipſim, illinc ab ordinatis ad circulum.

Eodem igitur ratiocinio, iiſque analogiis, quibus ſupra invenietur ſoliditas E ſphæroidis ellipſoidalis ANBMA ad ſoliditatem S ſphæræ inſcriptæ $aNbMa$ eſſe, ut quadratum a^2 axis primi ad quadratum b^2 ſecundi; ſive ut cylindrus STVX axi primo circumſcriptus ad cylindrum OPKL axi ſecundo circumſcriptum.

SOLIDITAS, ET SUPERFICIES GLOBI TERRESTRIS.

755. OBSERVATIO. Hoc problemate *invenitur proxime ratio ſphæroidis terreſtris ad veram ſphæram*, hoc pacto (*Fig.* 114).

I. Notum eſt, tellurem non eſſe verum globum, ſed ſpeciem quamdam ſphæroidis ANBMA ad polos N, M depreſſi, ad æquatorem ACB elevati. Si concipiatur *planum*, quod per telluris centrum, & polos tranſiens ab auſtro in boream tellurem biſecet, ſectionem AMBNA in illa efficiet, quæ ſit minus vera ellipſis, parum tamen ab illa differet, cujus axis primus erit AB, ſecundus NM. Si vero ſectio hæc circa axem ſecundum NM convertatur, deſcribet, neglectis montibus, *ſphæroidem ellipſoidalem*, qui erit globus noſter terraqueus ad æquatorem elevatus, ad polos depreſſus.

Poſitis notis hujus ſphęroidis axibus (*Phy* 1375), per præcedens problema invenietur ejus ſoliditas ferme, ut illam alibi ſtatuimus.

II. *Sphæroidis ſuperficies* geometrice inveniri nequit ſine calculi differentialis, & integralis auxilio, aut alicujus methodi ferme æque arduæ, & implicatæ: quæ omnia parum in re præſenti proſunt, quum geometrica præciſione neuter axis haberi poſſit, nec quovis calculo poſſimus, niſi *proxime*, ad veritatem accedere; quod ſine tanto apparatu facere pergimus.

Si

Si tellus vere ſphæra eſſet N*a* M*b*N, cujus diameter eſſet axis ſecundus NM $=ab$, ejus ſuperficies eſſet æqualis ſuperficiei convexæ cylindri circumſcripti OPQR. Si ſphæræ hujus terreſtris diameter eſſet axis primus ACB; ejus ſuperficies æqualis eſſet ſuperficiei convexæ cylindri circumſcripti STVX (573).

Superficies ellipſeos ANBMA æqualis eſt ſuperficiei circuli *v*N*v*M*v*, cujus diameter *v*C*v* eſt media proportionalis inter axes ellipſeos (752). Poſita itaque (ut in ſphæroide parum adeo depreſſo, ut tellus eſt, ſine magni erroris metu ſupponi poteſt), poſita, inquam, terreſtris ſphæroidis ſuperficie æquali ſuperficiei ſphęræ, cujus diameter ſit *v*C*v*; erit hæc ſuperficies æqualis ſuperficiei convexæ cylindri GHKL circumſcripti circulo, cujus diameter *v*C*v* ſit inter utrumque axem media proportionalis.

Superficies hæc cylindri GHKL non erit rigore geometrico ſphæroidis terreſtris ſuperficies; proxime tamen ita accedet, ut propius accedere deſperes. Eam invenies ferme ut a nobis ſtatuta fuit in ſecundo Phyſicę volumine (*Phy.* 496).

ELLIPSIS ADHUC IN PLANO.

756. *Ellipſim in plano alio modo deſcribere* (*Fig.* 105).

SOLUTIO. Plano infige cylindrum perpendicularem in C, cui duo extrema adnectes funiculi, qui circa cylindrum converti poſſit.

I. Si ſtylus plano perpendicularis, & funiculo inſertus, quem ſemper æqualiter tendit, circa cylindrum C convertatur, in plano circulum ADXDA deſcribet.

II. At ſi in plano duo cylindri defigantur, alter in F, alter in *f*, quibus ejuſdem funiculi extrema adnectas; idem ſtylus ſemper plano per-

perpendicularis, & funiculo inſertus aliam curvam A *a* X *x* A deſcribet, cujus duo axes AX, *ax* inæquales erunt. *Curva hæc erit ellipſis*, ut oſtendemus.

Poteſt itaque ellipſis conſiderari tamquam circulus cujus centrum C utrinque æque recedit in F, & *f*; cujus diameter AX producta eſt, dum altera illi perpendicularis *ax* breviata eſt.

757. DEFINITIO I. Puncta F, *f* axis primi ſunt *foci ellipſeos*; & uterque focus diſtat ab extremis axis ſecundi *a x* ſemiaxem primum CA, vel CX. Foci æque diſtant ab ellipſeos centro C; & diſtantia focorum FC eſt *excentricitas ellipſeos*.

Hujuſmodi eſt curva magis, minuſve excentrica; quam in ſpatiis cæleſtibus deſcribunt corpora omnia opaca circa commune eorum centrum motus, quod eſt ſol pro cometis, & planetis primariis, & planeta primarius pro ſecundariis (*Phy.* 1198). Centrum motus mobile aut immobile, nunquam eſt in ellipſis centro, ſed in alterutro foco F in axe primo magis, minuſve elongatæ ellipſis A *a* X *x* A.

758. DEFINITIO II. Ellipſis parametrum habet, ut parabola. *Ellipſeos parameter* eſt tertia proportionalis axi primo, & ſecundo (413). Quare ad ellipſeos, cujus noti ſint axes, parametrum habendam fiat analogia, axis primus A ad ſecundum *a*, ut hic *a* ad parametrum *p*. Hoc eſt $A : a :: a : p$. Ergo $A p = a^2$.

In quovis ſectionum conicarum tractatu oſtenditur, parametrum ellipſeos æqualem eſſe duplici ordinatæ *p* F *p*, ſeu *p f p* per alterutrum focum tranſeunti, & axi primo A X perpendiculari.

Ut clarior fiat ellipſeos theoria ejus aliam geneſim a præcedente problemate deſcendentem trademus (*Fig.* 106).

759. APPLICATIO. Data in plano recta quavis AX, in qua ad libitum ſumpta fuerint pun-

puncta duo F, *f* ab extremis A, X æque diſtantia, extra hanc lineam cape infinita puncta ſucceſſiva A B *a* D X E *x* G A ita, ut ſumma diſtantiarum cujuslibet ex his punctis a duobus punctis F, *f* conſtans ſit, & ſemper datæ AX æqualis. *Curva per hæc omnia puncta tranſiens erit ellipſis* (*Fig.* 106).

Vel data recta AX indefinita, in utroque puncto dato F, *f* ſtylum defige; & extrema funiculi magis, minuſve longi ſtylis his alliga. Dein altero ſtylo, quem plano perpendicularem, & funiculo inſertum tenebis ita, ut funiculum ſemper æque diſtendat, curvam circa ſtylos defixos deſcribe. *Curva hæc quoque erit ellipſis*. Recta AX erit axis primus, *ax* ſecundus; punctum C centrum; puncta F, *f* a centro æque diſtantia, & ab axis primi extremis, erunt foci.

I. Per conſtructionem, linea quævis F B *f*, ſeu F E *f*, a foco ad peripheriam, & ab hac ad alterum focum ducta axi primo AX æqualis eſt: duæ enim partes rectæ F B *f* ſunt toti funiculo æquales, ut & linea F X *f* = A X.

II. Per conſtructionem quoque hujus ellipſeos curvatura utrinque ad æqualem ab utraque axis primi extremitate diſtantiam æqualis eſt. Quare curvatura æqualis eſt in D & E, in A & X, in G & B, in *a* & *x*.

At flexus hic utrinque minuitur ab alterutra axis primi extremitate ad ambas axis ſecundi extremitates. Quare ellipſis maxime depreſſa eſt in *a*, & *x*, minime depreſſa, ſeu maxime curvata eſt in A, & X.

III. Per conſtructionem tandem puncta *a*, & *x* a focis æque diſtant: rectæ F *a*, *f a* ſimul ſumptæ axi primo AB ſunt ęquales: focus uterque a centro, & ab axis primi extremis, tum ab extremis ſecundi æque diſtat.

760. NOTA. Si planetæ, aut cometæ centrum ſupponatur hanc curvam deſcribere circa

ca ſolem in foco alterutro F immobilem (*fig.* 106).

I. Recta quævis FA, FD, FE, FX a centro ſolis ad centrum planetæ, aut cometę ducta dicitur *radius vector* planetę, ſeu cometæ.

II. Planeta, ſeu cometa erit *in ſua media diſtantia* in *a*, & *x*: *in maxima diſtantia*, ſive *in aphelio* in X: *in minima diſtantia*, ſive *in perihelio* in A: recta FC eſt ejus *excentricitas*.

CIRCULI OSCULATORES.

761 OBSERVATIO. Quum ellipſis ſit curva infinitorum laterum inæqualis curvaturæ, poterunt tria puncta contigua arcus elliptici eſſe communia tribus punctis contiguis peripheriæ majoris, minoriſve circuli (*fig.* 106).

Poſito enim puncto medio arcus elliptici BAG ſuperpoſito puncto medio arcus circularis *b*A*g*; concipimus arcum circularem diſtendi, aut contrahi poſſe in infinitum, donec duo puncta contigua arcus circularis cadant in duo puncta contigua arcus elliptici.

762. DEFINITIO. Circulus, cujus tria puncta contigua cadant in tria puncta contigua ellipſeos, dicitur *circulus oſculator*. Circulus hic evidenter dari poteſt ex præcedente obſervatione. Hic ejus naturæ, & uſus notionem trademus (*fig.* 106).

I. Patet, circulum oſculatorem eo *majorem* fieri, quo arcus infinite parvus, quem tangit in concava ellipſeos parte, depreſſior eſt; eumque eo *minorem* fieri, quo arcus ellipticus, quem tangit, magis curvatus eſt.

Quamobrem tot ſunt circuli ellipſeos oſculatores, quot in toto arcu AB*a*, qui ejus quarta pars eſt, puncta ſunt. Circulus oſculator puncti A, vel X minimus eſt; puncti *a*, vel

x,

x, maximus. Radius circuli oſculatoris creſcit a puncto A ad *a*; minuitur deinde a puncto *x* ad X. Pari modo radius circuli oſculatoris creſcit ab X ad *x*; minuitur ab *x* ad A.

II. Radius circuli oſculatoris in A, & X cadit in axem primum AX; nunquam tamen uſque ad centrum C ellipſeos pertingit; flexus enim ellipſeos major eſt flexu circuli, cujus radius eſſet dimidius axis primus CA. Debet ergo arcus circuli magis contrahi, & ejus radius AF breviari citra centrum C.

Radius circuli oſculatoris in *a*, & *x* cadit in axem ſecundum; ſed pertingit in *n* magis minuſve ultra ellipſeos centrum C; flexus enim ellipſeos minor eſt in *a*, & *x*, quam ſit flexus circuli, cujus radius eſſet dimidius axis ſecundus. Debet ergo arcus circuli magis diſtendi, & ejus radius ultra centrum C protrahi.

In punctis intermediis radius circuli oſculatoris fit alternatim major, & minor pro minori, aut majori arcus curvatura. Tunc vero radius nec in axes cadit, nec ad elipſeos centrum dirigitur.

III. Aſtronomi *circulum oſculatorem* excogitarunt, ut arcus curvæ a circulo diverſæ ad arcus circuli referrent; ſive ut arcum quemvis infinite parvum curvæ a circulo diverſæ ſumere poſſent pro arcu circuli, cujus curvatura eadem eſſet, quæ hujus minimi arcus, cum quo æqualis circuli arcus confunditur. Arcus hic infinite parvus curvæ a circulo diverſæ, puta ellipſeos, evidenter eaſdem habebit proprietates, & eadem dabit conſectaria, quæ daret, ſi ad circulum ſpectaret, cum quo comparatur. Circulus oſculator in parabola, & hyperbola æque ac in ellipſi haberi poteſt.

PRO-

PROBLEMA.

763. *Tangentem ad ellipſim, cujus primus axis, & radius vector notus ſit, invenire (fig. 108).*

SOLUTIO I. Dato in ellipſi SxXsS puncto quovis M, produc radium vectorem *f*M ita, ut MV = MF; & a puncto F ad V duc rectam.

II. Rectam FV biſeca in *m* perpendiculari PMN: erit hæc *tangens ellipſeos in puncto* M.

DEMONSTRATIO I. In triangulo rectilineo MFVM latera MV, MF ſunt æqualia per conſtructionem. Si ergo a puncto M radio MV, vel MF deſcribatur circulus VPF; punctum M erit ſimul punctum ellipſeos, vertex trianguli MFVM, & centrum circuli VPF.

III. Si chorda V*m*F biſecta eſt a perpendiculari NP, hæc indefinite producta tranſibit per centrum circuli in M (407), quod eſt punctum ellipſeos.

IV. Perpendicularis PMN indefinite producta ellipſim non ſecabit: tranſibit enim per omnia puncta æque diſſita ab F, & V (320). Atqui puncta ellipſeos infra, aut ſupra punctum M ſemper magis, magiſque ab V, & F recedunt; ergo puncta omnia ellipſeos infra, aut ſupra M propinquiora erunt ipſi F, quam ipſi V; & erunt infra, & extra tangentem PMN per puncta omnia æque diſſita ab F, & V tranſeuntem. Patet, quodvis punctum *x* ellipſeos infra, aut ſupra M propinquius eſſe ipſi F, quam ipſi V. Ergo recta PMN ellipſim non tangit niſi in puncto M, & ad punctum hoc M tangens eſt.

Pari ratione recta ST, quæ arcum FSK bifariam ſecat, tangens eſt ad punctum *a*.

V. Si pro radio vectore ſumatur radius FM, hic producendus erit, donec M*v* = M*f*. Dein deſcribatur arcus *v*N*f*. Recta NM, quæ, & hunc

hunc arcum, & ejus chordam biſariam ſecat, erit tangens ad punctum M; quod demonſtrabitur, ut demonſtravimus, rectam PM eſſe tangentem ad idem punctum. Q. E. D.

SPECULA ELLIPTICA.

764. NOTA. Angulus VMF a recta, ſeu tangente NMP biſariam ſecatur (407). Ergo PMV = PMF. Atqui PMV = NM*f* (343); ergo PMF = NM*f*. Quare (*fig.* 108),

I. Si radius lucis a foco quovis F dirigatur ad punctum quodvis M intimæ peripheriæ ellipſeos, reflectetur ad alium focum *f* faciens angulum reflexionis NM*f* angulo incidentiæ FMP æqualem. Punctum enim M ellipſeos, in quo radius iſte reflectitur, eſt planum infinite parvum, quod tangentis PMN pars eſt.

II. Angulus quoque *v*M*f* a tangente NM biſariam ſecatur: quare angulus *f*MN æqualis eſt angulo *v*MN; & hic angulo ad verticem oppoſito FMP. Ergo radius lucis *f*M a puncto *f* emiſſus reflectetur in F faciens angulum reflexionis PMF angulo incidentiæ NM*f* æqualem.

Pari modo angulus F*a*K a tangente ST biſariam ſecatur; & radius lucis *fa* reflectetur in F faciens angulum reflexionis S*a*F angulo incidentiæ T*af* æqualem.

III. Si curva elliptica SMX circa axem SX converteretur, deſcriberet *ſolidum elliptico-concavum* aptum ad idem punctum F radios omnes reflectere lampadis accenſæ in puncto *f* collocatæ; & reciproce. Segmentum *xSs* hujus ſolidi eſſet *ſpeculum concavum ellipticum*.

PA-

tem habetur analogia; $\overline{nm}^2 : \overline{NM}^2 :: nb \times nd : NB \times ND$.

Et propter parallelas AB, SN, quæ dant $nb = NB$ habebimus $\overline{nm}^2 : \overline{NM}^2 :: nb : ND$: (220).

III. Sed ob triangula ſimilia Snd, SND, habetur analogia $nd : ND :: Sn : SN$.

Ergo huic præcedentem analogiam comparando, $\overline{nm}^2 : \overline{NM}^2 :: Sn : SN$ (168). Atqui hoc ſignificat, quadrata ordinatarum nm, NM eſſe inter ſe, ut abſciſſas analogas nS, NS. Ergo curva MSM eſt parabola deſcriptis in plano ſimilis; eaſdem quippe habet proprietates, quum eadem ſuarum ordinatarum, & abſciſſarum ratio ſit (741). Q. E. D.

THEOREMA II.

767. *In ellipſi quadrata ordinatarum ſunt ut rectangula ſub analogis abſciſſis* (*fig.* 112).

DEMONSTRATIO I. Per ſectionem ellipticam RER tranſeant duo plana baſi coni parallela: erunt hæc duo circuli vxv, VXV, quæ planum ſectionis ellipticæ ſecabunt; & ut in præcedente theoremate, nm, NM erunt ordinatæ circulis, & ellipſi communes. Tranſeat quoque planum per punctum A, & per axem ENR ſectionis ellipticæ: habebimus triangulum BAD, cujus latera tranſibunt per extrema axis primi ellipſeos.

II. Per præcipuam circuli proprietatem (410) erit $\overline{nm}^2 : \overline{NM}^2 :: nx \times nv : NX \times NV$.

At ob triangula ſimilia Env, ENV, $nv : NV :: En : EN$; Et per alia triangula ſimilia RNX, Rnx, $nx : NX :: Rn : RN$.

III. Ductis invicem his duabus poſtremis proportionibus, producta erunt adhuc proportionalia (224); $nv \times nx : NV \times NX :: En \times nR : EN \times RN$.

Reſumpta igitur prima proportione habebimus; $\overline{nm}^2 : \overline{NM}^2 :: En \times nR : EN \times RN$.

Atqui in poſtrema hac proportione termini ſecundæ rationis ſunt rectangula ſub abſciſſis analogis; ergo in hac curva quadrata ordinatarum ſunt ut rectangula ſub abſciſſis analogis.

IV. Si juxta theoriam alibi traditam (749) ellipſis in plano deſcribatur, & oblique ſecetur duobus circulis, quorum peripheriæ ſingulæ incurrant in puncta curvæ ellipticæ æque diſtantia a vertice E, vel R; eodem modo oſtendetur, in hac ellipſi quadrata ordinatarum eſſe inter ſe ut rectangula ſub analogis abſciſſis. Quare curva RER eſt ellipſis æque, ac curva in plano deſcripta; eandem enim naturam habet, eaſdemque proprietates, quum eadem inter ordinatas, & abſciſſas ratio intercedat. De curva itaque RER ea omnia quæ de ellipſi in plano deſcripta dicta ſunt, dici poſſunt. Q. E. D.

THEOREMA III.

368. *In quavis hyperbola quadrata ordinatarum ſunt ut rectangula ſub abſciſſis analogis* (*fig.* 125).

DEMONSTRATIO. Sit hyperbola IHP, cujus ordinata ſit PK, & cujus abſciſſæ analogæ ſint HK, OK (738 V.). Demonſtrandum eſt, $\overline{PK}^2 : \overline{pk}^2 :: HK \times OK : Hk \times Ok$.

I. Ob circulos parallelos BDB, *bdb*, erit ex præcipua circuli proprietate, $\overline{PK}^2 = KD \times KB$; & $\overline{pk}^2 = kd \times kb$. Ergo $\overline{PK}^2 : \overline{pk}^2 :: KD \times KB : kd \times kb$.

II. Ob triangula ſimilia BKO, *bk*O, eſt KB : *kb* :: KO : *k*O.

Ductis ergo invicem duabus poſtremis proportionibus habebimus; $KD \times KB : kd \times kb :: HK \times OK : Hk \times Ok$.

III.

III. Habuimus primum $\overline{PK}^2 : \overline{pk}^2$ ::HK×OK: Hk × Ok. Ergo quum in poſtremis his proportionibus ſecunda ratio eadem ſit, duæ primæ rationes æquales ſunt, & altera alteri ſubſtitui poteſt; ergo, $\overline{PK}^2 : \overline{kp}^2$ :: HK × OK:Hk × Ok. Atqui poſtrema hæc proportio dicit; quadrata ordinatarum eſſe ut rectangula ſub abſciſſis analogis, ut annunciat problema; ergo ita eſt. Q. E. D.

769. HYPOTHESIS. *Sit conus rectus BAD indefinitus (fig. 125).*

I. Conus hic per verticem ſecetur plano baſi perpendiculari: ſectio erit triangulum MAN.

Secetur quoque ad latus in H plano baſi perpendiculari, & plano trianguli parallelo: ſectio erit hyperbola IHP.

II. Si ſectio triangularis, & hyperbolica ſupponantur eidem plano impoſitę, ita ut a lateribus trianguli comprehendantur *rami* curvæ hyperbolicæ, quin illos tangant, latera hæc trianguli erunt *aſymptoti hyperbolæ*. Hic tantum hyperbolæ ramos, & aſymptotos in cono conſiderabimus.

THEOREMA IV.

770. *In hyperbola rami ad aſymptotos, quantumvis producantur, ſemper magis accedunt, at nunquam illos tangunt (Fig. 125).*

DEMONSTRATIO I. Suppoſitis hic duabus ſectionibus, de quibus in hypotheſi præcedente; patet, latera trianguli MAN inſiſtere diametro MN circuli, qui eſt baſis coni; & ramos hyperbolæ parallelæ IHP inſiſtere chordæ PI ejuſdem circuli diametro parallelæ.

Jam vero quo magis conus producetur, eo magis augebitur circulus baſeos; & quo major hic fiet, eo magis chorda, quæ quantitate tantum determinata, puta unius pedis, a circuli

centro diſtat, accedet ad æqualitatem cum diametro hujus circuli. Ergo rami hyperbolæ inſiſtentes chordæ diametro parallelæ magis, magiſque in infinitum accedent ad latera trianguli diametro inſiſtentis.

II. Verum quantumvis productus conus ſupponatur, quantumvis magnus ſupponatur baſis circulus; aperte patet, chordam ſemper diametro minorem fore: ergo rami hyperbolæ nunquam divaricatione trianguli latera æquabunt.

III. At ſi modo concipiantur rami hyperbolæ eſſe in eodem plano cum triangulo, hujus latera erunt hyperbolæ aſymptoti. Ergo in hyperbola rami in infinitum ad aſymptotos accedunt, quin eas, quantumvis producantur, unquam attingant. Q. E. D.

THEOREMA V.

171. *Planum conum ſecans figuras in illo facere nequit a triangulo, circulo, ellipſi, parabola, & hyperbola diverſas* (*fig.*107, & 112).

DEMONSTRATIO. Planum conum ſecat vel per verticem, vel per aliquod ſuperficiei punctum.

I. Si per verticem; patet, ſectionem fore triangulum baſi vel perpendiculare, vel obliquum.

II. Si per punctum aliquod ſuperficiei; fieri poteſt, ut planum ſecans infinite productum a cono exeat infinite producto, aut intra conum perſeveret cujus baſis eo magis creſcit, quo magis in infinitum a vertice recedit.

In prima hypotheſi, planum ſecans e cono exiens, vel erit baſi parallelum; & tunc ſectio erit circulus; vel ad baſim inclinatum. & tunc ſectio erit ellipſis.

In altera hypotheſi, planum ſecans, & intra conum permanens indefinite productum, erit vel coni lateri parallelum; & tunc ſectio erit

erit parabola; vel coni lateri non parallelum, & tunc ſectio erit hyperbola (738). Ergo nequit planum in cono ſectiones facere, præter memoratas, quæ quinque ſectiones conicæ nuncupantur. Q. E. D.

772. COROLLARIUM. *In ſectionibus conicis ellipſis tantum, & circulus ſunt curva regulares in ſe redeuntes.* Triangulum enim, parabola, & hyperbola in infinitum divaricantur in ſuperficie ſemper creſcente coni indefinite producti.

773. CONCLUSIO. Hæc præcipua, & utiliora ſunt e conicis ſectionibus excerpta. Hæc addita ceteris, quæ hoc opere traduntur, ſatis ſuperque ſunt ad ſcientiarum, & artium amantem in magis abdita naturæ penetralia ducendum, tum ad ea addiſcenda, quæ in phyſicomathematicis diſciplinis utiliora, & illuſtriora ſunt, & magis apta ad humanam mentem novis, præclariſque cognitionibus imbuendam.

Finis Geometriæ.

TABULÆ SINUUM

MONITUM.

IN trigonometria rectilinea oſtendimus qua ratione omnium quorumcumque angulorum, & arcuum ſinus inveniri poſſint (697), & quinam ſinuum ſit uſus, quorum perfectæ tabulæ laborioſiſſimis ſupputationibus, & accuratiſſimis conſtructæ fuerunt (702). *Tabula* ſinuum, quas adjicimus, ab ampliſſimis Ulacii, & Ozananii deſumptæ ſunt, quarum accuratio geometris omnibus nota eſt.

Quum fere perpetuo tabulis ſinuum in geometria, & phyſica indigeamus; gratum nos facturos arbitrati ſumus, ſi in uno eodemque opere id exhiberemus, quod in harum diſciplinarum ſtudio omnino neceſſarium eſt (708).

OBSERVATIO I.

I. In his tabulis invenies ſinus omnes *angulorum acutorum* ad rectum uſque; ſeu ſinus angulorum omnium ab uno minuto ad 90 gradus incluſive.

II. Sinus angulorum obtuſorum quum iidem ſint, qui acutorum, qui eorum ſupplementa ſunt (636); jam ad habendum ſinum anguli obtuſi ſumendus eſt ſinus ejus ſupplementi. Exemplum. Ut ex tabulis habeas ſinum anguli 124 graduum, & 17 minutorum, ſubduc a gradibus $180 = 179^\circ + 60'$ angulum obtuſum datum $124^\circ + 17'$: reſiduum $55^\circ + 43'$ erit angulus ſupplementi, cujus ſinus, $55^\circ + 43'$ erit ſinus anguli obtuſi dati $124^\circ + 17'$.

III. Sinus totus in tabulis ponitur partium 10000000. Numerus alios ſinus exprimens decreſcit proportionaliter, ut ſinus. Quare quum ſinus eſt ſubduplus radii, ſeu ſinus totius, nume-

merus illum exprimens eſt ſubduplus numeri ſinum totum exprimentis, atque ita porro.

IV. Quum ſumma præciſione in calculo trigonometrico non indigemus, poſtremæ duæ notæ punctum ſequentes in ſupputatione omittuntur. Verum unitate augetur nota præcedens punctum interjectum, qum duæ notæ ſequentes valent ſupra 50 (697).

V. In tabulis ſinus minuto minores non inveniuntur. Exempli cauſa, non invenitur ſinus 20, aut 30 ſecundorum, quo tamen aliquando, in aſtronomia præſertim indigemus. Ut huic incommodo occurreremus, methodum tradidimus facillimam, & ſimpliciſſimam, qua communes tabulæ ſinuum in tabulas ſinuum ſecundorum mutantur (717).

OBSERVATIO II.

Hic adnotare opportunum eſt.

I. Sinus a minuto ad minutum ſequens creſcere quantitate ſatis conſtante.

II. Hoc augmentum decreſcere quo magis creſcit angulus; & ad ſenſum fieri nullum, quum angulus recto proximus eſt.

III. Si qua nota male excuſa ſit, facile ex ſinu præcedente, & ſequente quænam eſſe debeat inveniri poſſe.

IV. Facile eodem modo dignoſci poſſe, num in ſinum, quo utimur ad triangulum reſolvendum, error irrepſerit, ſi quando de hoc dubitemus.

OBSERVATIO III.

In trigonometria vidimus qua ratione *chorda omnium arcuum* inveniantur ab uno minuto ad gradus 180; & qua ratione ſumptis ſucceſſive omnibus chordis inventis dimidiis *omnium arcuum ſinus*, & omnium angulorum habeantur,

quorum hi arcus menſura ſunt, ab angulo unius minuti ad angulum 90 graduum.

Quum modo ſinus in tabulis noti ſupponantur, & quum quivis ſinus ſit *dimidia chorda*, quæ arcum duplum ſubtenderet; jam ope harum tabularum facile invenientur *chordæ ignotæ arcuum quorumcunque*: ad hoc enim ſatis eſt ſinum dimidii hujus arcus duplicare. Exempli cauſa; ad habendam chordam arcus 21 graduum ſume bis ſinum arcus 10°, 30′.

Ad calcem tabularum invenies tangentes, & ſecantes arcuum omnium ab uno minuto ad minuta 60. Harum uſus frequentior in libellatione præſertim. Reliquæ, quum opus fuerit, facile ſupputatione invenientur (723, & 724).

TA-

0 GRADUS. 1 GRADUS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	0	30	872.65	0	1745.24	30	2617.69
1	29.09	31	901.74	1	1774.32	31	2646.77
2	58.18	32	930.83	2	1083.41	32	2675.85
3	87.27	33	959.92	3	1832.49	33	2704.93
4	116.36	34	989.00	4	1861.58	34	2734.01
5	145.44	35	1018.00	5	1890.66	35	2763.09
6	174.53	36	1047.18	6	1919.74	36	2792.16
7	203.62	37	1076.27	7	1948.83	37	2821.24
8	232.71	38	1105.35	8	1977.91	38	2850.32
9	261.80	39	1134.44	9	2006.99	39	2879.40
10	290.89	40	1163.53	10	2036.08	40	2908.47
11	319.98	41	1192.61	11	2065.16	41	2937.55
12	349.06	42	1221.70	12	2094.24	42	2966.62
13	378.15	43	1250.79	13	2123.32	43	2995.70
14	407.24	44	1279.87	14	2152.41	44	3021.78
15	436.33	45	1308.96	15	2181.49	45	3053.85
16	465.42	46	1338.05	16	2210.57	46	3082.93
17	494.51	47	1367.13	17	2239.65	47	3112.00
18	523.60	48	1396.22	18	2268.73	48	3141.08
19	552.68	49	1425.30	19	2297.81	49	3170.15
20	581.77	50	1454.39	20	2326.90	50	3199.22
21	610.86	51	1483.48	21	2355.98	51	3228.30
22	639.95	52	1512.56	22	2385.06	52	3257.37
23	669.04	53	1541.65	23	2414.14	53	3286.44
24	698.13	54	1570.73	24	2443.22	54	3315.52
25	727.21	55	1599.82	25	2472.30	55	3344.59
26	756.30	56	1628.90	26	2501.38	56	3373.66
27	785.39	57	1657.99	27	2530.46	57	3402.73
28	814.48	58	1687.07	28	2559.54	58	3431.81
29	843.58	59	1716.16	29	2588.62	59	5460.88
30	872.65	60	1745.24	30	2617.69	60	3489.95

2 GRADUS.				3 GRADUS.			
M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
0	3489.95	30	4361.94	0	5233.60	30	6104.85
1	3519.02	31	4391.00	1	5262.64	31	6133.89
2	3548.09	32	4420.06	2	5291.69	32	6162.92
3	3577.16	33	4449.12	3	5320.74	33	6191.96
4	3606.23	34	4478.18	4	5349.79	34	6220.99
5	3635.30	35	4507.24	5	5378.83	35	6250.02
6	3664.37	36	4536.30	6	5407.88	36	6279.05
7	3693.44	37	4565.36	7	5436.93	37	6308.08
8	3722.51	38	4594.42	8	5465.97	38	6337.11
9	3751.58	39	4623.47	9	5495.02	39	6366.14
10	3780.65	40	4652.53	10	5524.06	40	3395.17
11	3809.71	41	4681.59	11	5553.11	41	6424.20
12	3838.78	42	4710.62	12	5582.15	42	6453.23
13	3867.85	43	4739.70	13	5611.19	43	6482.26
14	3896.91	44	4768.76	14	5640.24	44	6511.29
15	3925.98	45	4797.81	15	5669.28	45	6540.31
16	3955.05	46	4826.87	16	5698.32	46	6569.34
17	3984.11	47	4855.92	17	5727.36	47	6598.36
18	4013.18	48	4884.98	18	5756.40	48	6627.39
19	4042.24	49	4914.03	19	5785.44	49	6656.41
20	4071.31	50	4943.08	20	5814.48	50	6685.44
21	4100.37	51	4972.14	21	5843.52	51	6714.46
22	4129.44	52	5001.19	22	5872.56	52	6743.48
23	4158.50	53	5030.24	23	5901.60	53	6772.51
24	4187 57	54	5059.29	24	5930.64	54	6801.53
25	4216.63	55	5088.35	25	5959.67	55	6830.55
26	4245.69	56	5117.40	26	5988.71	56	6859.57
27	4274.75	57	5146.45	27	6017.75	57	6888.59
28	4303.82	58	5175.50	28	6046.78	58	6917.61
29	4332.88	59	5204.55	29	6075.82	59	6946.63
30	4361.94	60	5233.60	30	6104.85	60	6975.65

4 GRADUS. 5 GRADUS.

M	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
0	6975.65	30	7845.91	0	8715.57	30	9584.58
1	7004.66	31	7874.91	1	8744.55	31	9613.53
2	7033.68	32	7903.91	2	8773.53	32	9642.48
3	7062.70	33	7932.90	3	8802.51	33	9671.44
4	7091.71	34	7961.90	4	8831.48	34	9700.39
5	7120.73	35	7990.90	5	8860.46	35	9729.34
6	7149.74	36	8019.89	6	8889.43	36	9758.29
7	7178.76	37	8048.89	7	8918.40	37	9787.24
8	7207.77	38	8077.88	8	8947.38	38	9816.19
9	7236.78	39	8106.87	9	8976.35	39	9845.14
10	7265.80	40	8135 87	10	9005.32	40	9874.08
11	7294.81	41	8164.86	11	9034.29	41	9903.03
12	7323.82	42	8193.85	12	9073.26	42	9931.97
13	7352.83	43	8222.84	13	9092.23	43	9960.92
14	7381.84	44	8251.83	14	9121.19	44	9989.81
15	7410.85	45	8280.82	15	9150.16	45	10018.81
16	7439.86	46	8309.81	16	9179.13	46	10047.75
17	7468.87	47	8338.80	17	9208.09	47	10076.69
18	7497.87	48	8367.87	18	9237.06	48	10105.63
19	7526.88	49	8396.77	19	9266.02	49	10134.57
20	7555.89	50	8425.76	20	9294.99	50	10163.51
21	7584.89	51	8454.74	21	9323.95	51	10192.45
22	7613.90	52	8483.73	22	9352.91	52	10221.38
23	7642.90	53	8512.71	23	9381.87	53	10250.32
24	7641.90	54	8541.69	24	9419.83	54	10279.25
25	7700.91	45	8570.67	25	9439.79	55	10308.19
26	7729.91	56	8599.66	26	9468.75	56	10337.12
27	7758.91	57	8528.64	27	9497.71	57	10366.05
28	7787.91	58	8657.62	28	9526.66	58	10394.99
29	7816.91	59	8686.60	29	9555.62	59	10423.92
30	7845.91	60	8715.57	30	9584.58	60	10452.85

6 GRADUS.				7 GRADUS.			
M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	10452.85	30	11320.32	0	12186.93	30	13052.62
1	10481.78	31	11349.22	1	12215.81	31	13081.46
2	10510.70	32	11378.12	2	12244.68	32	13110.30
3	10539.63	33	11407.02	3	12273.55	33	13139.13
4	10568.56	34	11435.92	4	12302.41	34	13167.97
5	10597.48	35	11464.82	5	12331.28	35	13196.81
6	10626.41	36	11493.71	6	12360.15	36	13225.64
7	10655.33	37	11522.61	7	12389.01	37	13254.47
8	10684.25	38	11551.51	8	12417.88	38	13283.30
9	10713.18	39	11580.40	9	12446.74	39	13312.13
10	10742.10	40	11609.20	10	12475.60	40	13340.96
11	10771.02	41	11638.18	11	12504.46	41	13369.79
12	10799.94	42	11667.07	12	12533.32	42	13398.62
13	10828.85	43	11695.96	13	12562.18	43	13427.44
14	10857.77	44	11724.85	14	12591.04	44	13456.27
15	10887.69	45	11753.74	15	12619.90	45	13485.09
16	10915.60	46	11782.63	16	12648.75	46	13513.92
17	10944.52	47	11811.51	17	12677.61	47	13542.74
18	10973.43	48	11840.40	18	12706.46	48	13571.56
19	11072.34	49	11869.28	19	12735.31	49	13600.38
20	11031.26	50	11898.16	20	12764.16	50	13629.19
21	11060.17	51	11927.04	21	12793.01	51	13658.01
22	11089.08	52	11955.93	22	12821.86	52	13686.83
23	11117.99	53	11984.81	23	12850.71	53	13715.64
24	11146.89	54	12013.68	24	12579.56	54	13744.45
25	11175.80	55	12042.56	25	12908.41	55	13773.27
26	11204.71	56	12071.44	26	12937.25	56	13802.08
27	11233.61	57	12100.31	27	12966.09	57	13830.89
28	11262.52	58	12119.19	28	12994.94	58	13859.70
29	11291.42	59	12158.06	29	13023.78	59	13888.50
30	11320.32	60	12186.93	30	13052.62	60	13917.31

8 GRADUS.				9 GRADUS.			
M	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
0	13917.31	30	14780.94	0	15643.45	30	16504.76
1	13946.12	31	14809.71	1	15672.18	31	16533.45
2	13974.91	32	14838.48	2	15700.91	32	16562.14
3	14003.72	33	14867.24	3	15729.63	33	16590.82
4	14032.52	34	14896.01	4	15758.36	34	16619.51
5	14061.32	35	14924.77	5	15787.08	35	16648.19
6	14090.12	36	14953.53	6	15825.81	36	16676.87
7	14118.92	37	14982.30	7	15844.53	37	16705.55
8	14147.72	38	15011.06	8	15873.25	38	16734.23
9	14176.51	39	15039.81	9	15901.97	39	16762.91
10	14205.31	40	15068.57	10	15930.69	40	16791.95
11	14234.10	41	15097.33	11	15959.40	41	16820.26
12	14262.89	42	15126.08	12	15988.12	42	16848.94
13	14291.68	43	15154.84	13	16016.83	43	16877.61
14	14320.47	44	15183.59	14	16045.55	44	16906.28
15	14349.26	45	15212.34	15	16074.26	45	16934.95
16	14378.05	46	15241.09	16	16102.97	46	16963.62
17	14405.84	47	15269.84	17	16131.67	47	16992.28
18	14435.62	48	15298.58	18	16160.38	48	17020.95
19	14464.40	49	15327.33	19	16189.09	49	17049.61
20	14493.19	50	15356.07	20	16217.79	50	17078.28
21	14521.97	51	15384.82	21	16246.50	51	17106.94
22	14550.75	52	15413.56	22	16275.20	52	17135.60
23	14579.53	53	15442.30	23	16303.90	53	17164.25
24	14608.30	54	15471.04	24	16332.60	54	17192.91
25	14637.08	55	15499.78	25	16361.29	55	17221.56
26	14665.85	56	15528.51	26	16389.99	56	17250.22
27	14694.63	57	15557.25	27	16418.68	57	17278.87
28	14723.40	58	15585.98	28	16447.38	58	17307.52
29	14752.17	59	15614.72	29	16476.07	59	17336.17
30	14780.94	60	15643.45	30	16504.76	60	17364.82

10 GRADUS. 11 GRADUS.

10 GRADUS.				11 GRADUS.			
M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	17364.82	30	18223.55	0	19080.90	30	19936.79
1	17393.46	31	18252.25	1	19109.45	31	19965.30
2	17422.11	32	18280.75	2	19138.00	32	19993.80
3	17450.75	33	18309.35	3	19166.55	33	20022.30
4	17479.39	34	18337.95	4	19195.10	34	20050.80
5	17508.03	35	18366.54	5	19223.65	35	20079.30
6	17536.67	36	18395.13	6	19252.20	36	20107.79
7	17565.31	37	18423.73	7	19280.74	37	20136.29
8	17593.95	38	18452.32	8	19309.28	38	20164.78
9	17622.58	39	18480.91	9	19337.82	39	20193.27
10	17651 21	40	18509.49	10	19366.36	40	20221.76
11	17679.84	41	18538.08	11	19394.90	41	20250.24
12	17708.47	42	18566.66	12	19423.44	42	20278.73
13	17737.10	43	18595.24	13	19451.97	43	20307.21
14	17765.73	44	18623.82	14	19480.50	44	20335.69
15	17794.35	45	18652.40	15	19509.03	45	20364.17
16	17822.98	46	18680.98	16	19537.56	46	20392.65
17	17851.6	47	18709.56	17	19566.09	47	20421.13
18	17889.22	48	18738.13	18	19594.61	48	20449.61
19	17908.84	49	18766.70	19	19623.14	49	20478.08
20	17937.46	50	18795.27	20	19651.66	50	20506.55
21	17966.07	51	18823.84	21	19680.18	51	20535.02
22	17994.69	52	18852.41	22	19708.70	52	20563.49
23	18023.30	53	18880.98	23	19737.22	53	20591.95
24	18051.91	54	18909.54	24	19765.73	54	20620.42
25	18080.52	55	18938.11	25	19794.25	55	20648.88
26	18109.13	56	18966.67	26	19822.76	56	20677.34
27	18137.74	57	18995.33	27	19851.27	57	20705.80
28	18166.35	58	19023.79	28	19879.78	58	20734.26
29	18194.95	59	19052.34	29	19908.29	59	20762.71
30	18223.55	60	19080.90	30	19936.79	60	20791.17

12 GRADUS. 13 GRADUS.

Sinus.	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
20791.17	30	21643.96	0	22495.11	30	23344.54
20819.62	31	21672.36	1	22523.45	31	23372.82
20848.07	32	21700.76	2	22551.79	32	23401.10
20876.52	33	21729.15	3	22580.13	33	23429.38
20904.97	34	21757.54	4	22608.46	34	23457.66
20933.41	35	21785.93	5	22636.80	35	23485.94
20961.86	36	21814.32	6	22665.13	36	23514.21
20990.30	37	21842.71	7	22693.46	37	23542.48
21018.74	38	21971.10	8	22721.79	38	23570.75
21047.18	39	21899.48	9	22750.12	39	23599.02
21075.61	40	21927.86	10	22778.44	40	23627.29
21104.05	41	21956.24	11	22806.77	41	23655.55
21132.48	42	21984.62	12	22835.09	42	23683.81
21160.91	43	22013.00	13	22863.41	43	23712.07
21189.34	44	22041.37	14	22891.72	44	23740.33
21217.77	45	22069.74	15	22920.04	45	23768.59
21246.19	46	22098.11	16	22948.35	46	23796.84
21274.62	47	22126.48	17	22976.66	47	23825.10
21303.04	48	22154.85	18	23004.97	48	23853.35
21331.46	49	22183.21	19	23033.28	49	23881.59
21359.88	50	22211.58	20	23061.59	50	23909.84
21388.29	51	22239.94	21	23089.89	51	23938.08
21416.71	52	22268.30	22	23118.19	52	23966.33
21445.12	54	22296.66	23	23146.46	53	23994.57
21473.53	53	22325.01	24	23174.79	54	24022.88
21501.94	55	22353.37	25	23203.09	55	24051.04
21530.35	56	22381.72	26	23231.38	56	24079.27
21558.76	57	22410.07	27	23259.67	57	24107.51
21587.16	58	22438.41	28	23287.96	58	24135.74
21615.56	59	22466.76	29	23316.25	59	24163.96
21643.96	60	22495.11	30	23344.54	60	24192.19

14 GRADUS.				15 GRADUS.			
M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
0	24192.19	30	25038.00	0	25881.90	30	26723.84
1	24220.41	31	25066.16	1	25910.00	31	26791.87
2	24248.63	32	25094.31	2	25938.10	32	26779.89
3	24376.85	33	25122.48	3	25966.19	33	26807.92
4	24305.07	34	25150.63	4	25994.28	34	26835.94
5	24333.29	35	25178.79	5	26022.37	35	26863.96
6	24361.50	36	25206.94	6	26050.45	36	26891.98
7	24389.71	37	25235.08	7	26078.53	37	26920.00
8	24417.92	38	25263.23	8	26106.61	38	26948.01
9	24446.13	39	25291.37	9	26134.69	39	26976.02
10	24474.33	40	25319.52	10	26162.77	40	27004.03
11	24502.54	41	25347.66	11	26190.85	41	27032.04
12	24530.74	42	25375.79	12	26218.92	42	27060.04
13	24558.94	43	25403.93	13	26246.99	43	27088.05
14	24587.13	44	25432.06	14	26275.06	44	27116.05
15	24615.33	45	25460.19	15	26303 12	45	27144.04
16	24643.52	46	25488 32	16	26331.18	46	27172.14
17	24671.71	47	25516.45	17	26359.24	47	27200.03
18	24699.90	48	25544.58	18	26387 30	48	27228.02
19	24728 09	49	25572.70	19	26415.36	49	27756.01
20	24756.[illegible]7	50	25600.82	20	26443 42	50	27284.00
21	24784.[illegible]5	51	25628.94	21	26471.47	51	27311.98
22	24812.63	52	25657.05	22	26499.52	52	27339.96
23	24840.8[illegible]	53	25685.17	23	26527.57	53	27367.94
24	24868.00	54	25713.99	24	26555.61	54	27395.02
25	24897.[illegible]	55	25741.39	25	26583.65	55	27423.90
26	24925.3[illegible]	56	25769.50	26	26611.69	56	27451.87
27	24953.50	57	25797.60	27	26639.73	57	27479.84
28	24981.67	58	25825.70	28	26667 77	58	27507.81
29	25000.34	59	15853 81	29	26695.81	59	27535.78
30	25038.00	60	25881.90	30	26723.84	60	27563.74

16 GRADUS. 17 GRADUS.

Sinus.	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
27563.74	30	28401.53	0	29237.17	30	30070.58
27591.70	31	28429.42	1	29264.99	31	30098.32
27619.65	32	28457.31	2	29292.80	32	30126.06
27647.61	33	28485.20	3	29320.61	33	30153.80
27675.56	34	28513.08	4	29348.42	33	30181.53
27703.52	35	28540.96	5	29376.27	35	30209.26
27731.47	36	28568.84	6	29404.03	36	30236.99
27759.41	37	28696.71	7	29431.83	37	30264.71
27787.36	38	28624.58	8	29459.63	38	30292.44
27813.30	39	28652.45	9	29487.43	39	30320.16
27843.24	40	28680.32	10	29515.22	40	30347.88
27871.18	41	28708.19	11	29543.02	41	30375.59
27899.11	42	28736.05	12	29570.80	42	30403.31
27927.04	43	28763.91	13	29598.59	43	30431.02
27954.97	44	28791.77	14	29626.38	44	30458.72
27982.90	45	28819 63	15	29654.16	45	30486.43
28010.83	46	28847.48	16	29681.94	46	30514.13
28038.75	47	28875.33	17	29709.71	47	30541.83
28066.67	48	28903.18	18	29737.49	48	30569.53
28094.59	49	28931.03	19	29765.26	49	30597.23
28122.51	50	28958.87	20	29793.03	50	30624.92
28150.42	51	28986.71	21	29820.79	51	30652.61
28178,33	52	29014.55	22	28848.56	52	30680.29
28206.24	53	29042.39	23	29876.32	53	30707.98
28234.15	54	29070.24	24	29904.08	54	30735.66
28262.05	55	29098.05	25	29931.84	55	30963.34
28289.95	56	29125.88	26	29959.50	56	30791.02
28317.85	57	29153.71	27	29987.34	57	30818.69
28345.75	58	29181.53	28	30015.09	58	30846.36
28373.64	59	29209.35	29	30042.84	59	30874.03
28401.53	60	29237.17	30	30070.58	60	30901.70

18 GRADUS.				19 GRADUS.			
M	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
0	30901.70	30	31730.47	0	32556.82	30	33380.69
1	30929.56	31	31758.05	1	32584.32	31	33408.10
2	30957.02	32	31785.63	2	32611.82	32	33435'52
3	30984.68	33	31813.21	3	32639.31	33	33462.93
4	31012.34	34	31840.79	4	34666.81	34	33490.34
5	31039.99	35	31868.36	5	32694.30	35	33517.75
6	31067.64	36	31895.93	6	32721.79	36	33545.16
7	31095.29	37	31923.50	7	32749.18	37	33572.56
8	31122.94	38	31951.06	8	32776.76	38	33599.96
9	31150.58	39	31978.63	9	32804.24	39	33627.35
10	31178.22	40	32006.19	10	32831.72	40	33654.75
11	31205.86	41	32033.74	11	32859.19	41	33682.14
12	31233.49	42	32061.30	12	32886.66	42	33709.53
13	31261.12	43	32088.85	13	32914.13	43	33736.91
14	31288.75	44	32116.40	14	32941.60	44	33764.29
15	31316.38	45	32143.95	15	32969.06	45	33791.67
16	31344.00	46	32171.49	16	32996.52	46	33819.05
17	31371.63	47	32199.03	17	33023.98	47	33846.42
18	31399.25	48	32226.57	18	33051.44	48	33873.79
19	31426.86	49	32254.10	19	33078.89	49	33901.16
20	31454.48	50	32281.64	20	33106.34	50	33928.53
21	31482.09	51	32309.17	21	33133.79	51	33955.89
22	31509.69	52	32336.70	22	33161.13	52	33983.25
23	31537.30	53	32364 22	23	33188.67	53	34010.60
24	31564.90	54	32391.74	24	33216.11	54	34037.95
25	31592.50	55	22419.26	25	33243.55	55	34065.30
26	31620.10	56	32446.78	26	33270.98	56	34092.65
27	31647.70	57	32474.29	27	33298.41	57	34120.00
28	31675.29	58	32501.80	28	33325.84	58	34147.34
29	31702.88	59	32529.31	29	33353.27	59	34174.68
30	31730,47	60	32556,82	30	33380,69	60	34202,02

20 GRADUS. 21 GRADUS.

Sinus.	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
34202.02	30	35020.74	0	35836.79	30	36650.13
34229.35	31	35047.99	1	35863.95	31	36677.19
34256.68	32	35076.23	2	35891.10	32	36704.25
34284.01	33	35102.47	3	35918.25	33	36731.31
34311.33	34	35129.70	4	35945.40	34	36758.36
34338.65	35	35156 93	5	35972.54	35	36785.41
34365.97	36	35184.16	6	35999.68	36	36812.46
34393.29	37	35211.39	7	36026.82	37	36839.50
34420.60	38	35238.62	8	36053.95	38	36866.54
34447.91	39	34265.84	9	36081.08	39	36893 58
34475.22	40	35295 06	10	36108.22	40	36920.62
34502.52	41	35320.27	11	36135.33	41	36947.65
34529.82	42	35347.48	12	36162.46	42	36974.68
34557.12	43	35374.69	13	36189.58	43	37001.70
34584.42	44	35401.90	14	36216.69	44	37028.72
34611.71	45	35429.10	15	36243.80	45	37055.74
34639.00	46	35456.30	16	36270.01	46	37082.76
34666.29	47	35483.50	17	36298.02	47	37109.77
34693.57	48	35510.70	18	37325.12	48	37136.78
34720.85	49	35537.89	19	36352.22	49	37163.79
34748.13	50	35565.08	20	36379.32	50	37190.80
34775.40	51	35592.26	21	36406.41	51	37217.80
34802.67	52	35619.44	22	36433.50	52	37244.80
34829.94	53	35645.62	23	36460.59	53	37271.79
34857.21	54	35673.80	24	36487.68	54	37298.78
34884.47	55	35700.97	25	36514.76	55	37325.77
34911.73	56	35728.14	26	36541.84	56	37352.75
34938.99	57	25755.32	27	36568.92	57	37379.73
34966.24	58	35782.48	28	36595.99	58	37406.71
34993.49	59	35809.64	29	36623.06	59	37433.69
35020.74	60	35836.79	30	36650.13	60	37460.66

22 GRADUS.				23 GRADUS.			
M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	37460.66	30	38268.34	0	39073.11	30	39874.91
1	37487.63	31	38295.22	1	39099.89	31	39901.58
2	37514.59	32	38322.09	2	39126.66	32	39928 25
3	37541.56	33	38348.85	3	39153.43	33	39954.92
4	37568.52	34	38375.82	4	39180.19	34	39981.58
5	37595.47	35	38402.68	5	39206.95	35	40008.24
6	37622.43	36	38429.53	6	39233.71	36	40034.90
7	37649.38	37	38456.39	7	39260.47	37	40061.56
8	37676.32	38	38483.24	8	39287.22	38	40088.21
9	37603.27	39	38510.08	9	39313.97	39	40114.86
10	37730.21	40	38535.93	10	39340.7[illegible]	40	40141.50
11	37757.14	41	38563.77	11	39367.45	41	40168.14
12	37784.08	42	38590.60	12	39394.19	42	40194.78
13	37811.01	43	38617.44	13	39420.93	43	40221.41
14	37837.94	44	38644.27	14	39447:66	44	40248.04
15	37864.86	45	38671.10	15	39474.39	45	40274.67
16	37891.78	46	38697.92	16	39501.11	46	40301'49
17	37818.70	47	38724.74	17	39527'83	47	40327.91
18	37945.62	48	38751.56	18	39554.55	48	40354.53
19	37972.53	49	38778.37	19	39581.27	49	40381.14
10	37990.44	50	38805.18	20	39607.98	50	40407.75
21	38026.33	51	38831.99	21	39634.69	51	40434.36
22	38053.24	52	38858.80	22	39661.39	52	40460.96
23	38080.14	53	38885.60	23	39688.09	53	40487.56
24	38107.04	54	38012.39	24	39714.79	54	40514.16
25	39133.93	55	38939.10	25	39741.48	55	40540.75
26	38160.82	56	38965.98	26	39768.17	56	40567.34
27	38187.70	57	38992.77	27	39794.86	57	40583.93
28	38214.59	58	39019.55	28	39S21.55	58	40620.51
29	38241.47	59	39046.33	29	39848.13	59	40647.09
30	38268.34	60	39073.11	30	39874.91	60	40673.66

24 GRADUS.				25 GRADUS.			
M	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
0	40673.66	30	41469.32	0	42261.83	30	43051.11
1	40700.23	31	41495.79	1	42288.19	31	43077.36
2	40726.81	32	41522.26	2	42314.55	32	43103.61
3	40753.37	33	41548.72	3	42340.90	33	43129.86
4	40779 93	34	41575.18	4	42367.25	34	43156.10
5	40806.49	35	41601.63	5	41393.60	35	43182.34
6	40833.05	36	41628.08	6	42419.94	36	43208.57
7	40859.60	37	41654.53	7	42446.28	37	43234.80
8	40886.15	38	41680.97	8	42472.62	38	43261.03
9	40912.69	39	41707.41	9	42498.95	39	43287.26
10	40939.23	40	41733.85	10	42525.28	40	43313.48
11	40965.77	41	41760.28	11	42551.61	41	43339.70
12	40992.30	42	41786.71	12	42577.93	42	43365.91
13	41018.83	43	41813.13	13	42604.25	43	43392.12
14	41045.36	44	41839.55	14	42630.56	44	43418.33
15	41071.89	45	41865.97	15	42656.87	45	43444.53
16	41098.41	46	41892.39	16	42683.18	46	43470.73
17	41124.93	47	41918.80	17	42709.49	47	43496.92
18	41151.44	48	41945.21	18	42735.79	48	43523.11
19	41177.95	49	41971.61	19	42762.09	49	43549.30
20	41204.46	50	41998.01	20	42788.38	50	43575.48
21	41230.96	51	42024.41	21	42814.67	51	43601.66
22	41257.46	52	42050.80	22	42840.95	52	43627.84
23	41283.95	53	42077.19	23	42867.23	53	43654.01
24	41310.44	54	42103.58	24	42893.51	54	43680.18
25	41336.93	55	42129.96	25	42919.79	55	43706.34
26	41363.42	56	42156.34	26	42946.06	56	43732.50
27	41389.90	57	42182.72	27	42972.33	57	43758.66
28	41416.38	58	42209.09	28	42998.59	58	43784.72
29	41442.85	59	42235.46	29	43024.85	59	43810.97
30	41469.32	60	42261.83	30	43051.11	60	43837.12

26 GRADUS. | 27 GRADUS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	43837.12	30	44619.78	0	45399.05	30	46174.86
1	43863.26	31	44645.81	1	45424.97	31	46200.66
2	43889.40	32	44671.84	2	45450.88	32	46226.56
3	43915.52	33	44697.86	3	45476.79	33	46252.25
4	43941.66	34	44723 88	4	45502.69	34	46278.04
5	43967.79	35	44749.90	5	45528.59	35	46303.82
6	43993.92	36	44775.91	6	45554.49	36	46329.60
7	44020.04	37	44801.92	7	45580.38	37	46355.38
8	44046.16	38	44827.92	8	45606.27	38	46381.15
9	44072.27	39	44853.92	9	45632.16	39	46406.92
10	44098.38	40	44879.90	10	45658.04	40	46432.89
11	44124.48	41	44905.91	11	45683.92	41	46458.55
12	44150.58	42	44931.90	12	45709.79	42	46484 21
13	44176.68	43	44957.89	13	45735.66	43	46509.96
14	44202.78	44	44983.87	14	45761.53	44	46535.71
15	44228.87	45	45009.85	15	45787.39	45	46561.45
16	44254.96	46	45035.85	16	45813.25	46	46587.19
17	44281.04	47	45061.79	17	45839.10	47	46612.93
18	44307 12	48	45087.76	18	45864.95	48	46638.66
19	44333.19	49	45113.72	19	45890.80	49	46664.39
20	44359.27	50	45139.68	20	45916.64	50	46690.12
21	44385.34	51	5165.63	21	45942.48	51	46715.84
22	44411.40	52	45191.58	22	45968.32	52	46741.56
23	44437.46	53	45217.53	23	45994.15	53	46767.27
24	44463.52	54	45243.47	24	46019.98	54	46792 98
25	44489.57	55	45269.41	25	46045.80	55	46818.69
26	44515.62	56	45295.35	26	46071.62	56	46844.39
27	44541.67	57	45321.28	27	46097.44	57	46870.09
28	44567.71	58	45347.21	28	46123.25	58	46895.73
29	44593.75	59	45373.13	29	46149.06	59	46921.47
30	44619.78	60	45399.05	30	46174.86	60	46947.16

28 GRADUS. 29 GRADUS.

Sinus.	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
46947.16	30	47715.88	c	48480.96	30	39242.36
46972.84	31	47741.44	1	48506.40	31	49267.67
46998.52	32	47767.00	2	48531.84	32	49292.98
47024.19	33	47792.55	3	48557.27	33	49318.29
47049.86	34	47818.10	4	48582.70	34	49343.59
47075.53	35	47843.64	5	48608.12	35	49368.89
47101.19	36	47869.18	6	48633.54	36	49394.19
47126.85	37	47894.72	7	48658.95	37	49419.48
47152.50	38	47920.26	8	48684.36	38	49444.77
46178.15	39	47945.79	9	48709.77	39	49470.05
47203.80	40	47971.31	10	48735.17	40	49495.33
47229.44	41	47996.83	11	48760.57	41	49520.60
47255.08	42	48022.35	12	48022.97	42	49545.87
47280.71	43	48047.86	13	48811.36	43	49571.13
47306.34	44	48073.37	14	48836.74	44	49596.39
47331.97	45	48098.88	15	48862.12	45	45621.65
47357.59	46	48124.38	16	48887.52	46	49646.90
47383.21	47	48149.87	17	48912.87	47	49672.15
47408.82	48	48175.37	18	48938.24	48	49697.40
47434.43	49	48200.86	19	48963.61	49	49722.64
47460.04	50	48226.34	20	48988.97	50	49747.87
47485.64	51	48251.82	21	49014.33	51	49773.10
47511.24	52	48277.30	22	49039.68	52	49798.33
47536.83	53	48302.77	23	49065 03	53	49823.55
47562.42	54	48328.24	24	49090.37	54	49848.77
47582.01	55	48353 70	25	49115.71	55	49873.09
47613.59	56	48379.16	26	49141.05	56	49899.20
47639.17	57	48404.62	27	49166.38	57	49924.41
47664.74	58	48430.07	28	49191.71	58	49949.61
47690.31	59	48455.52	29	49217.04	59	49974.81
47715.88	60	48480.96	30	49242.36	60	50000.00

30 GRADUS. 31 GRADUS

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	50000.00	30	50753.84	0	51503.81	30	52249.86
1	50025.19	31	50778.90	1	51528.74	31	52274.66
2	50050.38	32	50803.96	2	51553.67	32	52299.45
3	50075.56	33	50829.01	3	51578.59	33	52324.25
4	50100.74	34	50854.06	4	51603.51	34	52349.03
5	50125.91	35	50879.10	5	51628.42	35	52373.81
6	50151.07	36	50904.14	6	51653.33	36	52398.59
7	50176.24	37	50929.18	7	51678.24	37	52423.36
8	50201.40	38	50954.21	8	51703.14	38	52446.13
9	50226.55	39	50979.24	9	51728.04	39	52471.90
10	50251.70	40	51004.26	10	51752.93	40	52497.66
11	50276.85	41	51029.28	11	51777.82	41	52522.41
12	50301.99	42	51054.29	12	51802.70	42	52547.16
13	50327.13	43	51079.30	13	51827.58	43	52571.91
14	50352.27	44	51104.31	14	51852.46	44	52596.65
15	50377.40	45	51129.31	15	51877.33	45	52621.39
16	50402.53	46	51154.31	16	51902.19	46	52646.12
17	50427.65	47	51179.30	17	51927.05	47	52670.85
18	50452.77	48	51204.29	18	51951.91	48	52695.58
19	50477.88	49	51229.27	19	51966.76	49	52710.30
20	50502.99	50	51254.25	20	52001.61	50	52745.02
21	50528.09	51	51279.22	21	52026.46	51	52769.73
22	50553.19	52	51304.19	22	52051.30	52	52794.44
23	50578.38	53	51329.16	23	52076.13	53	52819.14
24	50603.37	54	51354.12	24	52100.96	54	52843.84
25	50628.46	55	51379.08	25	52125.79	55	52868.53
26	50653.55	56	51403.04	26	52150.61	56	52893.22
27	50678.63	57	51428.99	27	52175.43	57	52917.90
28	50703.70	58	51453.93	28	52200.24	58	52942.58
29	50728.77	59	51478.87	29	52225.05	59	52967.26
30	50753.84	60	51503.81	30	52249.86	60	52991.93

32 GRADUS. 33 GRADUS.

Sinus.	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
52991.93	30	53729.96	0	54463.90	30	55193.70
53016.59	31	53754.49	1	54488.30	31	55217.95
53041.25	32	53779.02	2	54512.69	32	55242.20
53065.91	33	53803.54	3	54537.07	33	55266.45
53090.56	34	53828.06	4	54561.45	34	55290.69
53115.21	35	53852.57	5	54585.83	35	55314.92
53139.86	36	53877.08	6	54610.20	36	55339.15
53164.50	37	53901.58	7	54634.56	37	55363.38
53189.13	38	53926.08	8	54685.92	30	55387.60
53213.76	39	53950.58	9	54683 28	39	55411.82
53238.39	40	53975.07	10	54707.63	40	55436.03
53263.01	41	53999.55	11	54731.98	41	55460.24
53287.63	42	54024.03	12	54756.32	42	55484.44
53312.24	43	54048.51	13	54780.66	43	55508.64
53336.85	44	54072.98	14	54804.99	44	55532.83
53361.45	45	54097.45	15	54829.32	45	55557.c2
53386.05	46	54121.91	16	54853.65	46	55581.21
53410.64	47	54146.37	17	54877.97	47	55605.39
53435.23	48	54170.82	18	54902.28	48	55629.56
53459.82	49	54195.27	19	54926.59	49	55653,73
53484.40	50	54219.71	20	54950.90	50	55677.90
3508.98	51	54244.15	21	54975.20	51	55709.06
3533.55	52	54268.59	22	54999.50	52	55726.21
3558.12	53	54293.02	23	55023.79	53	55750.36
3582.68	54	54317.44	24	55048.07	54	55774.51
3607.24	55	54341.87	25	55072.36	55	55798.65
3631.79	56	54366.28	26	55c96.64	56	55822.79
3656.34	57	54390.69	27	55120.91	57	55846.92
3680.88	58	54415.10	28	55145.18	58	55871.05
3705.42	59	54439.50	29	55169.44	59	55895.17
3729.96	60	54463.90	30	55193.70	60	55919.29

34 GRADUS.				35 GRADUS.			
M	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
0	55919.29	30	56640.62	0	57357.64	30	58070.30
1	55942.40	31	56664.59	1	57381.47	31	58093.98
2	55967.51	32	56688.56	2	57405.29	32	58117.65
3	55991.61	33	56712.52	3	57429.11	33	58141.32
4	56015.71	34	56736.48	4	57452.92	34	58164.98
5	56039.81	35	56760.42	5	57476.72	35	58188.64
6	56063.90	36	56784.37	6	57500.52	36	58212.30
7	56087.98	37	56808.31	7	57524.32	37	58235.95
8	56112.06	38	56832.25	8	57548.11	38	58259.59
9	56136.14	39	56856.18	9	57571.90	39	58283.23
10	56160.21	40	56880.11	10	57595.68	40	58306.87
11	56184.28	41	56904.03	11	57619.46	41	58330.50
12	56208.34	42	56927.95	12	57643.23	42	58354.12
13	56232.39	43	56951.86	13	57667.00	43	58377.74
14	56256.44	44	56975.77	14	57690.76	44	58401.36
15	56280.49	45	56999.68	15	57714.52	45	58424.97
16	56304.53	46	57023.58	16	57738.27	46	58448.57
17	56328.57	47	57047.47	17	57761.02	47	58472.17
18	56352.60	48	57071.36	18	57785.76	48	58495.77
19	56376.63	49	57095.24	19	57809.50	49	58519.36
20	56400.66	50	57119.12	20	57833.23	50	58542.94
21	56424.67	51	57142.99	21	57856.96	51	58566.52
22	56448.69	52	57166.86	22	57880.68	52	58590.10
23	56472.70	53	57190.73	23	57904.40	53	58613.67
24	56496.70	54	57214.59	24	57928.12	54	58637.24
25	56520.70	55	57238.44	25	57951.83	55	58660.80
26	56544.69	56	57262.29	26	57975.53	56	58684.35
27	56568.68	57	57286.14	27	57999.23	57	58707.90
28	56592.67	58	57309.98	28	58022.92	58	58731.45
29	56616.65	59	57333.81	29	58046.61	59	58754.99
30	56640.62	60	57357.64	30	58070.30	60	58778.53

36 GRADUS. 37 GRADUS

Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
8778.53	30	59482.28	0	60181.50	30	60876.14
8802.06	31	59505.66	1	60204.73	31	60899.22
8825.58	32	59529.03	2	60227.95	32	60922.29
8849.10	33	59552.40	3	60251.17	33	60945.35
8872.61	34	59575.77	4	60274.39	34	60968.41
8896.13	35	59599.13	5	60297.60	35	60991.47
8919.64	36	59622.49	6	60320 80	36	61014.52
8943.14	37	59645.84	7	60344.00	37	61037.56
8966.63	38	59669.18	8	60367.19	38	61060 60
8990 12	39	59692.52	9	60390.38	39	61083.63
9013.61	40	59715.86	10	60413.56	40	61106.66
9037.09	41	59739.19	11	60436.74	41	61129.68
9060.57	42	59762.51	12	60459.91	42	61152.70
9084.04	43	59785.83	13	60483.08	43	61175.72
9107.50	44	59809.15	14	60506.24	44	61198.73
9130.96	45	59832.46	15	60529.40	45	61221.73
9154.42	46	59855.76	16	60552.55	46	61244.73
9177.87	47	59879.06	17	60575.70	47	61267.72
9201.32	48	59902.36	18	60598.84	48	61290.71
9224.76	49	59925.65	19	60621.65	49	61313.69
9248.19	50	59948.93	20	60645.11	50	61336.66
9271.62	51	59972.21	21	60668.23	51	61359.63
9295.05	52	59995.49	22	60691.36	52	61382.60
9318.47	53	60018.76	23	60714.47	53	61405.56
9341.89	54	60042.02	24	60737.58	54	61428.52
9365.30	55	60065 28	25	60760.69	55	61451.47
9388.71	56	60088.53	26	60785.79	56	61474.42
9412.11	57	60111.78	27	60806.89	57	61497.36
9435.50	58	60135.03	28	60829.98	58	61520.29
9458.85	59	60158:27	29	60853.06	59	61543.24
9482.28	60	60181.50	30	60876.14	60	61566.15

38 GRADUS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	61566.15	30	62251.46
1	61589.07	31	62274.22
2	61611.98	32	62296.98
3	61634.89	33	62319.73
4	61657.79	34	62342.48
5	61680.69	35	62365.22
6	61703.59	36	62387.96
7	61726.48	37	62410.69
8	61749.36	38	62433.42
9	61772.24	39	62456.14
10	61795.11	40	62478.85
11	61817.98	41	62501.56
12	61840.85	42	62524.26
13	61863.70	43	62546.96
14	61886.55	44	62569.66
15	61909.40	45	62592.35
16	61932.24	46	62615.03
17	61955.07	47	62637.71
18	61977.90	48	62660.38
19	62000.73	49	62683.05
20	62023.55	50	62705.71
21	62046.36	51	62728.37
22	62069.17	52	62751.02
23	62091.98	53	62773.66
24	62114.78	54	62796.30
25	62137.57	55	62818.94
26	62160.36	56	62841.57
27	62183.14	57	62864.20
28	62205.92	58	62886.82
29	62228.69	59	62909.43
30	62251.46	60	62932.04

39 GRADUS.

M	Sinus.	M	Sinus.
0	62932.04	30	63607.82
1	62954.64	31	63630.26
2	62977.24	32	63652.70
3	62999.83	33	63675.13
4	63022.42	34	63697.56
5	63045.00	35	63719.98
6	63067.58	36	63742.40
7	63090.15	37	63784.81
8	63112.72	38	63787.21
9	63135.28	39	63809.61
10	63157.84	40	63832.01
11	63180.39	41	63854.40
12	63202.93	42	63876.78
13	63225.47	43	63899.16
14	63248.00	44	63921.53
15	63270.53	45	63943.90
16	63293.05	46	63966.26
17	63315.57	47	63988.62
18	63338.08	48	64010.97
19	63360.59	49	64033.32
20	63383.09	50	64055.66
21	63405.59	51	64077.99
22	63428.08	52	64100.32
23	63450.57	53	64122.64
24	63473.05	54	64144.96
25	63495.53	55	64167.27
26	63518.00	56	64189.58
27	63540.46	57	64211.88
28	63562.92	58	64234.18
29	63585.37	59	64256.47
30	63607.83	60	64278.76

40 GRADUS. 41 GRADUS.

Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
64278.76	30	64944.80	0	65605.90	30	66262.01
64301.04	31	64966.92	1	65627.85	31	66283.79
64323.32	32	64989.03	2	65649.80	32	66305.57
64345.59	33	65011.14	3	65671.74	33	66327.34
64367.85	34	65033.24	4	65693.67	34	66349.10
64390.11	35	65055.33	5	65715.60	35	66370.87
64412.36	36	65677.42	6	65737.52	36	66392.02
64434.61	37	65099.50	7	65759.44	37	66414.37
64456.85	38	65121.58	8	65781.35	38	66436.11
64479.09	39	65143.66	9	65803.26	39	66457.85
64501.32	40	65165.72	10	65825.16	40	66479.59
64523.55	41	65187.78	11	65847.06	41	66501.32
64545.77	42	55209.84	12	65868.95	42	66523.04
64567.98	43	65231.89	13	65890.83	43	66544.75
64590.19	44	65253.94	14	65912.71	44	66566.46
64612 40	45	65275.98	15	65934.58	45	66588.17
64634.60	46	65298.01	16	65956.45	46	66609.87
64656.79	47	65320.04	17	65978.31	47	66631.56
64678.98	48	65342.06	18	66000.17	48	66653.25
64701.16	49	65364.08	19	66022.02	49	66674.93
64723.34	50	65386.09	20	66043.86	50	66696.61
64745.51	51	65408.10	21	66065.70	51	66718.28
64767.67	52	65430.10	22	66087.53	52	66739.94
64789.83	54	65452.09	23	66109.36	53	66761.60
64811.99	53	65474.08	24	66131.18	54	66783.26
64834.14	55	65496.06	25	66153.00	55	66804.91
64856.28	56	65518.04	26	66174.81	56	66826.55
64878.42	57	65540.01	27	66196.62	57	66848.18
64900.55	58	65561.98	28	66218.42	58	66869.81
64922.68	59	65583.94	29	66240.22	59	66891.44
64944.80	60	65605.90	30	66262.01	60	66913.07

42 GRADUS. 43 GRADUS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	66913.06	30	67559.02	0	68199.84	30	68835.45
1	66934.67	31	67580.46	1	68221.11	31	68856.55
2	66956.28	32	67601.90	2	68242.37	32	68877.64
3	66977.88	33	67623.33	3	68263.63	33	68898.75
4	66999.48	34	67644.76	4	68284.88	34	68919.81
5	67012.07	35	67666.18	5	68306.13	35	68940.89
6	67042.66	36	67687.60	6	68327.37	36	68961.96
7	67064.23	37	67709.01	7	68348.61	37	68983.02
8	67085.82	38	67730.41	8	68369.84	38	69004.07
9	67107.39	39	67751.81	9	68391.07	39	69025.12
10	67128.95	40	67773.20	10	68412.29	40	69046.17
11	67150.51	41	67794.59	11	68433.50	41	69067.21
12	67172.06	42	67815.97	12	68454.71	42	69088.24
13	67193.61	43	67837.34	13	68475.91	43	69109.27
14	67215.15	44	67858.71	14	68497.11	44	69130.29
15	67236.68	45	67880.07	15	68518.30	45	69151.31
16	67258.21	46	67901.43	16	68539.48	46	69172.32
17	67279.73	47	67922.78	17	68560.66	47	69193.32
18	67301.25	48	67944.13	18	68581.84	48	69214.32
19	67322.76	49	67965.47	19	68603.00	49	69235.31
20	67344.27	50	67986.81	20	68624.16	50	69256.30
21	67365.77	51	68008.14	21	68645.32	51	69277.28
22	67387.27	52	68029.46	22	68666.47	52	69298.25
23	67408.76	53	68050.78	23	68687.61	53	69319.22
24	67430.24	54	68072.09	24	68708.75	54	69340.18
25	67451.72	55	68093.39	25	68729.88	55	69361.14
26	67473.19	56	68114.69	26	68751.01	56	69382.09
27	67494.66	57	68135.99	27	68772.13	57	69403.04
28	67516.12	58	68157.28	28	68793.24	58	69423.98
29	67537.57	59	68178.56	29	68814.35	59	69444.91
30	67559.02	60	68199.84	30	68835.45	60	69465.84

44 GRADUS.				45 GRADUS.			
M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
0	69465.84	30	70090.93	0	70710.68	30	71325.05
1	69486.76	31	70111.67	1	70731.24	31	71235.43
2	69507.67	32	70132.41	2	70751.80	32	71365.81
3	69528.58	33	70153.14	3	70772.36	33	71386.18
4	69549.49	34	70173.87	4	70792.91	33	71306.55
5	69370.39	35	70194.59	5	70813.45	35	71426.91
6	69591.28	36	70215.30	6	70833.98	36	71447.27
7	69612.17	37	70236.01	7	70854.51	37	71467.62
8	69633.05	38	70256.71	8	70875.04	38	71487.96
9	69653.92	39	70277.41	9	70895.56	39	71507.30
10	69674.79	40	70298.11	10	709[illegible]6.07	40	71528.63
11	69695.65	41	70318.79	11	70936.57	41	71547.95
12	69716.51	42	70339.47	12	70957.07	42	71569.27
13	69737.36	43	70360.14	13	70977.57	43	71589.58
14	69758.21	44	70380.81	14	70998.06	44	71609.89
15	69779.05	45	70401.47	15	71018.54	45	71630.19
16	69799.88	46	70422.13	16	71039.01	46	71650.49
17	69820.71	47	70442.78	17	71059.48	47	71670.78
18	69841.53	48	70463.42	18	71079.95	48	71691.06
19	69862.34	49	70484.06	19	71100.41	49	71711.34
20	69883.15	50	70504.69	20	71120.86	50	71731.61
21	69903.96	51	70525.32	21	71141.30	51	71751.87
22	69924.76	52	70545.94	22	71161.74	52	71772.13
23	69945.55	53	70565.55	23	71172.17	53	71792.38
24	69966.33	54	70587.16	24	71202.60	54	71812.63
25	69987.11	55	70607.76	25	71223.02	55	71832.87
26	70007.89	56	70628.35	26	71243.44	56	71853.10
27	60028.66	57	70648.94	27	71263.85	57	71873.33
28	70049.42	58	70669.53	28	71284.26	56	71893.55
29	70070.18	59	70690.11	29	71304.66	58	71913.77
30	70090.93	60	70710.68	30	71325.05	90	71933.98

46 GRADUS. 47 GRADUS.

M	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
0	71933.98	30	72537.44	0	73135.37	30	73727.73
1	71954.18	31	72557.46	1	73155.20	31	73747.38
2	71974.38	32	72577.47	2	73175.03	32	73767.02
3	71994.57	33	72597.48	3	73194.85	33	73786.66
4	72014.76	34	72617.48	4	73214.67	34	73806.29
5	72034.94	35	72637.48	5	73234.48	35	73825.92
6	72055.11	36	72657.47	6	73254.29	36	73845.54
7	72075.28	37	72677.45	7	73274.09	37	73865.15
8	72095.44	38	72697.43	8	73293.88	38	73884.75
9	72115.59	39	72717.40	9	73313.67	39	73904.35
10	72135.74	40	72737.36	10	73333.45	40	73923.94
11	72155.88	41	72757.32	11	73353.22	41	73943.53
12	72176.02	42	72777.27	12	73372.99	42	73963.11
13	72196.15	43	72797.22	13	73392.75	43	73982.68
14	72216.28	44	72817.16	14	73412.50	44	74002.25
15	72236.40	45	72837.09	15	73432.25	45	74021.81
16	72256.51	46	72857.02	16	73451.99	46	74041.37
17	72276.61	47	72876.94	17	73471.73	47	74060.92
18	72296 71	48	72896.86	18	73491.46	48	74080.46
19	72316.81	49	72916.77	19	73511.18	49	74100.00
20	72336.90	50	72936 67	20	73530.90	50	74119.53
21	72356.98	51	72956.57	21	73550.61	51	74139.95
22	72377.05	52	72976.46	22	73570.32	52	74148.57
23	72397.12	53	73996.35	23	73590.02	53	74178.08
24	72417.18	54	73016.23	24	73609.71	54	74197.58
25	72437.24	55	73036.10	25	73629.39	55	74217.08
26	72457.29	56	73055.97	26	73649.07	56	74236.57
27	72477.34	57	73075.83	27	73668.75	57	74256.06
28	72497.38	58	73095.68	28	73688.42	58	74275.54
29	72517.41	59	73115.53	29	73708.08	59	74295.01
30	72537.44	60	73135.37	30	73727.73	60	74314.48

48 GRADUS.				49 GRADUS.			
M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
0	74314.48	30	74895.57	0	75470.96	30	76040.60
1	74333.94	31	74914.84	1	75490.04	31	76059.49
2	74353.40	32	74934.11	2	75509.11	32	76078.37
3	74372.85	33	74953.37	3	75528.18	33	76097.24
4	74392.29	34	74972.62	4	75547.24	34	76116.11
5	74411.72	35	74991.87	5	75566.30	35	76134.97
6	74431.15	36	75011.11	6	75585.35	36	76153.83
7	74450.57	37	75030.34	7	75604.39	37	76172.68
8	74469.99	38	75049.57	8	75623.42	38	76191.52
9	74489.40	39	75068.79	9	75642.45	39	76210.36
10	74508.81	40	75088.00	10	75661.47	40	76229.19
11	74528.21	41	75107.21	11	75680.49	41	76248.01
12	74547.60	42	75126.41	12	75699.50	42	76266.83
13	74566.99	43	75145.61	13	75718.51	43	76285.64
14	74586.37	44	75164.80	14	75737.51	44	76304.45
15	74605.74	45	75183.98	15	75756.50	45	76323.25
16	74625.10	46	75203.16	16	75775.48	46	76342.04
17	74644.46	47	75222.33	17	75794.46	47	76360.82
18	74663.82	48	75241.49	18	75813.43	48	76379.62
19	74683.17	49	75260.65	19	75832.40	49	76398.37
20	74702.51	50	75279.80	20	75851.36	50	76417.14
21	74721.84	51	75298.94	21	75870.31	51	76435.90
22	74741.17	52	75318.08	22	75889.26	52	76454.65
23	74760.49	53	75337.21	23	75908.20	53	76473.40
24	74779.81	54	75356.34	24	75927.13	54	76492.14
25	74799.12	55	75375.46	25	75946.06	55	76510.87
26	74818.42	56	75394.57	26	75964.98	56	76529.60
27	74837.72	57	75413.68	27	75983.89	57	76548.32
28	74857.01	58	75432.78	28	76003.80	58	76567.03
29	74876.29	59	75451.87	29	76021.70	59	76585.74
30	74895.57	60	75470.96	30	76040.60	60	76604.44

50 GRADUS. | 51 GRADUS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	76604.44	30	77162.46	0	77714 60	30	78260.82
1	76623.14	31	77180.96	1	77732.90	31	78278.92
2	76641.83	32	77199.45	2	77751.20	32	78297.02
3	76660.51	33	77217.94	3	77769.49	33	78315.11
4	76679.18	34	77236.42	4	77787.77	34	78333.20
5	76697 85	35	77254.89	5	77806.04	35	78351.28
6	76716.51	36	77273.36	6	77824.31	36	78369.35
7	76735.17	37	77291.82	7	77842.57	37	78387.41
8	76753.82	38	77310.27	8	77860.83	30	78405.47
9	76772.46	39	77328.72	9	77879.08	39	78423.52
10	76791.10	40	77347.16	10	77897.33	40	78441.57
11	76809.73	41	77365.59	11	77915.37	41	78459.61
12	76828.35	42	77384.02	12	77933.80	42	78477.64
13	76846.97	43	77402.44	13	77952.02	43	78495.66
14	76865.58	44	77420.86	14	77970.24	44	78513.68
15	76884.18	45	77439.27	15	77988.45	45	78531.69
16	76902.78	46	77457.67	16	78006.65	46	78549.70
17	76921.37	47	77476.06	17	78024.85	47	78567.70
18	76939.95	48	77494.45	18	78043.04	48	78586.69
19	76958.53	49	77512.83	19	78061.22	49	78603.67
20	76977.10	50	77531.21	20	78079.40	50	78621.65
21	76995.67	51	77549.58	21	78097.57	51	78639.62
22	77014.23	52	77567.94	22	78115.74	52	78657.59
23	77032.78	53	77586.29	23	78133 90	53	78675.55
24	77051.32	54	77604.64	24	78152.05	54	78693.50
25	77069.86	55	77622.98	25	78170.19	55	78711.45
26	77088.39	56	77641.32	26	78188.33	56	78729.39
27	77106.92	57	77659.65	27	78206.46	57	78747.32
28	77125.44	58	77677.97	28	78224.59	58	78765.24
29	77143.95	59	77696.29	29	78242.71	59	78783.16
30	77162.46	60	77714.60	30	78260.82	60	78801.07

52 GRADUS. 53 GRADUS.

Sinus.	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
78801.07	30	79335.33	0	79863.55	30	80385.69
78818.98	31	79353.04	1	79881.05	31	80402.99
78836.88	32	79370.74	2	79898.55	32	80420.28
78854.77	33	79388.43	3	79916.04	33	80437.56
78872.66	34	79406.11	4	79933.52	34	80454.84
78890.54	35	79423.79	5	79951.00	35	80472.11
78908.41	36	79441.46	6	79968.47	36	80489.38
78926.27	37	79459.12	7	79985.93	37	80506.64
78944.13	38	79476.78	8	80003.38	38	80523.89
78961:98	39	79494.43	9	80020.83	39	80541.13
78979.83	40	79512.08	10	80038.27	40	80558.37
78997.67	41	79529.72	11	80055.71	41	80575.60
79015.50	42	79547.35	12	80073.14	42	80592 83
79033.33	43	79564.97	13	80090.56	43	80610.05
79051.15	44	79582.59	14	80107.97	44	80627.26
79068.96	45	79600.20	15	80125.38	45	80644.64
79086.76	46	79617.80	16	80142.78	46	80661.66
79104.56	47	79635.40	17	80160.17	47	80678.85
79122.35	48	79652.99	18	80177.56	48	80696.03
79140.14	49	79670.57	19	80194.94	49	80713.21
79157.92	50	79688.15	20	80212.32	50	80730.38
79175.69	51	79705.72	21	80229.69	51	80747.54
79193.45	52	79723.28	22	80247.05	52	80764.70
79211.21	53	79740.84	23	80264.40	53	80781.85
79228.96	54	79758.39	24	80281.75	54	80798.99
79246.71	55	79775.93	25	80299.09	55	80816.12
79264.45	56	79793.47	26	80316.42	56	80833.25
79282.18	57	79811.00	27	80333.75	57	80850.37
79299.90	58	79828.52	28	80351.07	58	80867.49
79317.62	59	79846.04	29	80368.38	59	80884.60
79335.33	60	79863.55	30	80385.69	60	80901.70

54 GRADUS.				55 GRADUS.			
M	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
0	80901.70	30	81411.55	0	81915.21	30	82412.62
1	80918.79	31	81428.44	1	81931.89	31	82429.09
2	80935.88	32	81445.32	2	81948.56	32	82445.56
3	80952.96	33	81462.19	3	81965.23	33	82462.02
4	80970.03	34	81479.06	4	81981.89	34	82478.47
5	80987.10	35	81495.93	5	81998.54	35	82494 91
6	81004.16	36	81512.78	6	82015.19	36	82511.35
7	81021.21	37	81529.63	7	82031.83	37	82527.78
8	81038.26	38	81546.47	8	82048.46	38	82544.20
9	81055.30	39	81563.30	9	82065.08	39	82560.62
10	81072.33	40	81580.33	10	82081.70	40	82577 03
11	81089.36	41	81596.94	11	82098.31	41	82593.43
12	81106.38	42	81613.76	12	82114.92	42	82609.83
13	71123.39	43	81630.56	13	82131.52	43	82626.22
14	81140.40	44	81647.36	14	82148.11	44	82642.60
15	81157.40	45	81664.15	15	82164.69	45	82658.97
16	81174.39	46	81680 94	16	82181.27	46	82675.35
17	81191.37	47	81697.72	17	82197.84	47	82691.70
18	81208.35	48	81714.49	18	82214.40	48	82708.06
19	81225.32	49	81731.25	19	82230.96	49	82724.40
20	81242.29	50	81748.01	20	82247.51	50	82740.74
21	81259.25	51	81764.76	21	82264.05	51	82757.07
22	81276.20	52	81781.50	22	82280.59	52	82773.42
23	81293.14	53	81798.24	23	82297.12	53	82789.72
24	81310.08	54	81814.97	24	82313.64	54	82806.03
25	81327.01	55	81831.69	25	82330.15	55	82822.34
26	81343.93	56	81848.41	26	82346.66	56	82838.64
27	81360.84	57	81865.12	27	82363.16	57	82854.93
28	81377.75	58	81881.82	28	82379.65	58	82871.21
29	81394.65	59	81898.52	29	82396.14	59	82887.49
30	81411.55	60	81915.21	30	82412,62	60	82903.76

56 GRADUS. 57 GRADUS.

Sinus.	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
82903.76	30	83388.58	0	83867.06	30	84339.14
82920.02	31	83404.63	1	83882.90	31	84354.77
82936.28	32	83420.68	2	83898.73	32	84370.39
82952.52	33	83436.72	3	83914.55	33	84386.00
82968.77	34	83452.75	4	83930.37	34	84401.60
82985.00	35	83468.77	5	83946.18	35	84417.20
83001.23	36	83484.79	6	83961.98	36	84432.79
83017.44	37	83500.80	7	83977.78	37	84448.37
83033.66	38	83516.80	8	83993.57	38	84463.95
83049.87	39	83532.79	9	84009.35	39	84479.52
83066.07	40	83548.78	10	84025.13	40	84595.08
83082.26	41	83564.76	11	84040.90	41	84510'63
83098.44	42	83580.73	12	84056.66	42	84526.18
83114.62	43	83596.70	13	84072.41	43	84541.73
83130.79	44	83612.66	14	84088.16	44	84557.25
83146.96	45	83628 61	15	84105.90	45	84572.78
83163.12	46	83644.56	16	84119.63	46	84588.30
83179.27	47	83660.50	17	84135.36	47	84603.81
83195.41	48	83676.43	18	84151.08	48	84619.31
83211.55	49	83692.35	19	84166.79	49	84634.81
83227.68	50	83708 27	20	84182.49	50	84650.30
83243.80	51	83724.18	21	84198.19	51	84665.78
83259.91	52	83740.08	22	84213.88	52	84681.26
83276.02	53	83755.98	23	84229.56	53	84696.73
83292.12	54	83771.87	24	84245.24	54	84712.19
83308.21	55	83787.75	25	84260.91	55	84727.64
83324.30	56	83803.63	26	84276.57	56	84743.09
83340.38	57	84819.50	27	84292.22	57	84758.53
83356.45	58	83835.36	28	84307.87	58	84773.97
83372.52	59	83851.21	29	84323.51	59	84789.39
83388.58	60	83867.06	30	84339.14	60	84804.81

58 GRADUS.				59 GRADUS.			
M	*Sipus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
0	89804.81	30	85264 02	0	85716.73	30	86162.92
1	84820.22	31	85279.21	1	85731.71	31	86177.68
2	84835.62	32	85294.40	2	85746.68	32	86192.43
3	84851.01	33	85309.58	3	85761.64	33	86207.17
4	84866.41	34	85324.75	4	85776.60	34	86221.91
5	84881.79	35	85339 92	5	85791.55	35	86236.64
6	84897.17	36	85355.08	6	85806.49	36	86251.36
7	84912.54	37	85370.23	7	85821.42	37	86266.08
8	84927.90	38	85385.37	8	85836.35	38	86280.79
9	84943.35	39	85400.51	9	85851.27	39	86295.49
10	84958.60	40	85415.64	10	85866.18	40	86310.19
11	84973.94	41	85430.76	11	85881.09	41	86324.88
12	84989.27	42	85445.88	12	85895.99	42	86339.56
13	85004.59	43	85460.99	13	85910.88	43	86354.23
14	85019.91	44	85476.09	14	85925.76	44	86368.89
15	85035.22	45	85491.18	15	85940.64	45	86384.55
16	85050.52	46	85506.27	16	85955.51	46	86398.20
17	85965.82	47	85521.35	17	85970.37	47	86412.84
18	85081.11	48	85536.42	18	85985.23	48	86427.48
19	85096.39	49	85551.49	19	86900.07	49	86442.11
20	85111.66	50	85566.55	20	86914.91	50	86456.73
21	85126.93	51	85581.60	21	86029.75	51	86471.34
22	85142.19	52	85596.64	22	86044.57	52	86485.95
23	85157.44	54	85611.68	23	86059.39	53	86500.55
24	85172.69	53	85626.71	24	86074.20	54	86515.14
25	85.187.93	55	85641.73	25	86089.00	55	86529.72
26	35203.16	56	85656.74	26	86103.80	56	86544 30
27	85218.39	57	85671.75	27	86118.59	57	86558.87
28	85233.60	58	85686.75	28	86133.37	58	86573.43
29	85248.81	59	85701.74	29	86148.15	59	86587.99
30	85264.02	60	85716.73	30	86162.92	60	86703.54

60 GRADUS.			61 GRADUS.			
Sinus.	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
86602.54	30	87035.57	0	87461.97	30	87881.71
86617.08	31	87049.89	1	87476.07	31	87895.59
86631.61	32	87064.20	2	87490.16	32	87909.46
86646.14	33	87078.51	3	87504.24	33	87923.24
86660.66	34	87092.81	4	87518.32	34	87937.17
86675.17	35	87107.20	5	87532.39	35	87951.02
86689.67	36	87121.38	6	87546.45	36	87964.86
86704.17	37	87135.66	7	87560.50	37	87978.69
86718.66	38	87149.93	8	87574.55	38	87992.51
86733.14	39	87164.19	9	87588.59	39	88006.33
86747.62	40	87178.44	10	87602.62	40	88020.14
86762.09	41	87192.69	11	87619.65	41	88033.94
86776.35	42	87206.93	12	87630.67	42	88047.73
86791.00	43	87221.16	13	87644.68	43	88061.52
86805.44	44	87235.38	14	87658.68	44	88075.30
86819.88	45	87249.80	15	87672.67	45	88089.07
86834.31	46	87263.81	16	87686.66	46	88102.84
86848.73	47	87278.01	17	87700.64	47	88116.60
86863.15	48	87292.21	18	87714.61	48	88130.35
86877.56	49	87306.40	19	87728.58	49	88144.09
86891.96	50	87320.58	20	87742.54	50	88157.82
86906.35	51	87334.75	21	87756.49	51	88171.55
86920.74	52	87348.91	22	87770.43	52	88185.27
86935.12	53	87363.07	23	87784.37	53	88198.98
86949.49	54	87377.22	24	87798.30	54	88212.68
86963.85	55	87391.36	25	88812.22	55	88226.38
86978.22	56	87305.50	26	87826.13	56	88240.07
86992.56	57	87419.63	27	87840.04	57	88253.75
87006.90	58	87433.75	28	87853.94	58	88267.43
87021.24	59	87447.86	29	87867.83	59	88281.10
87035.57	60	87461.97	30	87881.71	60	88294.76

62 GRADUS. 63 GRADUS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	88294.76	30	88701.08	0	89100.66	30	89493.43
1	88308.41	31	88714.51	1	89113.85	31	89506.41
2	88322.05	32	88727.93	2	89127.05	32	89519.38
3	88335.69	33	88741.34	3	89140.24	33	89532.34
4	88349.32	34	88754.75	4	89153.42	34	89545.29
5	88362.94	35	88768.15	5	89166.59	35	89558.24
6	88376.56	36	88781.54	6	89179.75	36	89571.18
7	88390.17	37	88894 92	7	89192.91	37	89584.11
8	88403.77	38	88808.29	8	89206.06	38	89597.03
9	88417.36	39	88821.66	9	89219.20	39	89609.94
10	88430.95	40	88835.02	10	89232.34	40	89622.85
11	88444.53	41	88848.37	11	89245.46	41	89635.75
12	88458.10	42	88861.72	12	89258.58	42	89648.64
13	88471.66	43	88875.06	13	89271.69	43	89661.52
14	88485.22	44	88888.39	14	89284.79	44	89674.40
15	88498.76	45	88901.71	15	89297.89	45	89687.27
16	88512.30	46	88915.03	16	89310.98	46	89700.13
17	88525.83	47	88928.34	17	89324.06	47	89712.99
18	88539.36	48	88941.64	18	89337.14	48	89715.84
19	88552.88	49	88954.93	19	89350.21	49	89738.68
20	88566.39	50	88968.21	20	89363.27	50	89751.51
21	88579.89	51	88981.49	21	89376.32	51	89764.33
22	88593.39	52	88994.76	22	89389.36	52	89777.15
23	88606.88	53	89008.02	23	89402.39	53	89789.96
24	88620.36	54	89021.28	24	89415.42	54	89802.76
25	88633.83	55	89034.53	25	89428.44	55	89815.55
26	88647.29	56	89047.77	26	89441.45	56	89828.34
27	88660.75	57	89061.00	27	89454.46	57	89841.12
28	88674.20	58	89074.22	28	89467.46	58	89853.89
29	88687.64	59	89087.44	29	89480.45	59	89866.65
30	88701,08	60	89100,65	30	89493.43	60	89879.40

64 GRADUS. 65 GRADUS.

Sinus.	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
89879.40	30	90258.53	0	90630.78	30	90996.13
89892.15	31	90271.05	1	90643.07	31	91008.19
89901.89	32	90283.56	2	90655.35	32	91020.24
899.7.62	33	90296.06	3	90667.62	33	91032.28
89930.35	34	90308.56	4	90679.89	33	91044.32
89943.07	35	90321.05	5	90692.15	35	91056.35
89955.78	36	90333.53	6	90704.40	36	91068.37
89968.48	37	90346.00	7	90716.64	37	91080.38
89981.17	38	90358.47	8	90728.88	38	91092.38
89993.86	39	90370.93	9	90741.11	39	91104.38
90006.54	40	90383.38	10	90753.33	40	91116.37
90019.21	41	90305.82	11	90765.54	41	91128.35
90031.87	42	90408.25	12	90777.75	42	91140.32
90044.53	43	90420.68	13	90789.95	43	91152.29
90057.18	44	90433.10	14	90802.14	44	91164.25
90069.82	45	90445.51	15	90814.32	45	91176.20
90082.45	46	90457.92	16	90826.49	46	91188.14
90095.08	47	90470.32	17	70838.66	47	91200.08
90107.70	48	90482.71	18	90850.82	48	91212.01
90120.31	49	90495.09	19	90862.97	49	91223.93
90132.91	50	90507.46	20	90875.11	50	91235.84
90145.51	51	90519.83	21	90887.25	51	91247.75
90158.10	52	90532.19	22	90899.38	52	91259.65
90170.68	53	90544.54	23	90911.59	53	91271.54
90183.25	54	90556.88	24	90923.61	54	91283.42
90195.82	55	90569.21	25	90935.71	55	91295.29
90208.38	56	90581.54	26	90947.81	56	91307.16
90220.92	57	90593.86	27	90959.90	57	91319.02
90233.47	58	90606.17	28	90971.98	58	91330.87
90246.00	59	90618.48	29	90984.06	59	91342.71
90258.53	60	90630.78	30	90996.13	60	91354.54

66 GRADUS. 67 GRADUS.

M	Sinus.	M	Sinus	M	Sinus.	M	Sinus.
0	91354.54	30	91706.01	0	92050.49	30	92387.95
1	91366.37	31	91717.60	1	92061.85	31	92399.08
2	91378.19	32	91729.19	2	92073.20	32	92410.20
3	91390.00	33	91740.77	3	92084.55	33	92421.31
4	91401.81	34	91757.34	4	92095.89	34	92432.41
5	91413.61	35	91763.90	5	92107.22	35	92443.51
6	91405.40	36	91775.46	6	92118.54	36	92454.60
7	91437.18	37	91787.01	7	92129.85	37	92465.68
8	91448.95	38	91798.55	8	92141.16	38	92476.75
9	91460.71	39	91810.08	9	92152.46	39	92487 82
10	91472.47	40	91821.61	10	92163.75	40	92499.88
11	91484.22	41	91833.13	11	92175.03	41	92509.93
12	91495.96	42	91844.64	12	92186.31	42	92520.97
13	91507.70	43	91856.14	13	92197.58	43	92532.00
14	91519.43	44	91867.63	14	92208.84	44	92543.03
15	91531.15	45	91879.12	15	92220.09	45	92554.05
16	91542.86	46	91890.60	16	92231.34	46	92565.06
17	91554.56	47	91902.07	17	92242.58	47	92576.06
18	91566.26	48	91913.53	18	92253.81	48	92587.06
19	91577.95	49	91924.99	19	92265.03	49	92598.05
20	91589.63	50	91936.44	20	92276.24	50	92609.02
21	91601.30	51	91947.88	21	92287.45	51	92620.00
22	91612.96	52	91959.31	22	92298.65	52	92630.96
23	91624.62	53	91970.73	23	92309.84	53	92641.91
24	91636.27	54	91982.15	24	92321.02	54	92652.86
25	91647.91	55	91993.56	25	92332.19	55	92663.80
26	91659.55	56	92004.96	26	92343.36	56	92674.73
27	91671.18	57	92016.35	27	92354.52	57	92685.66
28	91682.80	58	92027.74	28	92365.67	58	92696.58
29	91694.41	59	92039.12	29	92376.82	59	92707.49
30	91706.01	60	92050.49	30	92387.95	60	92718.39

68 GRADUS.				69 GRADUS.		
Sinus.	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
92718.39	30	93041.75	0	93358.04	30	93667.22
92729.28	31	93052.41	1	93368.46	31	93677.40
92740.16	32	93063.06	2	93378.87	32	93687.57
92751.04	33	93073.70	3	93389.28	33	93697.74
92761.91	34	93084.33	4	93399.68	34	93707.90
91772.77	35	93094.96	5	93410.07	35	93718.05
92783.62	36	93105.58	6	93420.45	36	93728.19
92794.47	37	93116.19	7	93430.82	37	93738.33
92805.31	38	93126.79	8	93441.18	38	93748.46
92816.14	39	93137.38	9	93451.54	39	93758.58
92826.96	40	93147.97	10	93461.89	40	93768.69
92837.77	41	93158.55	11	93472.23	41	93778.80
92848.58	42	93169.12	12	93482.56	42	93788.89
92859.38	43	93179.68	13	93492.89	43	93798.98
93870.17	44	93190.24	14	93503.21	44	93809.06
92880.95	45	93200.79	15	93513.52	45	93819.13
92891.73	46	93211.33	16	93523.82	46	93829.19
92902.50	47	93221.86	17	93534.11	47	93839.25
92913.26	48	93232.38	18	93544.40	48	93849.30
92924.01	49	93242.89	19	93554.68	49	93859.34
92934.75	50	93253.40	20	93564.95	50	93869.37
92945.49	51	93263.90	21	93575.21	51	93879.40
92956.22	52	93274.39	22	93585.46	52	93889.42
92966.94	53	93284.87	23	93595.71	53	93899.43
92977.65	54	93295.35	24	93604.95	54	93909.43
92988.35	55	93305.82	25	93616.18	55	93919.42
92999.05	56	93316.28	26	93626.40	56	93929.40
93009.74	57	93326.73	27	93636.62	57	93939.38
93020.42	58	93337.17	28	93646.83	58	93949.35
93031.09	59	93347.61	29	93657.03	59	93959.31
93041.75	60	93358.04	30	93667.22	60	93969.26

70 GRADUS. 71 GRADUS.

M	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
0	93969.26	30	94264.15	0	94551.85	30	94832.36
1	9 979.21	31	94273.86	1	94561.32	31	94841.59
2	93989.14	32	94283.56	2	94570.78	32	94850.81
3	93999.07	33	94293.25	3	94580.23	33	94860.02
4	84008.99	34	94302.93	4	94589.67	34	94869.22
5	94018.90	35	94312.60	5	94599.10	35	94878.41
6	94028.81	36	94322.26	6	94608.53	36	94887.60
7	94038.71	37	94331.92	7	94617.95	37	94896.78
8	94048.60	38	94341.57	8	94627.36	38	94905.95
9	94058.48	39	94351.21	9	94636.76	39	94915.11
10	94068.35	40	94360.85	10	94646.16	40	94924.20
11	94078.22	41	94370.48	11	94655.55	41	94933.41
12	94088.08	42	94380.10	12	94664.93	42	94942.55
13	94097.93	43	94389.61	13	94674.30	43	94951.68
14	94107.77	44	94399.31	14	94683.66	44	94960.80
15	94117.60	45	94408.90	15	94693.01	45	94969.91
16	94127.42	46	94418.49	16	94702.36	46	94979.02
17	94137.24	47	94428.07	17	94711.70	47	94988.12
18	94147.05	48	94437.64	18	94721.03	48	94997.21
19	94156.86	49	94447.20	19	94730.35	49	95006.29
20	94166.65	50	94456.75	20	94739.66	50	95015.36
21	94176.44	51	94466.30	21	94748.97	51	95024.42
22	94186.22	52	94475.84	22	94758.27	52	95033.48
23	94195.99	53	94485.37	23	94767.56	53	95042.53
24	94205.75	54	94494.89	24	94776 84	54	95051.57
25	94215.50	55	94504.40	25	94786.11	55	95060.60
26	94225.24	56	94513.91	26	94795.38	56	95069.63
27	94234.98	57	94523.41	27	94804.64	57	95078.65
28	94244.72	58	94532.90	28	94813.89	58	95087.66
29	94254 43	59	94542.38	29	94823.13	59	95096.66
30	94264.15	60	94551.85	30	94832.36	60	95005.65

72 GRADUS. 73 GRADUS.

Sinus.	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
95105.65	30	94371.69	0	95630.48	30	95881.97
95114.63	31	95380.43	1	95638.98	31	95890.23
95123.61	32	95389.17	2	95647.47	32	95898.48
95132.58	33	95397.90	3	95655.95	33	95906.72
95141.54	34	95406.62	4	95664.43	34	95914.95
95150.50	35	95415.33	5	95672.90	35	95923.18
95159.44	36	95424.03	6	95681.36	36	95931.40
95168.38	37	95432.72	7	95689.81	37	95939.61
95177.31	38	95441.41	8	95698.25	38	95947.81
95186.23	39	95450.09	9	95706.69	39	95956.00
95195.14	40	95458.76	10	95715.12	40	95964.18
95204.04	41	95467.42	11	95723.54	41	95972.36
95212.94	42	95476.07	12	95731 95	42	95990.53
95221.83	43	95484.72	13	95740.35	43	95988.09
95230.71	44	95493.36	14	95748.75	44	95996.84
95239.58	45	95501.99	15	95757.14	45	96004.98
95248.44	46	95510.61	16	95765.52	46	96013.12
95257.30	47	95519.23	17	95773.89	47	96021.25
95266.15	48	95527.83	18	95782.26	48	96029.37
95274.99	49	95536.43	19	95790.60	49	96037.48
95283.82	50	95545.02	20	95798.95	50	96045.58
95292.64	51	95553.60	21	95807.29	51	96053.68
95301.46	52	95562.17	22	95815.62	52	96061.77
95310.27	53	95570.74	23	95823.94	53	96069.85
95319.07	54	95579.30	24	95832.26	54	96077.92
95327.86	55	95587.85	25	95840.56	55	96085.98
95336.64	56	95596.39	26	95848.86	56	96094.03
95345.42	57	95604.92	27	95857:15	57	96102.08
95354.18	58	95613.45	28	95865.43	58	96110.12
95362.94	59	95621.9	29	95873.70	59	96118.15
95371.69	60	95630.48	30	95881.97	60	96126.17

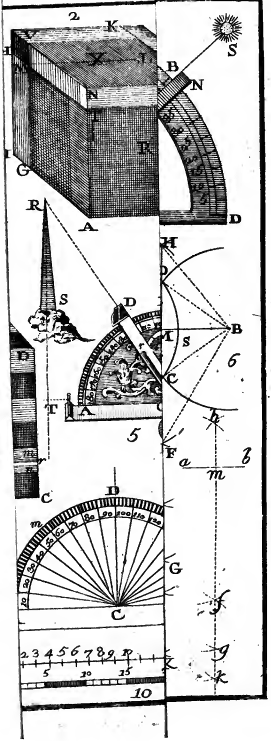
74 GRADUS.				75 GRADUS.			
M	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
0	96126.17	30	96363 05	0	96592.58	30	96814.76
1	96134.18	31	96470.83	1	96600.10	31	96822.04
2	96142.19	32	96378.58	2	96607.62	32	96829.31
3	96150.19	33	96386.33	3	96615.13	33	96836.57
4	96158.18	34	96394.07	4	96622.63	34	96843.83
5	96166.16	35	96401.81	5	96630.12	35	96851.08
6	96174.13	36	96409.54	6	96637.60	36	96858.32
7	96182.09	37	96417.26	7	96645.08	37	96865.55
8	96190.05	38	96424.97	8	96652.55	38	96872.77
9	96108.00	39	96432.67	9	96660.01	39	96879.98
10	96205.94	40	96440.37	10	96667.46	40	96887.18
11	96213.87	41	96448.06	11	96674.90	41	96894.38
12	96221.80	42	96455.74	12	96682.33	42	96901.57
13	96229.72	43	96463.41	13	96689.76	43	96908.75
14	96237.62	44	96471.07	14	96697.18	44	96915.92
15	96245.53	45	96478.73	15	96704.59	45	96923.09
16	96253.42	46	96486.38	16	96711.99	46	96930.25
17	96261.30	47	96495.02	17	96719.38	47	96937.40
18	96269.17	48	96501.65	18	96726.77	48	96944.54
19	96277.04	49	96509.27	19	96734.15	49	96951.67
20	96284.90	50	96516.88	20	96741.52	50	96958.79
21	96292.75	51	96524.49	21	96748.88	51	96965.90
22	96300.59	52	96532 09	22	96756.23	52	96973.01
23	96308.43	53	96539.68	23	96763.58	53	96980.11
24	96316.26	54	96547.26	24	96770.92	54	96987.20
25	96324.08	55	96554.83	25	96778.25	55	96994.28
26	96331.89	56	96562.40	26	96785.57	56	97001.35
27	96339.69	57	96569.96	27	96792.88	57	97008.42
28	96347.48	58	96577.51	28	96800.18	58	97015.48
29	96355.27	59	96585.05	29	96807.47	59	97022.53
30	96363.05	60	96592.58	30	96814.76	60	97029.57

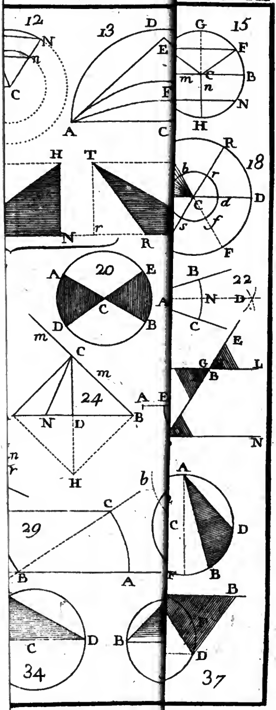
76 GRADUS. 77 GRADUS.

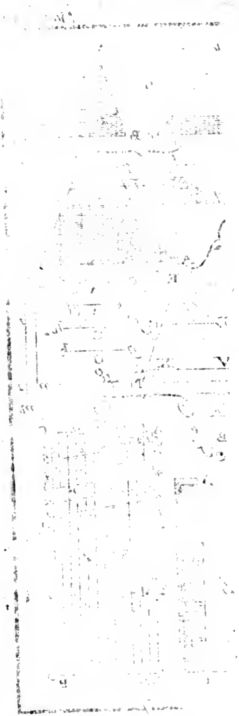
Sinus.	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
97029.57	30	97236.99	0	97437.01	30	97629.60
97036.60	31	97243.78	1	97443.55	31	97635.89
97043.63	32	97250.56	2	97450.08	32	67642.17
97050.65	33	97257.33	3	97456.60	33	97648.45
97057.66	34	97264.09	4	97463.11	34	97654.72
97064.66	35	97270.84	5	97469.62	35	97660.98
97071.65	36	97277.58	6	97476.12	36	97667.23
97078.63	37	97284.32	7	97482.61	37	97673.47
97085.61	38	97291.05	8	97489.09	38	97679.70
97092.58	39	97297.77	9	97495.56	39	97685.93
97099.54	40	97304.48	10	97502.03	40	97692.15
97106.49	41	97311.18	11	97508.49	41	97698.36
97113.43	42	97317.88	12	97514.94	42	97704.59
97120.36	43	97324.57	13	97521.38	43	97710.75
97127.29	44	97331.25	14	97527.81	44	97716.93
97134.21	45	97337.92	15	97534.23	45	97723.11
97141.22	46	97344.58	16	97540.65	46	97729.28
97148.02	47	97351.24	17	97547.06	47	97735.44
97154.91	48	97357.89	18	97553.46	48	97741.59
97161.79	49	97364.53	19	97559.85	49	97747.73
97168.67	50	97371.16	20	97566.23	50	97753.86
97175.54	51	97377.78	21	97572.60	51	97759.99
97182.40	52	97384.39	22	97578.97	52	97766.11
97189.25	53	97391.00	23	97585.33	53	97772.22
97196.09	54	97397.60	24	97591.68	54	97778.32
97202.93	55	97404.19	25	97598.02	55	97784.41
97209.76	56	97410.77	26	97604.35	56	97790.50
97216.58	57	97417.34	27	97610.67	57	97796.58
97223.39	58	97423.90	28	97616.99	58	07802.65
97230.19	59	97430.46	29	97623.30	59	97808.71
97236.99	60	97437.01	30	97629.60	60	97814.76

78 GRADUS. 79 GRADUS.

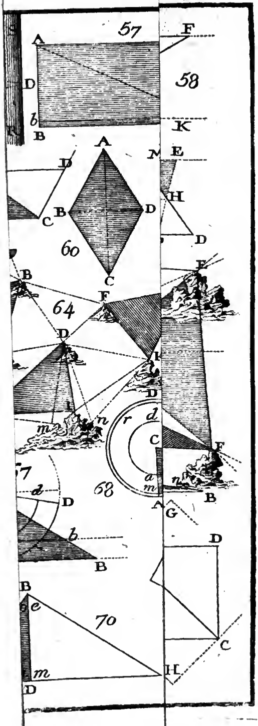
M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	97814.76	30	97992.47	0	98162.71	30	98325.49
1	97820.80	31	97998.26	1	98168.26	31	98330.79
2	97826 84	32	98004.05	2	98173.80	32	98336.08
3	97832.87	33	98009.83	3	98179.33	33	98341.36
4	97838.89	34	98015.60	4	98184.85	34	98346.63
5	97844.90	35	98021.36	5	98190.36	35	98351.89
6	97850.90	36	98027.11	6	98195.97	36	98357.14
7	97856.89	37	98032.86	7	98201.37	37	98362.39
8	97862.88	38	98038.60	8	98206.86	38	98367.63
9	97868.86	39	980·4.33	9	98212.34	39	98372.86
10	97874.83	40	98050.05	10	98217.81	40	98378.08
11	97880.79	41	98055.76	11	98223.27	41	98383.29
12	97886.74	42	98061.46	12	98228.72	42	98388.50
13	97892.68	43	98067.16	13	98234.17	43	98393.70
14	97898.62	44	98072.85	14	98239.61	44	98398.89
15	97904.55	45	98078.53	15	98245.04	45	98404.07
16	97910.47	46	98084.20	16	98250.46	46	98409.24
17	97916.38	47	98089.86	17	98255.87	47	98414.40
18	97922.28	48	98095.51	18	98261;27	48	98419.56
19	97928.17	49	98101.16	19	98266.67	49	98424.71
20	97934.06	50	98106 80	20	98272.06	50	98429.85
21	97939.94	51	98112.43	21	98277.44	51	98434.98
22	97945.81	52	98118.05	22	98282.81	52	98440.10
23	97951.67	53	98123.66	23	98288.17	53	98445.21
24	97957.52	54	98129.26	24	98293.53	54	98450.31
25	97963.37	55	98134.86	25	98299.88	55	98455.41
26	97969.21	56	98140.45	26	98304.22	56	98460.50
27	97975.04	57	98146.03	27	98309.55	57	98465.58
28	97980.86	58	98151.60	28	98314.87	58	98470.65
29	97986.67	59	98157.16	29	98320.18	59	98475.71
30	97992.47	60	98162.71	30	98325.49	60	98480.77


2
5
6
10

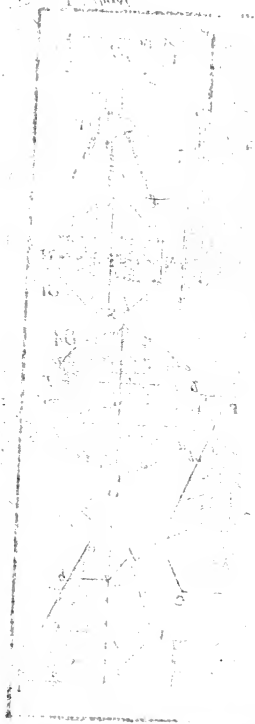

12
N
n
C
13
D
E
F
A
C
15
G
F
B
N
H
m
c
n
H
T
N
r
R
R
18
b
r
D
C
d
s
f
F
20
A
E
C
D
B
B
22
A
N
D
C
E
G
L
B
m
C
m
24
A
E
N
D
B
H
N
n
r
b
C
A
29
C
D
B
A
F
B
B
B
C
D
D
F
34
37

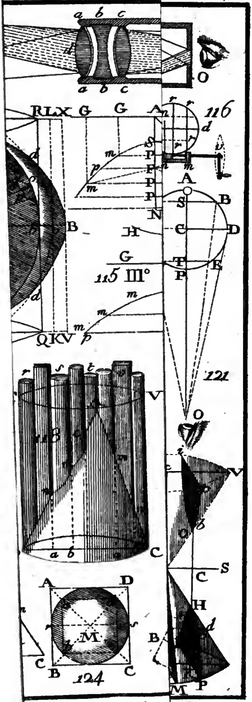


Math. T.IV.


57
58
A
F
D
b
B
K
E
H
D
C
B
A
D
C
60
B
E
F
64
D
I
K
m
n
D
r
d
C
a
m
68
A
G
B
F
d
D
b
B
D
C
H
B
e
70
m
D

Google




116
115 III°
121
118
124

80 GRADUS. | 81 GRADUS.

M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sjusn.*	M	*Sinus.*
0	98480.77	30	98628.56	0	98768.83	30	98901.58
1	98485.82	31	98633.36	1	98773.38	31	98905.88
2	98490.86	32	98638.15	2	98777.92	32	98910.17
3	98495.89	33	98642.93	3	98782.45	33	98914.45
4	98500.91	34	98647.70	4	98786.97	34	98918.72
5	98505.92	35	98652.46	5	98791.48	35	98922.98
6	98510.93	36	98657.21	6	98795.98	36	98927.23
7	98515.93	37	98661.96	7	98800.48	37	98931.27
8	98520.92	38	98666.70	8	98804.97	38	98935.71
9	98525.90	39	98671.43	9	98809.45	39	98939.94
10	98530.87	40	98676.35	10	98813.92	40	98944.16
11	98535.83	41	98680.86	11	98818.38	41	98948.37
12	98540.79	42	98685.57	12	98822.83	42	98952.57
13	98545.74	43	98690.27	13	98828.28	43	98956.77
14	98550.68	44	98694.96	14	98831.72	44	98960.96
15	98555.61	45	98699.64	15	98836.15	45	98965.14
16	98560.53	46	98704.31	16	98840.57	46	98969.31
17	98565.44	47	98708.97	17	98844.98	47	98973.47
18	98570.34	48	98713.62	18	98849.38	48	98977.62
19	98575.24	49	98718.27	19	98853.78	49	98981.76
20	98580.13	50	98722.91	20	98858.17	50	98985.90
21	98585.01	51	98727.54	21	98862.55	51	98990.03
22	98589.88	52	98732.16	22	98866.92	52	98994.15
23	98594.74	53	98736.77	23	98871.28	53	98998.26
24	98599.60	54	98741.38	24	98875.63	54	99002.36
25	98604.45	55	98745.98	25	98879.98	55	99006.45
26	98609.29	56	98750.57	26	98884.32	56	99010.54
27	98614.12	57	98755.15	27	98888.65	57	99014.62
28	98618.94	58	98759.72	28	98892.97	58	99018.69
29	98623.75	59	98764.28	29	98897.28	59	99022.75
30	98628.56	60	98768.83	30	98901.58	60	99026.80

82 GRADUS.				83 GRADUS.			
M	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*	*M*	*Sinus.*
0	99026.80	30	99144.49	0	99254.62	30	99357.18
1	99030.84	31	99148.28	1	99258.16	31	99360.47
2	99034.88	32	99152.06	2	99261.99	32	99363.75
3	99038.91	33	99154.84	3	99265.21	33	99367.02
4	99042.93	34	99159.61	4	99268.62	34	99370.28
5	99046.92	35	99163.37	5	99272.23	35	99373.54
6	99050.94	36	99167.12	6	99275.73	36	99376.79
7	99054.93	37	99170.86	7	99279.22	37	99380.03
8	99058.92	38	99174.59	8	99282.70	38	99383.26
9	99062.90	39	99179.31	9	99286.17	39	99386.48
10	99066.87	40	99182.03	10	99289.64	40	99389.69
11	99070.83	41	99185.74	11	99293.10	41	99392.89
12	99074.78	42	99189.44	12	99296.55	42	99396.09
13	99078.72	43	99193.13	13	99299.99	43	99399.28
14	99082.66	44	99196.81	14	99303.42	44	99402.46
15	99086.59	45	99200.49	15	99306.84	45	99405.63
16	99090.51	46	99204.16	16	99310.25	46	99408.79
17	99094.41	47	99207'82	17	99313.66	47	99411.94
18	99098.32	48	99211.47	18	99317.06	48	99415.09
19	99102.21	49	99215.11	19	99320.45	49	99418.23
20	99106.09	50	99218.74	20	99323.83	50	99421.36
21	99109.97	51	99222.36	21	99327.20	51	99424.48
22	99113.84	52	99225.98	22	99330.57	52	99427.59
23	99117.70	53	99229.59	23	99333.93	53	99430.69
24	99121.55	54	99233.19	24	99337.28	54	99433.79
25	99125.39	55	99236.78	25	99340.62	55	99436.88
26	99129.23	56	99240.36	26	99343.95	56	99439.96
27	99133.06	57	99243.94	27	99347.27	57	99443.03
28	99136.88	58	99247'51	28	99350.58	58	99446.09
29	99140.69	95	99251.07	29	99353.88	59	99449.14
30	99144.49	60	99254.62	30	99357.18	60	99452.18

84 GRADUS. 85 GRADUS.

M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
0	99452.18	30	99539.62	0	99619.47	30	99691.73
1	99455.22	31	99542.40	1	99622.00	31	99694.01
2	99458.25	32	99545.17	2	99624.52	32	99696.28
3	99461.27	33	99547.94	3	99627.03	33	99698.54
4	99464.28	34	99550.70	4	99629.54	34	99700.79
5	99467.28	35	99552.45	5	99632.04	35	99703.03
6	99470.27	36	99556.19	6	99634.53	36	99705.27
7	99473.26	37	99558.92	7	99637.01	37	99707.50
8	99476.24	38	99561.65	8	99639.48	38	99709.72
9	99479.21	39	99564.37	9	99641.94	39	99711.93
10	99482.17	40	99567.08	10	99644.40	40	99714.13
11	99485.12	41	99569.78	11	99646.85	41	99716.32
12	99488.06	42	99572.47	12	99649.29	42	99718.51
13	99491.00	43	99575.15	13	99651.72	43	99720.69
14	99493.93	44	99577.82	14	99654.14	44	99722.86
15	99496.85	45	99580.49	15	99656.55	45	99725.02
16	99499.76	46	99583.15	16	99658.95	46	99727.17
17	99502.66	47	99585.80	17	99661.35	47	99729.31
18	99505.55	48	99588.44	18	99663.74	48	99731.44
19	99508.44	49	99591.07	19	99666.12	49	99733.57
20	99511.32	50	99593.69	20	99668.49	50	99735.69
21	99514.19	51	99596.31	21	99670.85	51	99737.80
22	99517.05	52	99598.92	22	99673.20	52	99739.90
23	99519.90	53	99701.52	23	99675.55	53	99741.99
24	99522.74	54	99604.11	24	99677.89	54	99744.07
25	99525.57	55	99606.69	25	99680.22	55	99746.15
26	99528.40	56	99609.26	26	99682.54	56	99748.22
27	99531.22	57	99611.82	27	99684.85	57	99750.28
28	99534.03	58	99614.38	28	99687.15	58	99752.33
29	99536.83	59	99616.93	29	99689.44	59	99754.37
30	99539.62	60	99619.47	30	99691.73	60	99756.40

86 GRADUS. 87 GRADUS.

M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.	M	Sinus.
0	99756.40	30	99813.48	0	99862.95	30	99904.82
1	99758.42	31	99815.25	1	99864.47	31	99906.08
2	99760.44	32	99817.01	2	99865.98	32	99907.34
3	99762.45	33	99818.76	3	99867.48	33	99908.59
4	99764.45	34	99820.51	4	99868.97	34	99909.83
5	99766.44	35	99822.25	5	99870.45	35	99911.06
6	99768.42	36	99823.98	6	99871.93	36	99912.28
7	99770.39	37	99825.70	7	99873.40	37	99913.49
8	99772.36	38	99827.41	8	99874.86	38	99914.70
9	99774.32	39	99829.11	9	99876.31	39	99915.90
10	99776.27	40	99830.81	10	99877.75	40	99917.09
11	99778.21	41	99832.50	11	99879.18	41	99918.27
12	99780.14	42	99834.18	12	99880.61	42	99919.44
13	99781.06	43	99835.85	13	99882.03	43	99920.60
14	99783.98	44	99837.51	14	99883.44	44	99921.75
15	99785.89	45	99839.16	15	99884.84	45	99922.90
16	99787.79	46	99840.81	16	99886.23	46	99924.04
17	99789.68	47	99842.45	17	99887.61	47	99925.17
18	99792.56	48	99844.08	18	99888.98	48	99926.29
19	99793.43	49	99845.70	19	99890.35	49	99927.40
20	99795.29	50	99847.31	20	99891.71	50	99928.51
21	99797.15	51	99848.91	21	99893.06	51	99929.60
22	99799.00	52	99850.50	22	99894.40	52	99930.69
23	99800.84	53	99852.09	23	99895.73	53	99931.77
24	99802.67	54	99853.67	24	99897.05	54	99932.84
25	99804.49	55	99855.24	25	99898.37	55	99933.90
26	99806.30	56	99856.80	26	99899.68	56	99934.95
27	99808.11	57	99858.35	27	99900.98	37	99935.99
28	99809.91	58	99859.89	28	99902.27	58	99937.03
29	99811.70	59	99861.42	29	99903.55	59	99938.06
30	99813.48	60	99862.95	30	99994.82	60	99939.08

88 GRADUS.				89 GRADUS.			
M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*	M	*Sinus.*
0	99939.08	30	99965.73	0	99984.77	30	99996.19
1	99940.09	31	99966.49	1	99985.27	31	99996.44
2	99941.09	32	99967.24	2	99985.76	32	99996.68
3	99942.09	33	99967.98	3	99986.25	33	05996.02
4	99943.08	34	99968.71	4	99986.63	34	99997.14
5	99944.06	35	99969.43	5	99987.20	35	99997.36
6	99945.03	36	99970.14	6	99987.66	36	99997.56
7	99945.99	37	99970.85	7	99988.11	37	99997.76
8	99946.94	38	99971.55	8	99988.55	38	99997.95
9	99947.88	39	99972.24	9	99988.99	39	99998.13
10	99948.81	40	99972.92	10	99989.42	40	99998.31
11	99949.74	41	99973.59	11	99989.84	41	99998.47
12	99950.66	42	99974.25	12	99990.25	42	99998.63
13	99951.57	43	99974.91	13	99990.65	43	99998.78
14	99952.47	44	99975.56	14	99991.04	44	99998.92
15	99953.36	45	99976.20	15	99991.43	45	99999.05
16	99954.24	46	99976.83	16	99991.81	46	99999.17
17	99955.11	47	99977.45	17	99992.18	47	99999.28
18	99955.98	48	99978.06	18	99992.54	48	99999.39
19	99956.84	49	99978.67	19	99992.89	49	99999.49
20	99957.69	50	99979.27	20	99993.23	50	99999.59
21	99958.53	51	99979.86	21	99993.56	51	99999.66
22	99959.36	52	99980.44	22	99993.89	52	99999.73
23	99960.19	53	99981.01	23	99994.21	53	99999.79
24	99961.01	54	99981.57	24	99994.52	54	99999.85
25	99961.82	55	99982.12	25	99994.82	55	99999.89
26	99962.62	56	99982.67	26	99995.11	56	99999.93
27	99963.41	57	99983.21	27	99995.39	57	99999.96
28	99964.19	58	99983.74	28	99995.66	58	99999.98
29	99964.96	59	99984.26	29	99995.93	59	99999.99
30	99965.73	60	99984.77	30	99996.19	60	100000.00

INDEX
RERUM ALPHABETICUS
cujus ope Volumen hoc Lexici Mathematici vices gerit.

Signum = *hic ſignificat* uſque ad. *Exempli cauſa* 559 = 575 *ſignificat, rem indicatam a numero* 559 *uſque ad numerum* 575 *pertractari. Aliquot quoque erunt numeri paginas indicantes, qua peculiari modo indicabuntur.*

A

Abſciſſa, & ordinatæ parabolæ, 738=743. Ellipſeos, 749=750.
Acus magnetica; 420, & 436.
Additio incomplexa, & complexa, 23=28. Additio algebrica, 84. Additio fractionum, 201.
Æquationes primi gradus, earum formatio, 257; earum decompoſitio, 258; earum transformatio, 259=265, earum ſubſtitutio 266; præcepta ad earum reſolutionem, 267. Varia de hoc præcipua problemata, 268=297.
Æquationes ſecundi gradus, 298=305.
Agrimenſura, pag. 36.
Altitudo trianguli, 380, parallelogrammi, 438; priſmatis, 547; cylindri, 549; pyramidis, 550; coni, 551.
Algebra, ejus origo, progreſſus, natura, 74=152.
Alidada graphometri 420.
Analogia, 153=249.

Analyſis geometrica, ejus origo, progreſſus, natura, formulæ, 250=252. Ejus uſus in reſolutione æquationum primi, & ſecundi gradus, 252=269.

Angulus rectilineus, rectus, acutus, obtuſus, 335. Anguli alterni, interni, & externi, 357. Angulus ad centrum, & angulus inſcriptus, ſive angulus ſegmenti, 365=369. Anguli ſalientes, & regredientes, 469. Anguli mixtilinei, & curvilinei, 726.

Annus ſolaris tropicus, ejus duratio, pag. 28.

Antecedens, aut conſequens rationis, 155.

Apothema polygoni, 469; pyramidis, 550.

Approximatio: radicem quadratam, aut cubicam a numero perfecte nec quadrato, nec cubico per approximationem extrahere, 135, & 151.

Aquaductus, quam inclinationem poſtulent, ut aquæ fluant, 531.

Arcus circuli, 310, & 335. Arcus ſimiles duarum peripheriarum concentricarum, 340, & 648. Arcum circuli maximi in cælo metiri, 736, & 737.

Arithmetica. Ejus origo, natura, præcepta, operationes variæ, 12=73.

Area trianguli, 380.

Aſymptoti hyperbolæ, 769. & 770.

Axis priſmatis, 547; cylindri 549, pyramidis, 550; coni, 551; ſphæræ, 554; circuli ſphæræ maximi, 727; parabolæ, 739; ellipſeos, 749.

Axiomata varia mathematica, 11.

B

B*aſis* trianguli, 380; priſmatis, 546; pyramidis, 550.

C

Centrum circuli, 309; ſphæræ, 554, & 735; ellipſeos, 749.
Chorda arcus circuli, 310, 318. 633, 648. Omnium arcuum circuli ab arcu unius minuti ad arcum 180 graduum chordas invenire; 653=665.
Circinus, & regula, 303, & 308.
Circulus, 309, & 466. Sectiones in circulo, 406=410. Præcipua circuli proprietas, 410. Quadratura circuli, 483; ſuperficies circuli, 481; ſphæræ circuli maximi, & minores, 554=557. Circuli area maxima inter iſoperimetra, 510.
Circulus oſculator ellipſeos, 762.
Chronologia ſacra, & prophana ad periodum Julianam relata, pag. 33.
Chronologia verſionis Hebraicæ, Samaritanæ, ſeptuaginta Interpretum, pag. 34.
Circumſcriptum; polygonum circulo circumſcriptum, 506. Cylindrus, cubus, conus æquilaterus ſphæræ circumſcripti, 571. Circulus ellipſi circumſcriptus, 749, & 751.
Coefficientia algebrica, 88.
Combinationes, quas plures magnitudines admittunt, 114.
Commenſurabiles magnitudines, 6, & 519.
Complementum anguli, & arcus, 337, 339, 637, 660.
Complexi numeri, 22, 23.
Concentricæ peripheriæ, & excentricæ, 310.
Conus rectus, 551; obliquus, 552; truncatus, 553.
Conſequens, & antecedens rationis, 155.
Continuum, ſeu quantitas continua, 1.
Coſinus, ſeu ſinus complementi anguli, aut arcus 637, & 660.
Corollarium, 9.
Crater ſphæricus, 576.

Curvatura, & elevatio montium. Quo ſenſu telluris ſuperficiem non augeant, 540.

Cubus numeri perfectus, & imperfectus, 117, & 120.

Cubus geometricus, 121, & 546. Ejus formatio, & proprietates, 136 = 144. Ejus expreſſio algebrica, 136, & 137. Ejus decompoſitio, ſeu ſuæ radicis cubicæ extractio, 145 = 151.

Cylindrus, 549. Ejus ſuperficies, 564. Ejus ſoliditas, 603.

D

Definitiones, 8.

Denominator fractionis, 13.

Diagonalis parallelogrammi, 434.

Diameter circuli, 309. Ratio diametri ad peripheriam, 479, & 663. Diameter ſphæræ, 554.

Dies medius, pag. 28.

Differentia, ſeu reſiduum ſubductionis, 29.

Dimenſiones extenſionis, longitudo, latitudo, profunditas, 301.

Directrix parabolæ, & ellipſeos, 738, & 739.

Diſcreta magnitudo, aut quantitas, 1.

Dividendus, & diviſor numerus, 43.

Diviſio, 43. Diviſio incomplexa ſimplex, & compoſita, 44 = 53. Diviſio complexa 61 = 64. Diviſio per fractiones unitatis, 71, 72. Diviſio algebrica incomplexa, & complexa, 103 = 12. Diviſio fractionum, 210 = 213.

E

Elementa ſuperficierum, 438; ſolidorum, 585.

Ellipſis, 738. Ellipſis in plano, 749 = 764. Ellipſis in cono, 765, 767. Ellipſeos ſuperficies, 752, & 753.

Elli-

Ellipſoidale; ſolidum curvatura ellipſoidali, ut ferme eſt globus terreſtris: ejus ſuperficies, 755; ejus ſoliditas, 754.

Elliptica curva, qualis ferme eſt curva planetarum, & cometarum, 749, & 756. Solidum concavitate elliptica, & ſpeculum elliptico concavum, 764.

Epocha generales in hiſtoria: creatio, diluvium, vocatio Abrahami, exitus ab Ægypto, dedicatio Templi Salomonis, æra Olympiadum, Roma condita, æra Nabonaſſaris, libertas a Cyro Judæis reſtituta, Alexandri obitus, Carthago capta, initium æræ Chriſtianæ; pag. 33.

Evolutio ſuperficiei ſolidi, 559. Evolutio, ſeu ſuperficies priſmatis, 560 = 562; pyramidis, 563; cylindri, 564 = 566; coni recti, 568; truncati, 570; ſphæroidis regularis 572; ſphæræ, 573 = 577; crateris ſphærici 576.

Extenſio in tribus dimenſionibus conſiderata, 301, & 543.

Exaltatio, & extractio magnitudinum numericarum, & algebricarum, 115, 152.

Excentricitas ellipſeos, 757, 760.

Excentrica peripheriæ 310.

Exponens algebricum, 92.

Exponens rationis generatim, 155; exponens rationis geometricæ, 155 = 162.

Extractio radicum quadratæ, & cubicæ, 129, & 145.

Extrema, & media proportionis geometricæ, 170, & 171; proportionis arithmeticæ, 181, & 182.

F

Falſa poſitio. Regula falſæ poſitionis, 273 = 275.

Figura, 379. Figuræ, aut ſuperficies ſimiles, 498. Ratio figurarum, aut ſuperficierum ſimilium duplicata ſuarum homologarum dimenſionum, 399.

Focus parabolæ, 739, & 746. Ellipſeos, 757, & 759.

Fractiones, ſeu numeri fractionarii, 13. Fractiones unitatis, 65 = 72. Theoria fractionum, 186 = 216; earum natura, 187, valor, 188 = 192; transformatio, 203; reductio, 198 = 200; additio, 201; ſubductio, 203; multiplicatio, 206 = 209; diviſio, 210 = 213; exaltatio, 214 = 26.

Fractiones decimales, 464, & 645.

G

Geometria ſpeculativa, & practica, elementaris, & tranſcendens, 302.

Gradus peripheriæ circuli, 311.

Graphometrum, 420. Ejus uſus, 423 = 426.

H

Hexagonum, 465.

Hexapeda, 7: hexapeda quadrata; pedes, pollices, lineæ hexapedæ quadratæ, 7, & 451. Hexapeda cubica, pedes, pollices lineæ hexapedæ cubicæ, 7, & 613.

Homologa latera duorum triangulorum ſimilium, 390.

Horizon: linea horizontalis, 422, & 521 = 534.

Hyperbola, 748, 747, 768, 770.

Hypothenuſa, 514. Proprietas præcipua quadrati hypothenuſæ, 515, & 517.

I

Incommenſurabiles magnitudines, 6 & 519.

Infinita mathematica, 237, & 238. Infinita relativa, 238. Infinita, & infinite parva primi, ſecundi, tertii ordinis, 239 = 245. Summatio nonnullarum ſerierum infinitarum 246 = 249.

In-

Inſcriptum polygonum circulo, 506. Sphæra cylindro, cubo, cono æquilatero inſcripta, 571.

Iſoſceles triangulum, 381.

Iſoperimetræ figuræ, aut ſuperficies, 467, & 507 = 512.

L

LEmma, 9.

Libella vera, & apparens, 533 = 537. Tabula elevationum libellæ apparentis ſupra veram, 534. Libellatio, 533, & 536. Libella aquea, 535, 422, & 430.

Leuca, 7, & 446.

Linea 303. Earum origo, & proprietates, 304 = 326: Earum poſitio reſpectiva, 327 = 378. Earum conjunctio, 379 = 392; earum ratio, 393 = 430.

Linea proportionales, 393 = 400; & 494 = 497.

Linea partium æqualium, 411.

Logarithmi, 708.

Longimetria, ſeu ſcientia extenſionis in longitudinem, 302 = 430.

M

MAgnitudo diſcreta, & continua. 1.

Magnitudines radicales, 152.

Mathematica ſcientia; ejus natura, utilitas, diviſio, methodus, media, quibus ſimplex, & jucunda eveniat. *Vide præfationem* Matheſis in genere, 1. Matheſis pura, & mixta, 4.

Medium proportionale geometricum, 170, & 412; arithmeticum, 185, & 448.

Media, *& extrema* proportionis geometricæ, 170, & 171; proportionis arithmeticæ, 181, & 182.

Menſura: idea *menſuræ univerſalis* extenſionis,

nis, pag. 22, temporis, pag. 28. Menſuræ extenſionis veteres, & recentiores gallicis menſuris comparatæ, pag. 35. Menſurarum ex calore dilatatio, pag. 38.

Menſura ſuperficierum, 445=457, & 70, & 460=463. Menſura ſolidorum, 70, & 612=615. Regionis ſuperficiem metiri, 453, & 538=540.

Menſura ſolidorum, 587, 612.

Methodus geometrica 8. Methodus ſynthetica & analytica, 251. Methodus indiviſibilium, Cavallerii, 438.

Micrometrum objectivum, 422.

Mixtionis regula directa, & indirecta, 275, & 281=287. Hac regula celebre Archimedis problema de Hieronis corona reſolvere, 286.

Motus. Præcipua de motu corporum problemata, 288=294.

Multiplices numeri, 161.

Multiplicandus, & *multiplicator*, 34.

Multiplicatio incomplexa, ſimplex, & compoſita, 35=42; complexa, 54=60; per fractiones unitatis, 66=70; algebrica incomplexa, & complexa, 91=102; fractionum, 206=209.

N

Normà; inſtrumentum pyxidis mathematicæ, 364, 732.

Nota numerica, earum natura, & utilitas, 14=21.

Numeri, & ſcientia numerorum, 13, & 14. Numeri abſtracti, & concreti, incomplexi, & complexi, integri, & fractionarii, 13. Numeri primi, & multiplices, 161. Modus numeros ſcribendi Hebræorum, Græcorum, Romanorum, Arabum, 14.

Numerator fractionis, 13.

O

Obliqua linea alteri lineæ, 330, 348. Priſma obliquum, 547. Cylindrus obliquus, 549. Pyramis obliqua, 550. Conus obliquus, 552.
Ordinata circulo, ſectionibus conicis, 738, 739, 749.

P

Parabola, 738. Parabola in plano, 739=748; parabola in cono, 738, & 766. Solida cavitate parabolica, & ſpecula concava parabolica, 746.
Parallela linea alteri lineæ, 328, & 356=364. Planum plano parallelum, 528.
Paralleliſmus duorum planorum, 528.
Parallepipedum, 546, & 121.
Parallelogrammum, 432, & 437.
Parameter parabolæ. 639, & 742; Ellipſeos 758.
Partes æquales: linea partium æqualium, 411.
Partes aliquotæ, & *aliquantæ* alicujus quantitatis, 161. Multiplicatio per partes aliquotas, 68=70.
Partes ſimiles totius, 162, 169.
Pendulum quovis minuto ſecundo oſcillans, ſimplex, & compoſitum, pag. 23.
Pentagonum, 46.
Perimeter polygoni, 46
Periodus Juliana, pag. 29
Peripheria circuli, 310, & 311. Ratio peripheriæ ad diametrum, 479., & 663.
Perpendicularis linea lineæ, 329; & 353. Superficies plana alteri ſuperficiei planæ perpendicularis, 729.
Perpendiculum, ejus linea ad cognoſcendam li-

lineam horizontalem, verticalem, libellæ, 532. Diſtantia a perpendiculo, 351, 352.
Pinnulæ graphometri, 420.
Planum, ſeu ſuperficies plana, 523, & 524. Sectiones plani, 522 = 531. Planum generans ſolidum, 545. Planum circuli, 523.
Planime tria, ſeu ſcientia extenſionis in longum, & latum in ſuperficiebus planis, 431 = 541.
Poli ſphæræ, 554; magni circuli ſphæræ terreſtris, aut cæleſtis, 727.
Polynomia: quantitates polynomiæ, ſeu complexæ algebricæ, 80. Binomia, trinomia, quadrinomia, 80.
Polygona, 463; circulo inſcripta, aut circumſcripta, 506; eorum varia ſuperficies, 503 = 505.
Poſtulata, 8.
Potentia algebrica; earum natura, & formatio, 115, & 118.
Priſma, 546; ejus ſuperficies, 560 = 562; ſoliditas, 601, & 602.
Probatio additionis, 26; ſubductionis, 32; multiplicationis, 40; diviſionis, 48.
Probatio ſuperpoſitionis, 10, & 358.
Problema, 9. Problemata determinata, & indeterminata, 256. Conditiones problematis, 255. Problemata præcipua, quorum ſolutio proxime reſpicit magnas algebrę, geometriæ, phyſicæ cognitiones, 268 = 301.
Producentia ſuperficierum planarum, 490; ſuperficiei ſolidorum, 579; ſoliditatis ſolidorum, 616.
Productum duarum magnitudinum quarumcumque, 34; ſemper idem, ſive prima per alteram, ſive altera per primam multiplicetur, 93. Productum lineæ in lineam eſt ſuperficies, 490, & 650; ſuperficiei in lineam, quæ ejus altitudinem exprimit, & ſolidum, 612.
Progreſſio, 154; arithmetica, & geometrica, fini-

finita, & infinita, 230 = 249. Summatio progreſſionis finitæ numerorum naturalium, 231, & 232; progreſſionis finitæ numerorum imparium, 233; progreſſionis infinitæ numerorum naturalium, ſuorum quadratorum, & cuborum, 247 = 249; progreſſionis geometricæ infinitæ, cujus primus, & ſecundus terminus notus eſt, 295 = 298.

Proportio, 154; arithmetica, & geometrica, 155. Theoria proportionum geometricarum, 170 = 180; proportionum arithmeticarum, 181 = 185. Termini proportionis geometricę elevati ad eorum quadrata, aut cubos ſive adducti ad ſuas radices quadratas, aut cubicas, adhuc proportionales, 225, & 228.

Proportio continua, 170.

Punctum mathematicum, 302, & 438. Per tria data puncta peripheriam ducere, 322. Tria puncta ſolitaria, neceſſario ſunt in plano 530.

Pyramis, 530; ejus ſuperficies, 563; ejus ſoliditas, 604.

Q

Quadratura circuli, 483; ellipſeos, 753; parabolæ, 748.

Quadrilaterum, 432.

Quantitas, ſeu magnitudo, diſcreta, & continua, 1.

Quantitates algebricæ, 75 = 83; poſitivæ, aut negativæ, æque veræ ſunt, 86.

Quadratum numeri, perfectum, imperfectum, 117, & 119.

Quadratum geometricum, 121, & 432. Ejus formatio, & proprietates, 122 = 128; ejus expreſſio algebrica, decompoſitio, ſive extractio radicis quadratæ, 129 = 135.

Quadratum lineæ, 515; hypothenuſæ, 515 & 517, Linea, pollex, & pes, hexapeda, leuca, quadratæ, 7 & 446.

Qua-

Quadrans 311, 421.
Quotiens diviſionis. 43.

R

Radix numeri, 118; quadrata, 116; cubica, 117; extractio radicis quadratæ numeri, 129=135; extractio radicis cubicæ, 145=151.

Radicalia, ſeu quantitates poſitæ ſub ſigno radicali, 152.

Ratio ſtylo mathematico, 155. Ratio geometrica, 155, & 156; arithmetica, 155, & 181.

Rationes ſimplices, arithmetica, & geometrica, 155. Ratio geometrica, ejus natura, & valor, 156=162. Principia, ſeu theoria rationum geometricarum, 166=169. Rationum æqualitas, 169. Ratio directa, & inverſa, 176=179.

Rationes compoſitæ, 217; ratio duplicata, 218, & 490; triplicata, 219, & 621. Theoria rationum duplicatarum, triplicatarum, 220=229.

Ratio magnitudinis ad aliam, 154. Æqualitas rationum, 169. Ratio diametri ad peripheriam circuli, 479, & 663. Ratio ſuperficierum, 489=521; ratio ſoliditatum, 616=626.

Radius circuli 309, & 310. Radius ſphæræ, 554.

Radius vector in parabola, 747; in ellipſi, 760.

Radius terreſtris, ejus longitudo media. pag. 35.

Reciproca magnitudines, ſeu reciproce proportionales, 408.

Rectangulum triangulum, 382. Rectangulum tantum, ſeu parallelogrammum rectangulum, 432.

Redu-

Reductio algebrica, 88.
Reductio fractionum, 195, & 198=200.
Reductio figurarum, a magna in parvam, & vice verſa, 411.
Regula, & circinus, 303, 308.
Regula trium, ſive aurea, directa, & indirecta, 177=180; regula quinque, ſeptem, & novem quantitatum, 275, 276. Regula falſæ poſitionis, 273=275. Regula ſocietatis, 275, & 279.
Regula mixtionis, directa, & indirecta, 275 & 281=287.
Reſolutio æquationum, 267.
Reſiduum, ſeu differentia in ſubductione, 29.
Rhombus, & *rhomboides*, 432.

S

SCala, ſeu linea partium æqualium, 411.
Scala geometrica, 412, 415, 416.
Scalenum triangulum, 381.
Secans circuli, 332; parallelarum, 351.
Secans arcus, 721. Data anguli tangente ejus ſecantes invenire, 724.
Sector circuli, 310; ejus ſuperficies, 482.
Sectiones linearum in circulo, 406=410.
Sectiones linearum, & planorum, 522=532.
Sectiones conicæ; harum curvarum notio in cono, & in plano, 738. Parabola in plano, 739=749. Ellipſis in plano, 749=764. Parabola, ellipſis, hyperbola in cono, 765=773.
Segmenta areæ circuli, 310; diametri circuli, 406.
Semicirculus in gradus diviſus: inſtrumentum mathematicum, 345.
Signa algebrica, 75. Eorum mutatio in ſubductione, 85; in multiplicatione, 95, & 96; in diviſione, 105.
Signa radicalia, 112.
Similes termini in algebra, 78; partes ſimiles

les duarum quantitatum, 162; arcus ſimiles, 340, & 648. Triangula ſimilia, 383, & 401; ſuperficies ſimiles, 498, ſolida ſimilia, 578.

Sinus rectus anguli, aut arcus, 634, 636, 639. Sinus totus, 643, & 646. Sinus complementi anguli acuti, ſeu coſinus, 637. Ex theoria ſinuum reſolvere triangula, 702=707.

Sinus verſus anguli, aut arcus, 635, & 638. Arcus dati ſinum verſum invenire, 662.

Sinus ſecundorum, 709, & 711. Tabulam ſinuum ſecundorum conſtruere, 717. Ex theoria ſinuum triangula reſolvere, quæ angulos habeant minuto minores, 718.

Societatis regula, 275, & 279.

Solida, 302, & 543. Superficies ſolidorum, 560=575. Soliditas ſolidorum, 601=605. Solida ſimilia, 578. Ratio ſolidorum, 616=626. Elementa ſolidorum, 585.

Specula parabolica & elliptica, 746, & 764.

Sphæra, 554=557; ejus ſuperficies, 573=577; ſoliditas, 608, & 624. Sphæra majorem ſoliditatem habet quovis ſolido eandem ſuperficiem habente, 626. Sphæra terreſtris, & cæleſtis, 735.

Sphæroides regularis, & irregularis, 558. Superficies ſphæroidis regularis, 572.

Sphæroides ellipſoidalis, qualis ferme eſt tellus: ejus formatio, ſuperficies, ſoliditas, 754, & 755.

Stereometria, ſeu ſcientia extenſionis in longum, latum, & profundum, 542=626.

Subductio incomplexa, 29=33. Subductio algebrica, 85=90; fractionum, 203=205.

Subſtitutio in æquationibus 266; in rationibus geometricis, 168.

Summa in additione, 23. Summa extremorum æqualis ſummæ mediorum in proportione arithmetica, 182.

Summatio ſeriei finitæ numerorum naturalium, 231, numerorum imparium, 233, ſeriei infi-

infinitæ unitatum, ſuorum quadratorum, & cuborum, 247 = 249; progreſſionis infinitæ, cujus primus, & ſecundus terminus cognoſcantur, 295 = 298.

Superpoſitio, 10, & 358.

Supplementum anguli, aut arcus, 338, 339, 636.

Superficies, 303; planæ, & curvæ, 431. Æqualitas ſuperficierum planarum, 430 = 444 & 481 = 483. Superficies ſimiles, 498. Ratio ſuperficierum planarum, 489 = 521. Sectiones ſuperficierum planarum, 522 = 529, ſuperficies ſolidorum, 559 = 584.

Synthеſis, & methodus ſynthetica, 251.

T

Tabella pratoriana, 436.

Tangens circuli, 331, & 370 = 378. Inter tangentem, & circulum infinitæ curvæ diverſæ tranſire poſſunt, 375. Tangens anguli aut arcus circuli, 720. Dato quovis angulo in circulo, ſuæ tangentis valorem invenire, 723. Tangentes parabolæ, 744, & 745. Tangens ellipſeos, 744, & 763.

Teleſcopium aſtronomicum quadranti afixum, 422.

Teleſcopia acromatica, 423 III.

Termini algebrici poſitivi, & negativi, 77. termini ſimiles, 78.

Theorema, 9.

Topographiam loci alicujus deſcribere, 455.

Totum, & pars, 11. Partes ſimiles duorum totorum, 162, & 163.

Trapezium, 432. Ejus ſuperficies, 444, & 445.

Triangulum rectilineum æquilaterum, iſoſceles, ſcalenum, rectangulum, acutangulum, obtuſangulum 379 = 382. Triangula mixtilinea, & ſphærica, 726 = 737.

Triangula in omnibus æqualia 390=392.

Triangula ſimilia, 383, 390, & 401=405. Reſolutio triangulorum rectilineorum methodo triangulorum ſimilium, 417=430. Reſolutio eorundem triangulorum per trigonometriam, aut per ſupputationem arithmeticam, 702=707, & 718.

Trigonometria, 627. Trigonometria rectilinea, 632=725; ſphęrica, 726=737.

V

Vertex anguli 335, & 343; trianguli, 380; pyramidis, 550; coni, 551 parabolæ, 739.

Z

Zona terreſtris, & cæleſtis, 576, & 733=734.

Finis Indicis.

Errata.		ſic	Corrige.
25	3	majorem	minorem
26	1	$\frac{10}{455}$	$\frac{10}{435}$
36	34	35 unica	uncia
43	37	5×2	$5 + 2$
119	9	quod	quem
134	33	radici	radicis
161	2	multiplicandos	multiplicandi
170	36	45:: *opera*	45 *opera*
176	25	unica	uncia
173	3	86*x*	86 : *x*
	20	*b*.*c*	*b* : *c*
230	16	ſacci	ſaccis
243	9	fruſtrum	fruſtum
251	3	eorum	earum
256	7	quo	ſuo
277	34	acutus	auctus
278	1	acutus	auctus
221	6	planus	planum
494	34	eſt	&
499	31	acutis	auctis

In etymologiis græcanicis errores litterarum ac inordinatæ collocationis facilius legendo a doctis emendabuntur quam huc in Indicem referantur.

005679056

Digitized by Google